PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS E NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: CONCEITOS E RELAÇÕES

Marcella Luanna da Silva Lima [1]
Marcelo Câmara dos Santos [2]

INTRODUÇÃO

Ponte, Pereira e Henriques (2009) afirmam que o grande objetivo do ensino da Matemática é o de desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos, porém esse raciocínio não é desenvolvido por simples memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros, pois isso os leva a ter uma visão da Matemática como um conjunto de regras mais ou menos desconexas, e não como uma disciplina lógica e coerente. Para que os alunos desenvolvam essa capacidade é preciso trabalhar com tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro, estimulem o raciocínio.

Balacheff (2000) acredita que os alunos não devem ser obrigados a demonstrar, eles devem, a partir de seus argumentos, serem motivados a pensar, refutar e levantar conjecturas, fazendo com que o aluno tome para si a responsabilidade de sua aprendizagem e para que a demonstração faça sentido para ele. Para isso, é necessário descobrir e levar em consideração a racionalidade que eles têm inicialmente, saber como funciona e como pode evoluir, uma vez que é a partir dessa racionalidade que os alunos conseguirão dar sentido a uma demonstração.

A partir das dificuldades encontradas por seus alunos do curso secundário na Holanda, Dina van Hiele Geldof e Pierre Marrie van Hiele perceberam a relação existente entre a compreensão e o nível de maturidade geométrica do aluno. Assim, a ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos enquanto aprendem Geometria. Kaleff et al. (1994) afirmam que, para o modelo de van Hiele, o crescimento cronológico não produz automaticamente um crescimento nos níveis de pensamento e que decididamente poucos atingem o último nível.

Alguns pesquisadores afirmam que existe uma estreita ligação entre o modelo de van Hiele e as provas e demonstrações. De Villiers (2010) afirma que a ocorrência do desenvolvimento da capacidade de provar, dentro desse modelo, surge a partir do nível 3, porém em várias de suas pesquisas empíricas, ele observou que as funções de prova, tais como explicação, descoberta e verificação, podem ser significativas para alunos nos níveis inferiores ao nível 3 de van Hiele, contanto que os argumentos sejam de natureza intuitiva ou visual. Isto quer dizer que, os estudantes que estão nos níveis 1 ou 2 de van Hiele não duvidam da validade de suas observações empíricas e por isso a demonstração não faz sentido para eles.

Battista e Clements (1995) apresentam Van Dormolen (1977), o qual argumenta que no nível 1 (visual), casos únicos são justificados e as conclusões são restritas ao exemplo específico para o qual a justificação é dada. No nível 2 (descritivo/analítico), as justificativas e as conclusões podem ser feitas para casos específicos, mas referem-se a coleções de objetos semelhantes. Somente após o nível 3 é que os estudantes podem justificar as declarações formando argumentos que estejam em conformidade com as normas aceitas, ou seja, após o

[1] Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática - UFRPE, marcellaluanna@hotmail.com;
[2] Professor orientador: Doutor em Sciences de L'education, Université de Paris X - França, marcelocamaraufpe@yahoo.com.br.

nível 3, os estudantes são capazes de construir provas intelectuais. Isso vem a corroborar a ideia de De Villiers (2010) apresentada acima.

À vista de toda essa discussão, nosso trabalho teve como objetivo estabelecer uma relação entre os níveis de pensamento geométrico propostos por van Hiele (1957) e os tipos de provas propostos por Balacheff (2000), justificando-se pelo fato de não haver na literatura tal abordagem, como também de contribuir para a pesquisa em Educação Matemática, trazendo considerações pertinentes quanto a essas temáticas. Para isso, pautamos nosso trabalho em uma metodologia de pesquisa qualitativa, refletindo o resultado de um estudo exploratório e teórico, a partir das discussões de Balacheff (2000), van Hiele (1957), Pietropaolo (2005), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1989), Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998). Os estudos e discussões teóricas desses pesquisadores nos levaram a estabelecer relações entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de provas, os quais apresentam a importância de se trabalhar, desde as séries iniciais, com argumentações, justificações, provas empíricas, provas intelectuais e, por fim, demonstrações, enfatizando assim a relevância ao estímulo e desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

Nossa pesquisa é de natureza qualitativa, uma vez que tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve um grupo de participantes (D'AMBRÓSIO, 2004). Além disso, reconhecemos que ela faz parte dessa categoria, pois, de acordo com Garnica (2004), sabemos da transitoriedade de seus resultados; a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; a não neutralidade do pesquisar que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvincilhar; entre outros.

