

A ARTE DA MATEMÁTICA: APRESENTAÇÃO DE UMA PROPOSTA DE ESTUDO NA GEOMETRIA COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Marcos Paulo Mesquita da Cruz ¹
Ivan de Oliveira Holanda Filho ²

RESUMO

O presente artigo tratou do desenvolvimento de uma proposta alternativa de estudo a partir de uma questão da Obmep do ano de 2017 primeira fase, nível três com assistência do software GeoGebra na elaboração das imagens. A questão aborda o assunto de Geometria Plana que possibilitou uma riqueza em número de soluções envolvendo assuntos como Semelhança de Triângulo, Teorema de Pitágoras, Trigonometria e etc, estudados nas escolas de ensino Fundamental e Médio. Neste contexto, objetivou-se mostrar as informações sobre o ensino da matemática, Obmep e a importância da tecnologia educacional. Constatou-se que o GeoGebra é uma ferramenta que proporciona o ensino da matemática e que é necessário buscar mecanismos de ensino que possibilitem o aprendizado em sala de aula. Por fim, o artigo nos relevou nesta pesquisa que existia a possibilidade de um maior aprofundamento no estudo, então, foi elaborado, pelos mesmos autores deste artigo, o livro - GeoGebra: Soluções na Geometria - que se desenvolve com as temáticas deste trabalho apresentado.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Geometria, GeoGebra, Tecnologia e Soluções.

INTRODUÇÃO

Na atualidade, o ensino nas escolas públicas e particulares sofre por profundas transformações em função da adequação das melhores propostas de aprendizagem. A tarefa passa a ser um desafio quando a realidade das escolas detém uma grande heterogeneidade pelas condições de trabalho, as estruturas físicas, as tecnológicas empregadas e a preocupação na preferência de método mais interessantes para lecionar.

No dia 05.12.2018 foi apresentada uma nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que está em fase de homologação e que prevê apenas matemática e português como sendo obrigatórias nos 3 anos. Nesta mesma data foi anunciado que as escolas poderiam escolher 40% da carga horária do ensino médio e os outros 60% serão estabelecidos pela BNCC. Observa-se que todas essas mudanças ocorridas no ensino médio são por diversas razões. A principal delas é o desinteresse do jovem por esse modelo atual, dado que o conjunto de 13 disciplinas obrigatórias levam ao conhecimento superficial das matérias e o desgosto por assistir aulas de assuntos que o jovem possui pouca afinidade.

¹ Mestre em Economia Rural (UFC), Bacharel em Ciências Contábeis (UECE) e em Engenharia Metalúrgica (UFC). Professor de cursos técnicos e escolas particulares de ensino, marcos_paulo_mesquita@hotmail.com;

² Pós-Graduação em Ensino de Matemática (UNIATENEU), Licenciado em Matemática (UECE). Professor da Rede Básica de ensino em Maracanaú e do estado do Ceará, ivanfilho@ymail.com.

Nesse quadro, apresentam-se gradualmente o uso de softwares e aplicativos como uma possibilidade eficiente para propagar o ensino de matemática, por exemplo, em assuntos de geometria que facilitam a aprendizagem de álgebra, a interpretação de problemas e figuras. Compreende-se que a geometria é a ciência que estuda o espaço, pois trabalha com formas e medições, sendo uma ferramenta importante para diversas áreas e de grande significativa para os alunos desenvolverem suas aptidões, conceitos e o seu raciocínio geométrico (ROGENSKI; PEDROSO, 2007).

As experiências da prática pedagógica mostram comuns as dificuldade de alunos em solucionarem problemas quando não possuem a base de geometria. Isso é comprovado em assuntos de geometria espacial, onde o cálculo de áreas e volumes não são tão bem compreendidos entre os alunos. Muitas vezes, o descompasso do ensino são vindas da dificuldade não suprida do ensino fundamental em não se trabalhar estruturalmente o ensino de forma conexa com a didática pedagógica da matemática com as demais áreas de conhecimento (DZIADZIO; VAN KAN, 2016).

Neste contexto, o presente estudo se propõe na solução de uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) por meio de duas possibilidades distintas, despertando a curiosidade e questionamento de quantas formas distintas seria possível resolver a questão. Quais os assuntos que poderiam resolvê-la? O número de soluções seria alto por meio da Geometria?

