ALTERNATIVA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO BÁSICO

Wilson Monteiro de Albuquerque Maranhão[1]

RESUMO

O ensino de análise combinatória na educação básica é um dos grandes desafios didáticos na matemática. Dentre os fatores geradores deste problema destacam-se: o excesso de formalismo; o adiamento da apresentação dos métodos de contagem; e as dificuldades dos alunos em correlacionar conceitos e fórmulas. O objetivo deste trabalho foi analisar os livros didáticos indicados pelo PNLD – 2018 e adotados nas escolas públicas e propor uma alternativa didática para o ensino de combinatória. A análise dos livros didáticos indicou pontos críticos que dificultam a construção do conhecimento. Para amenizar este problema construiu-se uma proposta que favorece a aprendizagem do aluno, ampliando sua compreensão de análise combinatória.

Palavras-Chave: Educação Básica; Ensino de Matemática; Análise Combinatória.

1 Introdução

O ensino de análise combinatória na educação básica é um dos grandes desafios didáticos para os professores de matemática. Isto se deve tanto à dificuldade, por parte dos alunos, de compreender conteúdos que dependem do raciocínio lógico quanto à falta de estratégias de ensino. Este problema é normalmente agravado, uma vez que parte significativa dos professores ensina análise combinatória apoiando-se apenas em livros didáticos, que induzem a aplicação direta de fórmulas e apresentam exercícios pouco criativos, deixando o aluno sem uma real experiência do “pensar combinatório”.

Este “pensar combinatório” consiste em solucionar logicamente situações-problema onde o aluno precisa traçar estratégias de resolução, colocá-las em prática e averiguar se obteve êxito. A simples aplicação de fórmulas preestabelecidas não desenvolve o raciocínio, apenas estimula a memorização, que é ineficaz (PCN, 2000), pois não leva à aprendizagem dos conceitos fundamentais.

Para Piaget e Inhelder (1976), o raciocínio combinatório é determinante para o desenvolvimento do pensamento formal. O pensamento intelectual se desenvolve em estágios de progresso ordenado, apresentando inicialmente estruturas limitadas, que evoluem para estruturas de pensamento mais complexas (estágio operatório formal). Este estágio avançado é caracterizado pela capacidade de sistematizar combinações, analisar ordenação de componentes, formular hipóteses e avaliar suas consequências.

Segundo Schliemann (1988), Pessoa, Silva e Matos (2005), as dificuldades dos alunos na resolução de questões de combinatória devem-se principalmente ao desenvolvimento tardio

[1] Doutorando em Educação em Ciências e Matemática – REAMEC – UFMT, wilmaranhao@gmail.com;

do raciocínio lógico, uma das habilidades fundamentais para a compreensão deste conteúdo. Dentre os fatores que desencadeiam este problema, pode-se citar: (i) o excesso de formalismo na apresentação dos conceitos de arranjos, combinações e permutações (Batanero, 1997; Esteves, 2001; Roa e Navarro-Pelayo, 2001); (ii) o adiamento da apresentação dos métodos de contagem (princípio aditivo e multiplicativo) para o segundo ano do ensino médio (ao invés de serem apresentadas noções básicas no ensino fundamental, Pessoa e Borba, 2009); e (iii) as dificuldades dos alunos em correlacionar os conceitos e as fórmulas de cada tipo de agrupamento (Vergnaud, 1986).

Uma alternativa já apontada na literatura para contornar as dificuldades no ensino de análise combinatória é a utilização do recurso da resolução de situações-problema. Este recurso é muito indicado no desenvolvimento do raciocínio combinatório, visto que nesta etapa do ensino o aluno normalmente já teve um contato inicial com o princípio multiplicativo por meio de problemas ligados à contagem (Perrone, Oikawa e Moala, 2013). Polya (1995) aponta quatro fases fundamentais para resolução de situações-problema:

(i) Compreensão do Problema: antes da resolução de um problema é necessário compreender sua finalidade para, posteriormente, buscar sua solução.

(ii) Estabelecimento de um Plano: após perceber do que se trata o problema deve-se traçar um plano de resolução, que pode consistir em desenhos, esquemas, fórmulas, etc.

(iii) Execução do Plano: a partir das informações do problema e do plano traçado para sua solução, passa-se a etapa de execução.

(iv) Retrospecto: finalmente deve-se verificar a solução e corrigir eventuais erros, bem como, avaliar se há formas mais simples de resolução.

