A UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO GEOGEBRA PARA DISPOSITIVOS MÓVEIS: ANÁLISE GEOMÉTRICA DO TÓPICO DE LIMITE

Elizabeth do Socorro Silva Ribeiro [1]

Marine Crisley dos Santos Oliveira [2]

Mônica Ribeiro Monteiro [3]

Vitor Mauro de Andrade Frazão [4]

Gustavo Nogueira Dias [5]

RESUMO

O presente artigo tem por objetivo utilizar o aplicativo GeoGebra CAS para dispositivos móveis no desenvolvimento de uma atividade envolvendo o tópico “Limite” da disciplina Cálculo. A justificativa pauta-se na ideia de valorizar uma abordagem geométrica em detrimento da abordagem algébrica, aproximando-se, assim, da origem do estudo da disciplina. Para iniciarmos a pesquisa, aplicamos um questionário com alunos (professores) da turma de especialização no ensino de matemática, no ano de 2019, de uma faculdade de Belém. A pesquisa objetivou verificar, nesse público, como o tópico “Limite” da disciplina Cálculo foi apresentado para os mesmos durante o período de suas graduações no curso de Licenciatura em Matemática. Com os dados coletados, propomos uma atividade para o ensino de Limite com o apoio do aplicativo GeoGebra CAS a ser desenvolvido com os dispositivos móveis dos próprios investigados.

Palavras-chave: Limite, Geogebra CAS, Cálculo, Aplicativo, Dispositivos Móveis.

[1]Graduada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará - UEPa, elizabeth_uepa@hotmail.com;

[2]Graduada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará - UFPa, santosmarine12@gmail.com;

[3]Graduada pelo Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará - UFPa, monicamonteiro77@outlook.com.br;

[4]Especialista pela Docência para Educação Profissional do Centro Universitário SENAC - Senac, vitorfraz@gmail.com;

[5]Professor orientador: Doutorado, UNR (Universidade Nacional de Rosário). Vínculo Institucional: Escola Ten. Rêgo Barros, gustavonogueiradias@gmail.com.

INTRODUÇÃO

Considerando a história da Matemática, verificamos que o desenvolvimento da mesma se deu a partir da necessidade do homem (a necessidade de contagem favoreceu ao desenvolvimento de um sistema de numeração homogêneo; a necessidade de divisão de terras justificou o surgimento das frações; o filósofo e matemático Tales de Mileto, a partir do chamado dos egípcios desenvolveu um método para calcular a altura das pirâmides). Da mesma forma, a origem do Cálculo está relacionada a necessidade que os gregos enfrentavam para a medição de superfícies objetivando encontrar suas áreas, ou seja, questionamentos que perpassavam pela geometria.

O trabalho que aqui desenvolveremos procura retornar as origens do Cálculo, objetivando uma análise significativa a partir da geometria (com o auxílio do aplicativo Geogebra CAS) para a abordagem do tópico “Limite”, e assim, construir o aspecto algébrico.

Com a experiencia vivenciada na graduação, observamos que a álgebra é aplicada com maior ênfase na referida disciplina, e consequentemente a estrutura geométrica fica estacionada em um segundo plano de prioridade a ser estudada.

Assim, aliaremos os recursos disponíveis – aplicativos, dispositivos móveis – na elaboração de uma atividade, almejando a construção significativa para a aprendizagem do tópico “Limite” a partir da análise geométrica.

Percebemos o desenvolvimento de aplicativos voltados para a educação e a inserção dos dispositivos móveis no ambiente de sala de aula. Agregado a esse fato, é necessário a realização de capacitações digitais que insiram o docente neste ambiente como forma de possibilitá-lo a acompanhar as mudanças temporais, agregando ao seu planejamento de ensino ferramentas que possam vir a prestar um suporte a mais para a aprendizagem do aluno. Vivemos em uma sociedade em constante transformação. Porém, onde tudo parece se desenvolver de uma forma extremamente rápida, a prática docente segue, em muitos casos, a mesma linha de ensino de mais de dois séculos atrás (Santos, 2011).

METODOLOGIA

Como método de investigação realizamos uma pesquisa de campo com os alunos (professores) do curso de especialização do ensino de matemática, turma 2019, de uma faculdade de Belém. A princípio, elaboramos e aplicamos um questionário com perguntas abertas e fechadas, considerando que antes apresentamos ao nosso público alvo da pesquisa um "termo de consentimento livre e esclarecido" em participar da mesma.