Na organização do trabalho, o mesmo está dividido em mais quatro seções, além da introdução. Na seção metodologia faz-se uma apresentação do tema desenvolvido e como será apresentado. Logo em seguida, na seção desenvolvimento apresenta-se abordagem dos principais tópicos para o estudo e, por fim, apresentam-se os resultados e discussões, considerações finais e as referências.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada foi um estudo específico na solução de uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Obmep do ano de 2017 primeira fase, nível três com assistência do software GeoGebra na elaboração das imagens. No próprio site da Obmep encontra-se a solução e o vídeo sobre a questão discutida que foi a 13ª da prova. A prova é encontrada no link: http://www.obmep.org.br/provas_static/pfln3-2017.pdf

A ideia desenvolvida foi por prolongamentos até a formação de um triângulo equilátero e, a partir disso, remover as áreas acrescentadas para a formação do triângulo equilátero e, assim, se obter a área do quadrilátero pedido na questão. Em Sessa (2009, p. 17) pode-se fazer uma reflexão sobre a técnica de adição de áreas:

Essa consideração geométrica da operação “produto” atravessa a matemática desde a Antiguidade até Descartes (1596-1650) e nos leva a considerar unicamente adições que envolvam objetos da mesma “dimensão”: não posso somar [a área de] um quadrado a [o comprimento de] um segmento, mas sim [área de] um quadrado a [área de] um retângulo. É o que se conhece como princípio da homogeneidade, que regerá o trabalho algébrico de suas origens até o grande salto que se produz com a geometria cartesiana.

Então, apresenta-se a solução de duas maneiras distintas de soluções: a primeira trata-se da solução oficial exibida pela Obmep, enquanto, a segunda sobre o assunto de *Teorema da Bissetriz Externa*.

DESENVOLVIMENTO

A importância da matemática

O ensino da matemática possui um valor imensurável para a vida de uma pessoa. O desenvolvimento do raciocínio dedutivo, a estruturação do pensamento, o modo de processar as ideias para a solução de um problema e a presença nas diversas atividades humanas são alguns exemplos da maneira que o aprendizado desta disciplina é benéfico para um aluno e a sociedade no geral.

Em contraparte, muitos conteúdos de matemática não possuem planejamento pedagógico adequado para uma melhor didática, por isso, alguns temas não são esclarecidos e compreendidos em sala de aula no ensino fundamental (PIRES, 1993, p. 17). Nesse cenário, as discussões de Lorenzato (1995, p. 5) e Duval (1988, p. 57) frisam que os problemas de Geometria apresentam uma grande originalidade em relação a muitas outras tarefas que podem ser propostas aos estudantes, possibilitando a contextualização e interdisciplinaridade para aplicação em outros tópicos matemáticos.

As dificuldades em ensinar, muitas vezes, passa pela relação do professor com o saber matemático e de sua experiência profissional. A primeira problemática que se encontra é que muitos professores do ensino fundamental não possuem os conhecimentos necessários na Geometria e não sabem compactuar em suas atividades pedagógicas. A segunda razão deve-se

a falta de material didático eficiente deixando entendível que, pela falta de abordagem correta em sala de aula, o fracasso da geometria e o déficit no ensino penduram-se de geração à geração (PEREZ, 1991; PAVANELLO, 1993).

Somado a isso tudo há algumas décadas os livros valorizavam pouca a Geometria, pois muitos conteúdos eram visto somente no final do livro, isso quando eram vistos. É preciso dar significado em alguns momentos do que é estudado, ou seja, mostrar a aplicabilidade e o ensino de Geometria ainda precisa ser analisado e melhorado tanto no Ensino Fundamental como no Médio.

A palavra Geometria vem do grego e significa *medida da terra*, e a sua aplicação é vista em toda parte, sendo fundamental em diversos cursos de nível superior como Arquitetura, Engenharia, Matemática, Geologia e entre outros. Para Devlin (2008, p. 100) a Geometria demonstra-se relevante na vida dos docentes tanto pelo pensamento matemático adquirido como para a sociedade:

A exposição ao pensamento matemático formal é importante pelo menos por duas razões. Primeira um cidadão no mundo de hoje, baseado na matemática, deveria pelo menos ter uma idéia geral de uma das maiores contribuições à sociedade. Segunda, uma pesquisa levada a efeito pelo departamento de Educação dos Estados Unidos em 1997 (o relatório Riley) mostrou que os estudantes que cursaram geometria no ensino médio saíram-se muito melhor nos exames para o curso superior, e também nos seus cursos universitários, do que aqueles que não estudaram a matéria, independentemente das matérias estudadas no curso superior. Como destacaram os organizadores da pesquisa, o principal fator não foi o grau de competência que os alunos de geometria mostraram neste curso. Apenas o fato de terem estudado a matéria já lhes dá uma enorme vantagem em todos os cursos.