Outra alternativa que pode auxiliar a compreensão de análise combinatória é a construção dos novos conceitos partindo-se de conhecimentos já consolidados pelos alunos. No caso do ensino de combinatória, um exemplo seria a utilização das noções de conjuntos e sequências, previamente apresentadas aos alunos. Este tipo de metodologia está em sintonia com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 2000), que apresentam a matemática como uma disciplina contínua e em constante construção.

Com a finalidade de minimizar os problemas enfrentados por professores e alunos, este trabalho teve como objetivo propor uma alternativa didática para o ensino de análise combinatória. Inicialmente foi realizada uma avaliação de livros didáticos normalmente adotados nas escolas da rede pública e, posteriormente, foi elaborado um plano que favorece, aos alunos, o desenvolvimento das habilidades necessárias para assimilação dos conceitos de cálculos combinatórios. Para a elaboração desta nova proposta utilizou-se o recurso da resolução de situações-problema desenvolvido por Polya (1995) e as orientações do PCN (2000) sobre a construção contínua dos conhecimentos.

2 Metodologia

Para avaliação das metodologias empregadas atualmente no ensino de análise combinatória foram analisados três livros didáticos de matemática utilizados na segunda série do ensino médio. Todas as obras foram selecionadas pelo Ministério de Educação para compor o Guia de Livros Didáticos de Matemática do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2018), para o triênio 2018 – 2020. As obras são disponibilizadas para a livre escolha dos docentes, de cada instituição de ensino, e distribuição aos educandos.

A descrição das obras é apresentada na Tabela 1. Os livros foram representados pelas letras A, B e C para facilitar a discussão e comparação dos mesmos ao longo deste trabalho.

Tabela 1: Livros didáticos de matemática selecionados para a avaliação.

Obra	Título	Autor(es)	Volume	Edição	Editora	Ano
A	Quadrante Matemática	Eduardo Chavante e Diego Prestes	2	1ª	SM	2016
B	Matemática: interação e tecnologia	Rodrigo Balestri	2	2ª	Leya	2016
C	Matemática Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.	2	9ª	Saraiva	2016

Fonte: o autor

Baseando-se nas dificuldades apontadas na literatura para o ensino-aprendizagem de análise combinatória, os autores estabeleceram quatro critérios para a análise dos livros didáticos: (i) a importância dada aos princípios de contagem e a construção destes conceitos por meio da resolução de problemas; (ii) o uso do fatorial como uma ferramenta de cálculo; (iii) o desenvolvimento dos conceitos de agrupamentos simples; e (iv) a existência de exercícios que exijam do aluno a aplicação do raciocínio combinatório para resolução de situações-problema.

O primeiro critério foi escolhido porque a compreensão dos princípios de contagem é fundamental tanto para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico e combinatório quanto para construção dos conceitos de agrupamentos. Por isto, foi verificado se as obras indicam adequadamente os dois princípios de contagem.

O uso do fatorial foi analisado porque em alguns livros didáticos as fórmulas são mais valorizadas que o raciocínio e a estratégia para resolução dos problemas. Neste caso, verificouse nos livros da Tabela 1 se o fatorial foi utilizado como uma ferramenta auxiliar para o cálculo ou foi tratado como um conceito fundamental de análise combinatória.

Em relação aos conceitos de agrupamentos simples, avaliou-se nas obras se os conceitos foram construídos a partir dos conhecimentos prévios (princípios aditivo e multiplicativo de contagem) ou foram definidos por meio de fórmulas matemáticas. Isto porque a utilização de conhecimentos já assimilados pode favorecer a compreensão por parte dos alunos.

No último tópico da análise, observou-se a existência de exercícios que exijam do aluno a aplicação do raciocínio combinatório na solução de situações-problema. Este critério foi adotado porque é comum o aluno saber desenvolver um algoritmo, mas não conseguir aplicá-lo em situações-problema (Dante, 1998). Em muitos casos, isso se deve à forma como esses problemas estão dispostos nos livros didáticos e, consequentemente, são trabalhados pelos professores em sala de aula.

A partir da análise dos livros adotados nas escolas públicas, propôs-se uma alternativa didática para o ensino de análise combinatória na segunda série do ensino médio que enfatiza o desenvolvimento do raciocínio lógico e combinatório em detrimento da memorização de fórmulas. Tal proposta foi fundamentada na teoria de resolução de problemas de Polya (1995) e nas orientações do PCN (2000).