Acreditamos que nossa pesquisa é exploratória, pois, de acordo com Gil (2002), essas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Nesse tipo de pesquisa, o objetivo principal é o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuição. Assim, nosso objetivo é, a partir das discussões trazidas por Balacheff (2000), van Hiele (1957), Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), entre outros, estabelecer uma relação entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de provas. Por isso, trata-se de um ensaio teórico, na medida em que nos propomos a estabelecer relações entre teorias, o qual foi desenvolvido com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros, teses e artigos científicos.

DESENVOLVIMENTO

Balacheff (2000) distinguiu as palavras *explicar*, *provar* e *demonstrar*. Para o autor, a *explicação* se situa no nível do sujeito locutor e para esse sujeito a explicação estabelece e garante a validade de uma proposição, a qual está enraizada de seus conhecimentos e no que constitui sua racionalidade.

Para Balacheff (2000), a passagem da explicação para a *prova* diz respeito a um processo social pelo qual um discurso que garante a validade de uma proposição muda sua posição e passa a ser aceito por uma comunidade. Porém, essa posição não é definitiva, uma vez que com o tempo pode evoluir simultaneamente com o avanço do conhecimento em que está ancorado. Além disso, uma prova pode ser aceita por uma comunidade, como também pode ser rejeitada por outra.

Quando a prova trata de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras, e é o tipo dominante na Matemática, chamaremos de *demonstração*, caracterizando assim as demonstrações como gênero de discurso em sua forma estritamente codificada. Inferimos então que, para Balacheff (2000), uma demonstração pode ser um tipo particular de prova, mas nem toda prova é uma demonstração, já que a prova é tida em um sentido mais amplo, podendo ser feita por meio de exemplos, casos particulares, desenhos ou gráficos e a demonstração é apresentada a partir de um discurso matemático, com o rigor e o formalismo necessários à sua construção.

Balacheff (2000) buscou analisar a natureza e a hierarquia das provas, conseguindo identificar dois tipos básicos de provas: as *pragmáticas* e as *intelectuais*. As primeiras são aquelas em que os sujeitos recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Já as segundas, são aquelas em que o discurso a ser utilizado é unicamente teórico, não necessitando tomar observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura.

A partir de seus primeiros trabalhos de investigação, Balacheff (2000) conseguiu distinguir quatro tipos principais de provas pragmáticas e intelectuais: o *empirismo ingênuo*, a *experiência crucial*, o *exemplo genérico* e a *experiência mental*. Para o pesquisador, o *empirismo ingênuo* consiste em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos. Esse modo de validação é rudimentar e insuficiente, é também uma das primeiras formas do processo de generalização e uma forma resistente de generalização. A *experiência crucial* consiste em verificar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar, como também o aluno começa a realizar experiências e a tomar consciência de que busca por um resultado geral.

O *exemplo genérico*, para Balacheff (2000), consiste na busca por uma generalização ainda baseada em exemplos, mas procura justifica-la com a teoria relacionada a esta proposição. Desse modo, o aluno justifica a partir de um exemplo, o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando-se de incógnitas ou variáveis. A *experiência mental* se centra na ação, interiorizando-a e separando-a de sua execução sobre um representante em particular. O aluno afirma a validade de uma proposição de forma genérica e não faz mais referência ao caso particular, uma vez que a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é sustentada pela teoria.