A análise que exige destaque são as preocupações na educação para outros tópicos matemáticos. Nota-se que o ensino de área das figuras planas, por exemplo, o conteúdo é repassado apenas por meio de fórmulas e não possui uma preocupação na metodologia, na representação gráfica e na contextualização dos exercícios trabalhados em sala de aula. Ainda prevalece o ensino por métodos mecânicos que apresentam-se altamente desgastados e pouco compreendidos entre os alunos (SANTOS; JUCÁ, 2014).

Para o desenvolvimento do conceito de áreas e figuras planas, o raciocínio de Chiummo (1998, p. 31) evidencia que:

Se o conceito de área for repassado através de fórmulas, os professores deixarão de explorar as concepções espontâneas, que os alunos trazem antes de conhecer o conceito em questão, e nem estariam utilizando a ferramenta de aprendizagem adequada para atingir o objeto da aprendizagem.

Observa-se que é essencial para o ensino de semelhança de triângulo e áreas de figuras planas, que o professor procure alternativas metodológicas que melhorem a aprendizagem dos alunos para que os mesmos consigam estabelecer relações entre as equações e as projeções gráficas com ênfase nos conceitos de base, como por exemplo, o quadrado e seus lados, a altura do trapézio com suas bases, e a congruência entre as figuras planas (PAIS, 2002).

Tecnologia na Educação: uma possibilidade eficiente com o GeoGebra

Nos dias que correm, a ascensão dos meios eletrônicos multifuncionais portáteis tais como notebooks, celulares, smartphones, tablets, entre outros recursos, facilitam o surgimento de programas, softwares e aplicativos educacionais. Essa nova realidade digital corrobora de modo direto com as interações de ensino e aprendizagem (GOODWIN; BOGUTCHI, 2016).

Para Mill (2018, p. 27) a relação entre ensino, aprendizagem, tecnologia são essenciais pela homogeneidade e a discussão de extrema notabilidade, conforme o fragmento:

Seja na Educação Presencial ou na Educação a Distância (EaD), pensar a relação entre o ensino e aprendizagem e as tecnologias é algo instigante e necessário, sobretudo porque são duas facetas indissociáveis - chega a ser uma relação (quase) simbiótica, sinérgica e biunívoca. Desta forma, refletir sobre a relação entre Educação e Tecnologia constitui uma discussão necessária e importante, na medida em que, desde suas origens, a Educação lançou mão de diferentes dispositivos tecnológicos como forma de melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática as diversidades de recursos didáticos são de extrema de importância para o ensino das ciências e matemática:

Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática. O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (BRASIL, 2016, p. 53).

Com continuidade em Mill (2018, p. 35) evidencia a importância da ferramenta tecnológica mais adequada para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem:

A tecnologia também levanta questões sobre a natureza dos próprios fins da educação - sobretudo porque a escolha de determinada tecnologia (e não outra) para o ensino e aprendizagem representa um posicionamento do educador/gestor com significado peculiar. A própria forma como certa tecnologia é eleita diz muito nas

entrelinhas dos propósitos da escolha. Certamente, os educadores, pesquisadores e gestores do campo da tecnologia educacional devem considerar essa natureza dos fins da educação.

Em seu trabalho Lieban e Muller (2012, p. 39-40), apresentam o software GeoGebra como estratégia de ruptura de alguns vícios que permanecem nas metodologias atuais de ensino. No mesmo capítulo, discorrem do preparo que os educadores necessitam na aplicação da Geometria Dinâmica³ em sala de aula.

Ao refletirmos sobre a utilização do GeoGebra como suporte à construção do conhecimento, podemos pensar sobre como se dá esta construção, ou ainda, como fazer uso desta ferramenta para quebrar a “tradição” de exercícios repetitivos e fórmulas.

...