3 Análise dos livros didáticos

A Tabela 2 apresenta os principais aspectos observados nos livros didáticos avaliados, Tabela 1. Nos três livros a abordagem do conteúdo de análise combinatória foi iniciada com aplicações do princípio multiplicativo (também chamado de princípio fundamental da contagem - PFC), seguido de sua definição e de exercícios de aplicação. Os autores dos livros A e B fizeram menção ao princípio aditivo de contagem e apresentaram um exemplo resolvido de aplicação do mesmo, sendo que o segundo também se mostrou interessado em fazer o aluno discernir em que momento utilizar cada um dos princípios, ou os dois simultaneamente. O que não foi seguido pelo autor da obra C que nem sequer mencionou o princípio aditivo (Tabela 2), que tem grande valor para a resolução vários problemas de combinatória.

Uma característica comum observada nas obras A, B e C foi a definição do fatorial de um número natural logo após a apresentação do PFC (Tabela 2). Igual também foi o tratamento que os autores deram ao fatorial como ferramenta de representação de cálculos muito extensos e consecutivos que são característicos em muitos problemas de contagem. Observou-se que a obra B se mostrou bastante tímida quanto ao tratamento do fatorial de um número, apenas definindo-o e apresentando um único exemplo resolvido do mesmo, sem nenhuma outra atividade após isto.

Entende-se que não se deve pautar o ensino de análise combinatória apenas sobre as estruturas algébricas constituídas a partir do conceito de fatorial de um número natural, porém, deve-se permitir ao aluno que experimente os desdobramentos que tal conceito lhe permitem ter, fornecendo-lhe exercícios.

Nos livros didáticos A e C observou-se que a conceituação dos tipos de agrupamentos simples foi seguida por sua formulação matemática (Tabela 2). Esta prática mostra-se bastante danosa ao aprendizado do raciocínio combinatório, pois induz o aluno ao simples uso de modelos matemáticos sem a devida compreensão do contexto. A solução dos problemas combinatórios a partir da construção de estratégias de resolução e da revisão de métodos e modelos seria uma alternativa didática mais adequada. O autor do livro B, apesar de tentar, muito timidamente, constituir uma discussão acerca do conceito de arranjo e combinação a partir do que foi colocado acima, pecou pelo excesso de objetividade ao tratar da noção de permutação. Vale ressaltar a necessidade de se construir textos minuciosamente explicativos e construtivos quando se for tratar de análise combinatória, pois este conteúdo se mostra extremamente subjetivo quando raciocinado pelo aluno, deve-se desenvolver nele o pensamento combinatório e não apenas lançar ao vento para ser apanhado.

Todas as obras analisadas apresentam uma lista de exercícios de fixação logo após a discussão de cada agrupamento específico. Porém a metodologia utilizada pelos autores dessas obras não favorece a aprendizagem, uma vez que o aluno não exercita a discriminação entre os diferentes tipos de agrupamentos e, portanto, não aprende a identificá-los. O ideal seria um conjunto de questões mistas, ou seja, evolvendo todos os agrupamentos aleatoriamente de forma que o aluno precise caracterizar cada questão e avaliar a melhor estratégia de resolução.

Tabela 2: Comparação entre os livros didáticos avaliados de acordo com os principais aspectos considerados na metodologia deste trabalho.

Obra	Princípio Multiplicativo de Contagem	Princípio Aditivo de Contagem	Fatorial de um Número Natural	Agrupamentos Simples	Exercícios
A	Define	Não define	Define antes dos agrupamentos simples	Define e associa seu cálculo ao uso do fatorial	Apenas para fixação do tópico estudado.
B	Define	Define	Define antes dos agrupamentos simples	Define e associa seu cálculo ao uso do fatorial	Apenas para fixação do tópico estudado.
C	Define	Não define	Define antes dos agrupamentos simples	Define e associa seu cálculo ao uso do fatorial	Apenas para fixação do tópico estudado.

Fonte: o autor

4 Proposta didática

Considerando a análise crítica realizada dos livros adotados nas escolas públicas, foi construída uma proposta didática que visa favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório em estudantes do ensino básico através de situações-problema envolvendo os dois princípios básicos de contagem (aditivo e multiplicativo). Esta proposta está disposta na ordem lógica descrita a seguir:

(I) Apresentação de problemas simples, que exijam dos alunos a determinação do número de respostas possíveis. Após esta etapa inicial, define-se os princípios aditivo e multiplicativo de contagem.