A aplicação do questionário objetivou conhecer de que forma a esses sujeitos foi apresentado o tópico "Limite" da disciplina Cálculo durante o período de suas graduações.

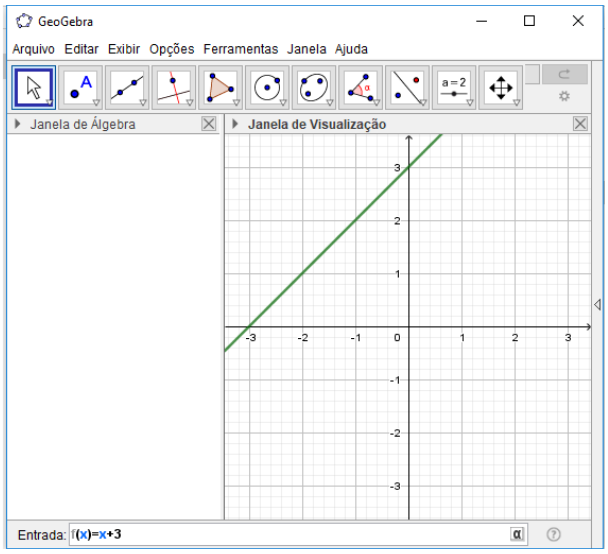
A partir do levantamento das respostas obtidas com a aplicação do questionário, iniciamos a elaboração de uma atividade no aplicativo GeoGebra CAS voltada para a utilização nos dispositivos móveis dos envolvidos na pesquisa (os alunos da especialização), considerando que a maioria detém em suas mãos essa ferramenta e ainda, que a grande parte das unidades de ensino não possuem em suas estruturas laboratório de informática, ou, quando detém, o quantitativo de computadores apresenta-se em um número insuficientes para a quantidades de alunos.

A atividade desenvolvida teve como objetivo privilegiar a análise geométrica do conteúdo em questão, pois, acreditamos que o pensamento geométrico favorecerá a este aluno a atuação na análise e consequentemente uma aprendizagem mais significativa. Objetivamos formalizar a análise geométrica para juntos, construirmos a abordagem algébrica.

DESENVOLVIMENTO

Solicitamos aos colaboradores da pesquisa de campo que instalassem em seus dispositivos móveis a versão "Geogebra CAS".

Em seguida, pedimos que digitassem a função $f(x) = x + 3$, e que pudessem analisar o gráfico que foi plotado.



Após as análises feitas, sobre, por exemplo, qual o tipo de função, se crescente ou decrescente, pontos de intersecção, realizamos o cálculo manual para o valor da função para valores próximos a 4:

Valor de x	Valor de f(x)
3,8	6,8
3,9	6,9
4	7
4,018	7,018
4,12	7,12

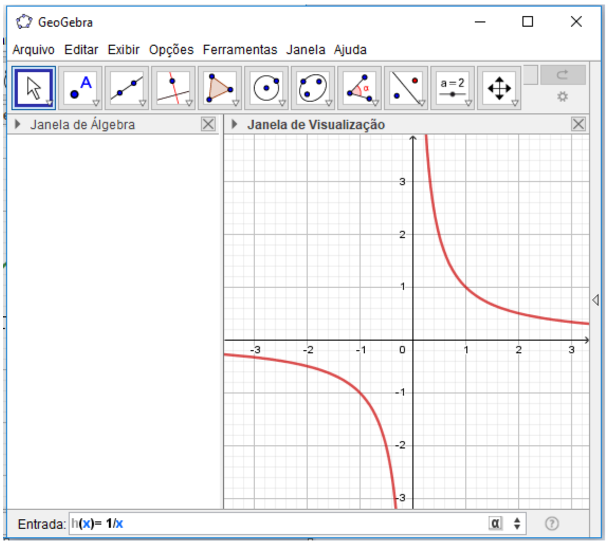
Concluimos que, ao nos aproximarmos da abscissa 4 (o tanto quanto for possível) pela direita ou pela esquerda a função "tende" (aproxima-se) à ordenada 7.

Ao utilizarmos o aplicativo Geogebra CAS e analisando a função dada, calculamos o limite usando o comando:

Limite(função, valor) → $Limite\ (f, 4)$

E chegamos ao resultado 7.