Porém, para que o uso da Geometria Dinâmica possa contribuir na construção de uma aprendizagem significativa, é essencial que o professor sinta-se seguro para fazer uso da tecnologia, pois não é suficiente apenas disponibilizar ferramentas se a aplicação delas não for pensada e estudada previamente.

As primeiras percepções são que a ferramenta de educação, o conhecimento prévio sobre o software utilizado e o preparo de aulas podem ser diferenciais importantes para aulas de qualidade. Nesse quadro, apresenta-se um pouco da história do software GeoGebra⁴, criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e seu reconhecimento como ferramenta educacional tem aumentado desde esse tempo. No momento atual, este software é usado em quase 200 países, traduzido para 55 idiomas.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único sistema fácil de se usar. Ele possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Algumas características interessantes a serem destacadas:

Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estão interconectadas e são totalmente dinâmicas, logo, se pode modelar as mais várias circunstâncias e sugestões para resolução de problemas;

Interface fácil de se usar e, ainda assim, com muitos recursos poderosos;

Ferramentas de desenvolvimento para a criação de materiais didáticos como páginas web interativas;

³A definição dada por Gravina *et. al.* (2011) foi que um software de Geometria Dinâmica é “uma mídia digital que disponibiliza régua e compasso virtuais, que são instrumentos clássicos com os quais são feitas as construções geométricas, só que agora em ambiente virtual”. (p.26).

⁴GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Nele se encontra, entre outros conteúdos atraentes, materiais e diversos aplicativos matemáticos para gráficos, geometria e 3D com acessos livres para os estudantes e professores interessados em saber mais sobre o programa.

Disponível em vários idiomas, facilitando milhões de usuários ao redor do mundo o acesso ao programa;
Software de Código Aberto disponível **gratuitamente** para usuários não comerciais.

Obmep

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – Obmep⁵ – é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – Impa, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a Obmep tem como objetivos principais:

- ✓ Estimular e promover o estudo da Matemática;
- ✓ Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- ✓ Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- ✓ Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- ✓ Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- ✓ Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público-alvo da Obmep é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. Em 2018, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada. Ela promove vários programas com o objetivo de desenvolver o estudo da matemática e a inclusão social por meio do compartilhamento do conhecimento. Um exemplo foi a criação da *Obmep nível A*, que é uma Olimpíada voltada para os alunos do 4º e 5º ano

⁵OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Disponível: <http://www.obmep.org.br/>. Fonte de pesquisa sobre a Obmep é uma referência de pesquisa para os estudantes e professores interessados em saber mais sobre a olimpíada. Apresentação, Material Didático, Programas e Portais e Escolas Inscritas são alguns tipos de informações que são obtidas no site para ser mais sobre o que é esse programa.

do Ensino Fundamental das escolas públicas. Teve sua 1ª edição no ano de 2018, e está prevista para ocorrer no 1º semestre de 2019, no mesmo formato do ano anterior⁶.

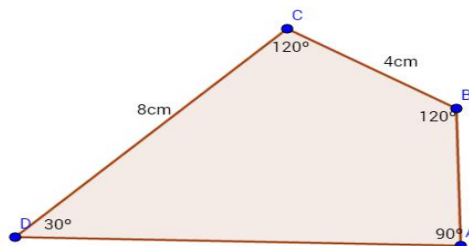
A seguir estão alguns programas desenvolvidos pela Obmep.

- ✓ Obmep nível A;
- ✓ Programa de Iniciação Científica JR. (PIC);
- ✓ Portal da Matemática;
- ✓ Banco de Questões e Provas Antigas;
- ✓ Portal Clubes de Matemática;
- ✓ POTI – Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo;
- ✓ PICME – Programa de Iniciação Científica e Mestrado;
- ✓ Programa Obmep na Escola.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para esta sessão apresenta-se o problema em destaque seguido das soluções oficial e a da proposta e os respectivos comentários. Segue-se a questão:

Na figura, os ângulos ABC e BCD medem 120° , o ângulo $B\hat{A}D$ é reto, e os segmentos BC e CD medem 4 cm e 8 cm , respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$ em cm^2 ?