(II) Conjunto de problemas abordando os agrupamentos ordenados e não ordenados. Estes servirão como base para a definição de cada um dos agrupamentos simples (Permutação, Arranjo e Combinação).

(III) Definição do fatorial de um número natural e a formalização dos agrupamentos através de modelos matemáticos.

Vale ressaltar que esta proposta está baseada nos conteúdos e habilidades exigidos de um estudante do ensino básico, mais especificamente da segunda série do ensino médio. Além disto, a sequência didática indicada é diferente das propostas dos livros didáticos hoje autorizados pelo Ministério de Educação e que foram distribuídos nas escolas da rede pública do país.

4.1 Os princípios de contagem

Inicialmente, utilizando-se apenas situações-problema, é possível conduzir os educandos à compreensão dos princípios de contagem. A seguir são apresentados dois exemplos:

<u>Situação 01</u>: Ricardo fará um programa cultural com sua namorada, mas infelizmente, fazendo uma pesquisa de preços, percebeu que só teria condições de assistir a um filme ou a uma peça de teatro. Sabendo que existem cinco filmes diferentes e três peças diferentes em cartaz, calcule o número de opções distintas de entretenimento para Ricardo e sua namorada.

Resolução: Os filmes podem ser representados por F1, F2, F3, F4 e F5 e as peças por P1, P2 e P3. Lembrando que Ricardo só pode assistir a um filme ou a uma peça, temos as seguintes opções:

- *F1 ou F2 ou F3 ou F4 ou F5: cinco opções de filmes;*
- *P1 ou P2 ou P3: três opções de peças.*

Logo, Ricardo e sua namorada têm oito opções distintas de entretenimento.

Situação 02: Ricardo fará um programa cultural com sua namorada, mas fazendo uma pesquisa de preços percebeu que só teria condições de assistir a um filme e a uma peça de teatro. Sabendo que existem cinco filmes diferentes e três peças diferentes em cartaz, calcule o número de opções distintas de entretenimento para Ricardo e sua namorada.

Resolução: Os filmes podem ser representados por F1, F2, F3, F4 e F5 e as peças por P1, P2 e P3. Agora, Ricardo pode assistir a um filme e a uma peça. A distribuição a seguir indica todas as possibilidades:

	F1	***F2***	***F3***	***F4***	***F5***
P1	*P1 F1*	*P1 F2*	*P1 F3*	*P1 F4*	*P1 F5*
P2	*P2 F1*	*P2 F2*	*P2 F3*	*P2 F4*	*P2 F5*
P3	*P3 F1*	*P3 F2*	*P3 F3*	*P3 F4*	*P3 F5*

Logo, Ricardo e sua namorada possuem quinze opções distintas de entretenimento.

A primeira situação foi resolvida com a simples adição do número de opções distintas de entretenimento, enquanto o segundo problema exigiu a multiplicação do número de filmes pelo número de peças de teatro. A partir destes dois exemplos é possível definir os dois princípios de contagem:

1º) Princípio Aditivo: Sejam duas hipóteses distintas de ocorrência de um evento, onde estas possuem **m** e **n** opções diferentes. Então, o evento pode ocorrer de **m + n** maneiras diferentes.

2º) Princípio Multiplicativo: Considere um evento realizado em duas etapas, onde estas podem ocorrer de **m** e **n** maneiras distintas. Então o evento pode ser realizado de **m . n** formas diferentes.

Os dois princípios descritos anteriormente podem ser estendidos para o caso de três ou mais hipóteses/etapas. É importante ressaltar que as duas situações apresentadas são apenas exemplos de problemas que envolvem os princípios aditivo e multiplicativo. O professor deve sugerir situações com diversos contextos para que o aluno entenda claramente os conceitos ao invés de apenas memorizá-los. A associação dos princípios aditivo e multiplicativo aos conectivos ou e e, respectivamente, pode favorecer a compreensão por parte do aluno, visto que remetem às ideias de hipóteses e etapas, respectivamente.

4.2 Agrupamentos ordenados e os não-ordenados

Os conceitos de agrupamentos ordenados e não-ordenados também podem ser apresentados por meio de situações-problema, como os dois exemplos indicados a seguir:

Situação 03: Três sócios, Carlos, Alan e Danilo, pretendem nomear seu negócio com as iniciais de seus nomes (C, A, D). Liste todas as possibilidades de nomes para o empreendimento.