Requesitamos que os participantes digitassem a função $h(x) = \frac{1}{x}$ e que fizessem a plotagem do gráfico. Em seguida, fizemos o seguinte levantamento:



- A medida que nos afastamos da origem (tanto pela direita quanto pela esquerda), a função se aproxima de zero, no entanto, quando ampliamos a área de trabalho do aplicativo, podemos confirmar que a medida que ele vai para o menos e mais infinito a função não é zero;
- Solicitamos que os participantes calculassem o limite tendendo para zero, ou seja , $Limite\ (h, 0)$, tendo como resultado o valor "indefinido"
- Assim como para o "inf" e "Infinito", isto é, $Limite\ (h, Inf)$ e $Limite\ (h, Infinito)$ o aplicativo apresentou como resultado um controle deslizante em um dado intervalo com extremos opostos e quando o acionando percebemos a variação da função a medida que x tende a menos ou mais infinito.

Em continuidade, aplicamos o Teorema de Limites Laterais que diz:

Teorema[6] **:** Seja $X \subset \mathbb{R},\ f: X \rightarrow\ \mathbb{R}$ e $a \in\ X'_+ \cap\ X'_-$. Então existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais $\lim_{x \to a^+} f(x) =\ \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

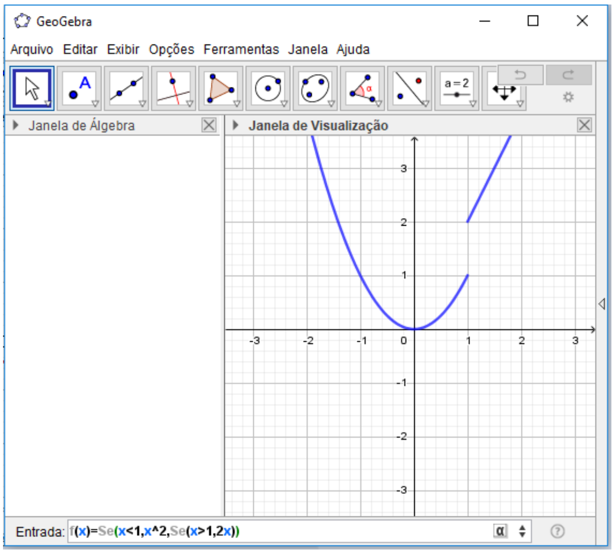
Após comentarmos sobre este Teorema aplicamos uma função para verificarmos a procedencia desta no aplicativo.

Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ se\ \ x < 1 \\ 2x\ \ se\ x > 1 \end{cases}$$

[6] Lima, Elon Lages, Curso de Análise Real; v.1.14.ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura Aplicada, 2014.

Segue os comandos para aplicar na entrada no Geobegra e a plotagem do gráfico:



Solicitamos que calculassem o Limite Inferior e Limite Superior sobre o seguinte comando

$$LimiteInferior(Se(x < 1, x^2, 2x), 1)$$

e

$$LimiteSuperior(Se(x > 1, x^2, 2x), 1)$$

No qual obtemos como resultado:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

Como queríamos provar.

Aplicando o cálculo para entendimento de uma pré definição, temos:

Tomando $f(x) = 2x + 1, L = 5$ e $\varepsilon = 0{,}5$.

Dado um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|2(x) + 1 - 5| < \varepsilon$$

$$|2(x) - 4| < 0{,}5$$

$$|2x - 4| < 0{,}5$$

$$-0{,}5 < 2x - 4 < 0{,}5$$

$$4 - 0{,}5 < 2x < 0{,}5 + 4$$

$$3{,}5 < 2x < 4{,}5$$

$$\frac{3{,}5}{2} < x < \frac{4{,}5}{2}$$

$$1{,}75 < x < 2{,}25$$

Logo $\delta < 0{,}25$

Após a aplicação do exemplo, aplicamos a definição.

Definição: Dada uma função f definida num intervalo aberto e um ponto de acumulação a (pertecente ou não ao intervalo). Diz-se que um número L é o limite de f com x tendendo a a se, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Com o auxílio da definição vamos mostrar que:

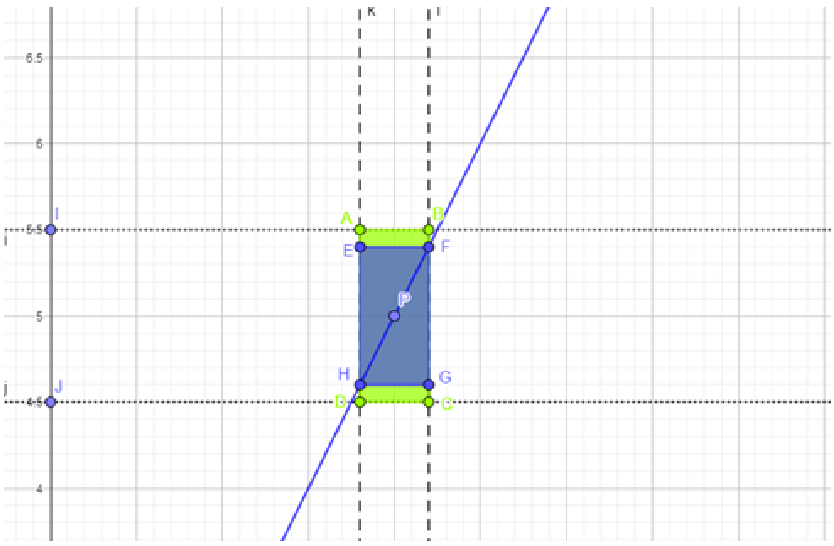
$$\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5 \; \varepsilon = 0{,}5$$

Digitamos no aplicativo geogebra CAS a função $f(x) = 2x + 1$ e em seguida o ponto $P(2{,}5)$ de acordo com a definição e com o valor dado de $\varepsilon = 0{,}5$, devemos encontrar um δ que satisfaça a definição.

Assim temos que δ se refere ao eixo das abscissas e ε ao eixo das ordenadas.

No Geogebra vamos marcar o intervalo nas ordenadas de $4.5 < P_y < 5.5$ e, de acordo com o δ encontrado de forma algébrica, marcaremos o intervalo $1.8 < P_x < 2.2$.

Assim, teremos os pontos $A(1.8{,}5.5)$, $B(2.2{,}5.5)$, $C(2.2{,}4.5)$, $D(1.8{,}4.5)$ e fechamos assim o retângulo $ABCD$. Em seguida, com os valores de δ aplicado na função dada encontramos e marcamos os pontos $E(1.8{,}5.4)$, $F(2.2{,}5.4)$, $G(2.2{,}4.6)$, H(1.8,4.6) e fechamos o retângulo $EFGH$ e alteramos a cor (para diferenciarmos os dois retângulo), podemos verificar, desta forma, que o retângulo com relação a δ está "dentro" do retângulo que relaciona ε e δ, mostrando assim, que o valor de δ encontrado através da definição com o valor de ε dado é válido. Como mostra a figura abaixo:



RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como fundamentação experimental para a contrução deste artigo, aplicamos nos dias 18 e 19/05/2019 com a turma de Especialização no Ensino de Matemática de uma faculdade particular de Belém, um questionário com perguntas abertas e fechadas referentes a indagações pessoais e acadêmicas do assunto tema desta pesquisa: Limite.

Aplicamos 21 (vinte e um) quetionários, porém, obtivemos o retorno de apenas 11 (onze) deles, que assim foram analisados:

- **Faixa Etária:**

IDADE	QUANTIDADE
22 a 29	4
30 a 39	4
40 a 49	2
50 a 59	-
60 anos ou mais	1
TOTAL	**11**

Fonte: Pesquisa de Campo/2019.

- **Sexo**

SEXO	QUANTIDADE
Masculino	9
Feminino	2
TOTAL	**11**

Fonte: Pesquisa de Campo/2019.

- **Ano de Formação**

FORMAÇÃO	QUANTIDADE
1982	1
2011	1
2013	1
2015	1
2016	1
2017	1
2018	5
TOTAL	**11**

Fonte: Pesquisa de Campo/2019.

OBS.: O entrevistado com formação no ano de 1982 é Bacharel em Meteorologia.

- **Instituição de Ensino**

ORIGEM	QUANTIDADE
Pública	9
Privada	2
TOTAL	11

Fonte: Pesquisa de Campo/2019.

Solicitamos aos nossos colaboradores que definissem o que seria o "Limite de uma Função" e verificamos que para 05 (cinco) dos entrevistados o limite é o comportamento de uma função, observe:

"É o estudo do comportamento de uma função em um determinado intervalo quando o X tende a um número"

"Dada uma função, o limite é a medida que seu argumento, isto é, um dador se acerto valor"

"É como uma função se comporta quando tende a um determinado valor"

"Descreve o comportamento de uma função a medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor"

"É o quanto cresce ou descreve o valor de uma função em relação a um outro valor determinado previamente. Está intimamente associado à ideia de Derivada de uma função"

Ao analisarmos 03 (três) questionários e comparamos as respostas obtidas com o ano de formação dos que o responderam em (2018), observamos respostas como:

"São valores que se aproximam de um determinado ponto da abscissa, mas que não seja igual a ele <esboçou um gráfico>"

"Limite de uma função é o ponto de aproximação seja pela esquerda ou direita, no eixo das abscissas"

"É quando um valor tende pela direita ou esquerda, mas nunca chegará a tal valor"

Um dos participantes procurou "algebrizar" a resposta para a indagação:

"Dada uma função em um intervalo aberto do tipo $f(x) \rightarrow i^2$ em que $\lim_{x \to a} L$"

Dois dos participantes ou não responderam, ou afirmaram não lembrar.