Solução Oficial:

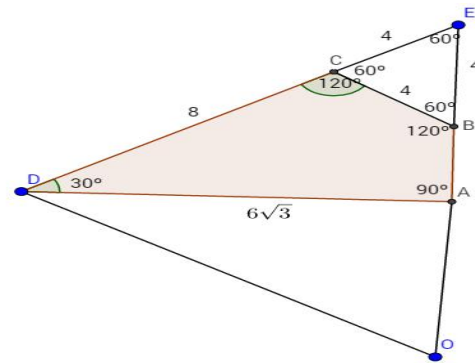
Inicialmente, prolongam-se dois lados do quadrilátero e obtemos um triângulo equilátero de lado 4 cm e um triângulo retângulo grande DAE que é metade de um triângulo equilátero de lado 12 cm , como indicado na figura. Pelo Teorema de Pitágoras, a altura de um triângulo equilátero de lado l é $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$, então:

⁶Para mais informações sobre o programa Obmep nível A, acesse: www.obmep.org.br/informacoesNivelA.DO.

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot 12}{2}$$

$$h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$



Logo, área do quadrilátero **ABCD** é igual a área do triângulo retângulo **DAE** menos a área do triângulo equilátero **CBE**, então:

$$\text{ÁREA}_{\text{QUADRILÁTERO } ABCD} = \text{ÁREA}_{\Delta DAE} - \text{ÁREA}_{\Delta CBE}$$

$$\text{ÁREA}_{\text{TOTAL}} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{2} - \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{ÁREA}_{\text{TOTAL}} = 18\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$\text{ÁREA}_{\text{TOTAL}} = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Solução Proposta: Teorema da Bissetriz Externa

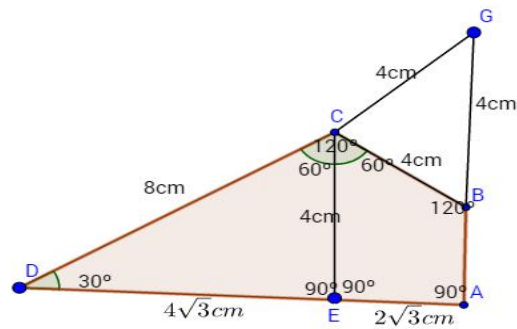
Primeiramente encontra-se a altura CE, tendo o ângulo D igual a 30° e sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° . Em seguida prolonga-se o segmento DC e AB até ambos coincidirem no ponto de intersecção G. Fazendo o complementar de 120° , temos que o triângulo CGB é equilátero e seus ângulos são iguais a 60° . Fazendo $\cos 30^\circ$ no triângulo DCE, $\overline{DE} = 4\sqrt{3}$. Agora pelo teorema das Bissetrizes Externa temos que:

$$\frac{DC}{DE} = \frac{CB}{EA}$$

$$\frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{EA}$$

$$8EA = 16\sqrt{3}$$

$$\overline{EA} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$



Agora fazemos o Teorema de Pitágoras no triângulo DGA, resultando:

$$12^2 = AG^2 + (6\sqrt{3})^2$$

$$144 = AG^2 + 108$$

$$AG^2 = 36$$

$$\overline{AG} = 6 \text{ cm e } \overline{BG} = 4 \text{ cm, logo, } \overline{BA} = 2 \text{ cm.}$$

Fazendo a soma de áreas do Triângulo DCE com o Trapézio EACB, temos:

$$\text{ÁREA}_{TOTAL} = \text{ÁREA}_{\Delta DCE} + \text{ÁREA}_{\text{Trapézio EACB}}$$

$$\text{ÁREA}_{TOTAL} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} + \frac{(4 + 2) \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ÁREA}_{TOTAL} = 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$\text{ÁREA}_{TOTAL} = 14\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que é uma questão fácil ou difícil? Estes conceitos são relativos e podem mudar na concepção dos estudantes, sendo assim não se pode mensurar esses dois conceitos na vida estudantil. Na matemática tanto na álgebra quanto na geometria é possível encontrar variadas soluções para um mesmo problema e esse, sem dúvida, é um dos motivos que fazem com que a matemática seja considerada por muitos como a “Rainha das Ciências”, em que um único problema podem levar a caminhos (soluções) diferentes, porém, com a mesma resposta o que torna essa ciência tão desafiadora e apaixonante ao mesmo tempo.