Resolução: As possíveis sequências de nomes para a empresa são:

CAD	*ADC*	*DAC*	*CDA*	*ACD*	*DCA*

Logo, há seis possibilidades de nomes para a empresa.

Situação 04: Um condomínio é composto por cinco condôminos: Alan, Bruna, Carlos, Deise e Éder (a, b, c, d e e). Precisamos formar uma comissão que irá administrar o condomínio. Quantas comissões de três indivíduos podemos formar?

Resolução: As possíveis comissões que poderão ser constituídas são representadas por todos os subconjuntos do conjunto {a,b,c,d,e}.

{a,b,c} {a,b,d} {a,b,e} {a,c,d} {a,c,e} {a,d,e} {b,c,d} {b,c,e} {b,d,e} {c,d,e}

Portanto dez comissões poderão ser formadas.

Na situação 03 os diferentes nomes da empresa foram compostos pela simples mudança de ordem das letras. Trata-se de um exemplo de agrupamento ordenado, onde as possibilidades se diferenciam pelas possíveis sequências dos mesmos elementos. Por outro lado, na situação 04, as comissões formadas pelos componentes de um condomínio constituem um agrupamento não-ordenado, visto que a ordem dos mesmos não é relevante. Nos agrupamentos não-ordenados, os conceitos de conjuntos e subconjuntos são utilizados para a resolução dos problemas. Desta forma, os agrupamentos podem ser classificados como:

1º) Agrupamentos Ordenados: São aqueles formados a partir de sequências de elementos de um conjunto.

2º) Agrupamentos Não-Ordenados: São aqueles formados por subconjuntos de um conjunto.

4.2.1 Tipos de agrupamentos simples

Com base nos conceitos de agrupamentos ordenados e não-ordenados, e em situações-problema, como as apresentadas abaixo, serão definidos os agrupamentos simples:

Situação 05: Carlinhos tirou uma foto com seu pai e sua mãe para a confecção de um quadro comemorativo. Mas antes de escolher uma foto definitiva, resolveram tirar fotos distintas apenas permutando suas posições. Determine quantas fotos diferentes poderiam ser tiradas.

Resolução: Cada componente da família na foto é um elemento da sequência. A alteração da posição dos componentes resulta em uma sequência distinta, logo, uma foto diferente. As seis fotos possíveis são representadas pelas sequências a seguir:

Pai, Mãe, Carlinhos	*Pai, Carlinhos, Mãe*	*Carlinhos, Pai, Mãe*
Mãe, Pai, Carlinhos	*Mãe, Carlinhos, Pai*	*Carlinhos, Mãe, Pai*

Situação 06: Quantos são os possíveis resultados para os três primeiros colocados de uma corrida onde participam apenas quatro competidores?

Resolução: Representando os competidores pelas letras A, B, C e D, as possíveis sequências de três participantes são:

(A, B, C)	*(A, C, B)*	*(B, A, C)*	*(B, C, A)*	*(C, A, B)*	*(C, B, A)*
(A, B, D)	*(A, D, B)*	*(B, A, D)*	*(B, D, A)*	*(D, A, B)*	*(D, B, A)*
(A, C, D)	*(A, D, C)*	*(C, A, D)*	*(C, D, A)*	*(D, A, C)*	*(D, C, A)*
(B, C, D)	*(B, D, C)*	*(C, B, D)*	*(C, D, B)*	*(D, B, C)*	*(D, C, B)*

Portanto, existem vinte e quatro possibilidades diferentes para os três primeiros lugares.

Situação 07: Quais são os possíveis subconjuntos de três elementos que podem ser formados a partir do conjunto {1,2,5,8}?

Resolução: {1,2,5} {1,2,8} {1,5,8} {2,5,8}

Neste caso, como a ordem dos elementos do conjunto não é relevante, existem apenas quatro subconjuntos de três elementos.

Os agrupamentos simples podem ser trabalhados a partir dos conceitos de agrupamentos ordenados e não-ordenados. Na solução da situação 05 foram construídos agrupamentos ordenados (sequências) com todos os elementos. Esse tipo de agrupamento é denominado de Permutação Simples e é expresso pela notação P_n (lê-se: permutação simples de n elementos).