Também solicitamos, no questionário, que fossem calculados e representados geometricamente o Limite de duas funções, sejam elas:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x-2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} x^2$$

No processo de coleta de dados, verificamos que apenas 03 (três) pesquisandos representaram graficamente, conforme solicitado, as funções. Porém, apenas 02 (dois) destes fez a representação geométrica adequadamente. É importante destacar que todos obtiveram o resultado algébrico esperado para o cálculo dos limites das funções apresentadas e que para a primeira função $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, 05 (cinco) pessoas verificaram primeiramente a indeterminação da função como fora apresentada, ou seja, substituíram na função a incógnita x por 2 como se segue:

$$\frac{x^2-4}{x-2}$$

Para $x = 2$, fizemos:

$$\frac{2^2-4}{2-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

E somente depois, aplicaram a fatoração de polinômios, conforme segue:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

Substituindo o valor de x por 2 chegando em 4 (Limite).

Ao indagarmos sobre como foi o ensino e por consequência o aprendizado do assunto LIMITE durante o período da graduação, obtivemos respostas como:

“Iniciou-se como a definição de limite de funções, seguida de diversos exercicios.”

“Foi ensinado de forma tradicional, com aula expositiva, seguido de teoria, exemplos e exercício”

Quatro dos entrevistados consideraram o ensino como “bom” ou “satisfatório”, sem esboçar qualquer outro comentário. Outros quatros informaram que o tema foi abordado superficial, ocasionano dúvidas.

Quando questionamos como esse tópico que inicia o estudo da disciplina Cálculo poderia ser abordado, obtemos tais respostas:

“Tendo em vista que é um tópico impoortante, deveria ser visto com mais ênfase”

Três dos entrevistados afirmam que o assunto deveria ser abordado com maiores detalhes e aplicações (práticas) que se aproxime do cotidiano. Para 06 (seis) deles, deveriam ser utilizados recursos tecnológicos, como por exemplo, o uso de aplicativos/software para o ensino do tópico, assim:

“Poderia ser abordado usando um software matemático. Deste modo, seria capaz de tornar o assunto menos abstrato, obtendo assim uma facilidade no cálculo e na construção dos gráficos das funções”

Depois de aplicarmos o questionamento, desenvolvemos com os mesmos entrevistados uma oficina que objetivava utilizar o aplicativo GeoGebra para dispositivos móveis (Geogebra CAS) para o ensino de limite com uma abordagem Geométrica. Procurando dessa forma, experimentar uma metodologia de ensino que propicie a participação ativa do educando na aprendizagem desse conteúdo, partindo da análise gráfica para a algébrica, como descreveremos no desenvolvimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo inicial, elaborar uma atividade/oficina para o assunto da disciplina Cálculo, que priorizasse partir da análise geométrica para a algébrica, propiciando a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento. Com fundamentação experimental, aplicamos um questionário sobre o tema com professores (alunos da especialização para o ensino de matemática), tal questionário evidenciou a necessidade de mudança de postura dos professores no ensino do conteúdo de Limites, e com o auxilio de aplicativos como o GeoGebra CAS (que possibilitou a análise geométrica) e os dispositivos móveis é possível pensar no processo de ensino e de aprendizagem significativo.

REFERÊNCIAS

Lima, Elon Lages, Curso de Análise Real; v.1.14.ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura Aplicada, 2014.

Ávila, Geraldo Severo de Souza, Análise Matemática Para Licenciatura, 3ª Edição e revista ampliada, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2018.

Santos, Marcelo Antônio das. Novas Tecnologias no Ensino de Matemática: possibilidades e desafios, 2011.

ecalculo.if.usp.br/historia/historia_integrais.htm acesso em 06/05/2019 às 18:44h;

Richit, Andriceli; Farias, Maria Margarete do Rosário – República Dominicana: Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologia Digitais: Perspectivas de Exploração no Software GeoGebra, 2013.