Por isso, a variação de soluções pode ser muito importante e quando oportuno o professor pode e deve usufruir desse “artifício” com intuito de contemplar um assunto ou mesmo um problema matemático ao maior número de alunos possível. A geração atual gosta de desafios e usufruem da tecnologia para solucionar esses problemas. Vale salientar que o uso da tecnologia não diminui o papel do professor, ao contrário, estas ferramentas auxiliam os professores em suas vidas escolares e permite diminuir em alguns casos a distância entre professores e alunos. Tenta-se deixar evidente que o professor é um dos pilares da educação e fator inigualável para a melhoria da educação no nosso país.

O uso do GeoGebra foi predominante para a demonstração de como a tecnologia pode se impor no ensino. O planejamento de utilização desta ferramenta possibilita a perfeita harmonia entre professor, conteúdo e aluno. O uso da tecnologia está crescendo, cada vez mais, no mundo, e claro, no Brasil e nos anos que se sucederão ela estará ainda mais presente não somente nas salas de aula, mas também em nossas vidas. Enfim, o nosso livro GeoGebra: Soluções na Geometria vem dar continuidade ao nosso trabalho e acredita-se que agregará para aqueles que são admiradores da arte matemática e que se preocupam com o ensino.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2016.

CHIUMMO, A. **Conceito de áreas de figuras planas: capacitação de professores do ensino fundamental**. 181f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1998.

DEVLIN, K. **O gene da Matemática**. Editora Record. Rio de Janeiro. 2008.

DUVAL, R. Approche cognitive des problemes de geometrie em termes de congruence. **Revista Annales de Didactique et de sciences cognitives**, Paris, v. 01, p. 57-74, 1988.

DZIADZIO, J. R.; VAN KAN, M. T. Percepções e relações da geometria espacial com o cotidiano dos alunos. *In: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. vol. 1. Paraná/PR: Governo do estado do Paraná, 2016.

GOODWIN, F. C.; BOGUTCHI, T. F. Uso do GeoGebra por meio do tablet no estudo das funções. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)*, 12, 2016. São Paulo. **Anais...** São Paulo: Enem, 2016.

GRAVINA, M.A., et. al. Geometria Dinâmica na Escola. *In: GRAVINA, M.A. et. al. (Orgs). Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011, p. 26-45.

LIEBAN, D. E.; MULLER, T. J. Construção de utilitários com o software GeoGebra: uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos. *In: CONFERÊNCIA LATINO*

AMERICANA DE GEOGEBRA (GEOGEBRA-LA-2011), 1, 2012. São Paulo. **Anais...** São Paulo: (GeoGebra-la-2011), 2012.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria?. **Educação Matemática em Revista, SBEM**, Blumenau, n. 04, p. 3-13, jan./mar., 1995.

MILL, D. Reflexões sobre a relação entre educação e tecnologias: algumas aproximações. In: CAVALCANTE, M. J. M.; HOLANDA, P. H. C.; TORRES, A. L. M. M. (Org.). **Tecnologias da educação: passado, presente, futuro**. Fortaleza/CE: Edições UFC, 2018. p. 27-47

PAVANELLO, R. M. (1989). **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica**. 1989. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática - Uma análise da influência francesa**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Coleção Tendências da Educação Matemática).

PEREIRA, M. F. F. Uma sequência didática para o ensino de semelhança de figuras planas. *In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM)*, 20, 2016, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Ebrapem, 2016.

PEREIRA, S. R. F.; PEREIRA, M. F. F. **O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos**. *In: Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades*. São Paulo, 13 a 16 de julho de 2016.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricos e metodológicos da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. 1991. 298 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede**. São Paulo: FTD, 2000. 223 p.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades**. 2007.

Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>>

acessado no dia 05/05/2019 às 11:30 horas.

SANTOS, W. S.; JUCÁ, R. S. O ensino das áreas das figuras planas com a utilização do software kig. **Revista WEB-MAT**, Belém, v. 01, n. 01, jan./jun., 2014.

VASCONCELOS, P. H. M.; ARAÚJO, A. F. S. Contribuições da experimentação e da contextualização para o ensino da cinética química. *In: VASCONCELOS, F. H. L.; SAMPAIO, C. G.; VASCONCELOS, A. K. P.; BARROSO, M. C. S. (Org.). Ensino de Ciências e Matemática: Experiências da formação continuada de professores na Pós-graduação do IFCE*. Campinas/SP: Pontes Editores, 2018. p. 50-64.