No caso da situação 06, foi necessária a construção de todos os agrupamentos ordenados contendo apenas três elementos dentre os fornecidos. Esse tipo de agrupamento é chamado de Arranjo Simples e sua notação é $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo simples de n elementos tomados p a p).

Finalmente, na solução da situação 07 foram listados todos os subconjuntos de três elementos do conjunto dado. Este tipo de agrupamento é denominado Combinação Simples, cuja notação é $C_{n,p}$ (lê-se: combinação simples de n elementos tomados p a p).

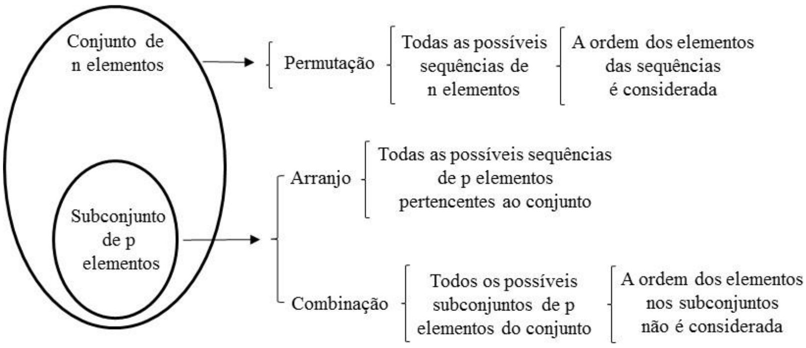
Em resumo, os agrupamentos simples podem ser classificados em três tipos:

(i) A Permutação Simples: forma diferentes sequências com os mesmos elementos.

(ii) O Arranjo Simples: forma sequências a partir dos elementos de um conjunto.

(iii) A Combinação Simples: forma subconjuntos a partir dos elementos de um conjunto.

Figura 1: Diagrama esquemático da relação entre os tipos de agrupamento



Fonte: o autor

O diagrama apresentado na Figura 1 ilustra a diferença entre estes três tipos de agrupamentos. Como pode ser observado, a permutação envolve problemas onde todos os elementos do conjunto precisam ser considerados. Por outro lado, nos casos relacionados ao arranjo e combinação apenas um grupo de elementos é considerado.

4.2.2 Cálculo da quantidade de agrupamentos

O cálculo da quantidade de permutações, arranjos e combinações pode ser realizado utilizando como ferramenta os princípios de contagem, como indicado a seguir:

Permutação Simples : Como indicado na situação 05, cada posição na fotografia (sequência) pode ser ocupada por um dos elementos da família:

1ª posição	2ª posição	3ª posição

A primeira posição apresenta três opções, a segunda duas e a terceira apenas uma. Segundo o princípio multiplicativo de contagem o número de sequências será 3 . 2 . 1 = 6.

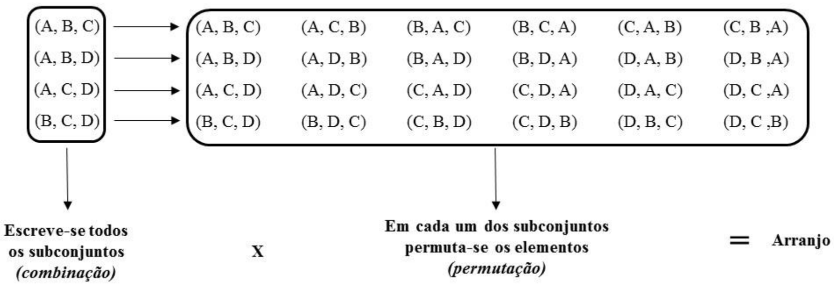
Arranjo Simples : Como ilustrado na situação 06, cada uma das três posições no pódio pode ser ocupada por um dos quatro corredores:

1º colocado	2º colocado	3º colocado

Apesar de serem quatro competidores, só os três primeiros são desejados (o que diferencia o arranjo da permutação). Assim, pelo princípio multiplicativo de contagem, o número de sequências distintas de três primeiros colocados será 4 . 3 . 2 = 24.

Combinação Simples : O cálculo do número de combinações também pode ser justificado por meio da estrutura utilizada para a solução da situação 06, como indicado na Figura 2.

Figura 2: Relação entre os agrupamentos simples



Fonte: o autor

A partir da Figura 2 observa-se uma importante relação entre os agrupamentos:

$$Combinação\ x\ Permutação = Arranjo$$

Como o objetivo é calcular o número de combinações simples, isola-se o termo da combinação: $Combinação = \frac{Arranjo}{Permutação} \leftrightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}$

Desta forma, conclui-se que a combinação de n elementos tomados p a p corresponde ao quociente entre o arranjo de n elementos tomados p a p pela permutação de p elementos.

Aplicando no caso da situação 07 obtém-se o número de subconjuntos igual a $\frac{4\ .3\ .2}{3\ .2\ .1} = 4$

Nesta sequência didática apresentada, os conceitos de agrupamentos simples e seus cálculos foram desenvolvidos sem referência nenhuma à definição de fatorial de um número natural.

4.3 Fatorial de um número natural

Ao definir o fatorial de um número natural, convém limitar-se ao conceito formal do mesmo, sem comparações que poderão futuramente incorrer em erros de interpretação. O Fatorial de um número natural n ($n!$ → lê-se: n fatorial ou fatorial de n) é o valor resultante do produto decrescente de todos os números naturais a partir de n até o número 1:

$$n! = n.(n-1).(n-2).\ldots.2.1 \text{ ; onde por convenção adota-se } 1! = 1 \text{ e } 0! = 1.$$

A partir da definição do fatorial, pode-se escrever modelos matemáticos para o cálculo dos agrupamentos simples:

Permutação	Arranjo	Combinação
$P_n = n!$	$A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,.(n-p)!}$

As demonstrações de tais expressões devem também ser realizadas pelo professor durante o desenvolvimento do conteúdo. Vale ressaltar que esta proposta didática deve ser acompanhada de listas de exercícios de diversos contextos para que os educandos possam fixar os assuntos abordados.

5 Considerações finais

A análise de livros didáticos indicou pontos críticos comuns que dificultam a construção do conhecimento por parte dos alunos. Na maioria dos casos, observou-se: (a) omissão do princípio aditivo; (b) pouca ênfase ao princípio multiplicativo; (c) estímulo à classificação dos diversos tipos de problemas e (d) indução à aplicação direta de equações matemáticas ao invés do uso do raciocínio lógico.

Para contornar estes problemas, primeiramente foram indicadas atividades simples para o fortalecimento dos princípios aditivo/multiplicativo. Em seguida, as definições de agrupamentos ordenados e não-ordenados foram introduzidas por meio de situações-problema, favorecendo a compreensão dos conceitos de agrupamentos simples.

Contrapondo-se ao apresentado na literatura analisada, nesta abordagem alternativa, os conceitos de permutação, arranjo e combinação foram gradativamente construídos a partir do raciocínio lógico e do conhecimento das definições de conjuntos e sequência, ao invés da simples memorização e utilização de fórmulas. Por isto, a definição do fatorial de um número natural foi adiada para o final da sequência dos conteúdos, visto que o fatorial é apenas uma ferramenta para o cálculo do número de agrupamentos. Esta alternativa didática, favorece o trabalho do professor e o desenvolvimento cognitivo do aluno, ampliando sua capacidade de compreensão, análise e correlação dos conceitos de combinatória com os problemas do cotidiano.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. **Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria.** Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática).** Brasília: MEC/SEMT, 2000.

BRASIL, Ministério de Educação e Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos : PNLD 2018 : Matemática.** Brasília: MEC/SEB, 2017.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Pioneira, 1976.

PERRONE, A. L.; OIKAWA, S. M.; MAOLA, F. A. **Aprendizagem de Análise Combinatória nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental.** Anais da 58ª Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria, 2013, Campina Grande-PB, p. 01-05, 2013

PESSOA, C. A. S.; SILVA, C. A. da; MATOS FILHO, M. A. S. **Uma análise sobre a resolução de problemas multiplicativos por alunos de 3ª e 5ª série.** Anais do XVII Encontro de Pesquisa Educacional do Norte Nordeste. Belém: UFPA/EPENN,2005.

PESSOA, C. A; BORBA, R. E. **Resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos do 6º ao 9º ano.** Anais do 19º Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste (EPENN), João Pessoa - PB, pp. 1-17, 2009.

POLYA, G. A. **Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Interciência. 1995.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para laEnseñanza de la Probabilidad.** Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

SCHLIEMANN, A. **A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária.** In: Carraher, T.N; Carraher, D. W. & Schliemann, A. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas.** Análise Psicológica, 1,1986, pp.75.