Um aspecto interessante discutido por Balacheff (2000) diz respeito à transição entre a *experiência mental* e as *demonstrações.* Para o autor, ainda é necessário reconhecer os diferentes tipos de provas intelectuais que diferem tanto em seus níveis de descontextualização, destemporalização e despersonalização, como também em seu nível de formalismo. Já do ponto de vista da demonstração, entendida como estrutura do discurso, o nível de formalização dos conhecimentos que coloca em prática é um ponto crucial. Assim, ainda é preciso mais estudos para verificar o que acontece durante esse processo de construção das provas e demonstrações e se realmente há outros tipos de provas entre a experiência mental e a demonstração (BALACHEFF, 2000). Isto quer dizer que a *experiência mental* ainda não seria considerada uma *demonstração*, mas já é o primeiro tipo de prova dentro da categoria *intelectual*, na qual o aluno utiliza apenas o discurso teórico para validar uma afirmação.

O casal van Hiele, ao identificar as dificuldades encontradas por seus alunos do curso secundário na Holanda, elaborou um modelo estabelecendo a relação entre a compreensão e o nível de maturidade geométrica do aluno. Nesse sentido, a proposta elaborada pelo casal pode ser usada tanto para orientar na formação quanto para avaliar as habilidades do aluno. A ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem Geometria.

Uma das principais características desse modelo é a distinção entre os cinco níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos em Geometria. Em resumo, esses níveis são atingidos em sequência e, por meio de uma instrução adequada, o aluno vivencia cinco fases ao progredir de um nível para outro superior.

No primeiro nível, *visualização* ou *reconhecimento*, os alunos reconhecem as figuras por sua aparência global, mas não conseguem identificar explicitamente suas propriedades. Ou seja, os alunos, nesse nível, podem aprender o vocabulário geométrico, identificam figuras geométricas, reproduzem uma figura dada, associam o nome à figura, reconhecem nos elementos do meio ambiente representações de figuras geométricas, porém eles não conseguem reconhecer as figuras por suas propriedades e não enxergam as características de uma figura em outra da mesma classe (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1992; KALEFF ET AL., 1994; DALL'ALBA, 2015).

No segundo nível, *análise*, o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si. Isto quer dizer que ele começa a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades que são, então, usadas para conceituarem classes e formas, porém ele ainda não explicita inter-relações entre figuras e propriedades (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1992; KALEFF ET AL., 1994; DALL'ALBA, 2015).

No terceiro nível, *dedução informal* ou *ordenação*, os alunos relacionam as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não dominam o processo dedutivo. Dessa forma, eles conseguem formar definições abstratas, estabelecendo inter-relações das propriedades nas figuras e entre figuras. Esses alunos podem distinguir entre a necessidade e as suficiências de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico como também conseguem acompanhar e formular argumentos e provas informais, porém não compreendem o significado de uma dedução como um tudo nem têm condições de elaborar argumentos e provas formais (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1992; KALEFF ET AL., 1994; DALL'ALBA, 2015).

No quarto nível, *dedução formal*, o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema e já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas. Além disso, nesse nível, o aluno pode construir provas e não somente memoriza-las, como também percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira. Por fim, no quinto e último nível, *rigor*, o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações e é capaz de analisar outras geometrias, tais como a Geometria Não-Euclidiana. Além disso, ele consegue utilizar sistemas dedutivos abstratos, como também é capaz de fazer ligações entre os conceitos e desenvolver, às vezes, novos postulados (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1992; KALEFF ET AL., 1994; DALL'ALBA, 2015).

DISCUSSÃO

Pietropaolo (2005) afirma que o modelo de van Hiele possui estreita ligação com a habilidade de justificar em Matemática. Nasser e Tinoco (2003) argumentam que nos dois primeiros níveis, os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e, por isso, não percebem que a demonstração é necessária. Senk (1989) acrescenta que a demonstração deve ser desenvolvida apenas em salas de aula cujos alunos estejam pelo menos no nível 3, uma vez que antes disso eles não conseguirão acompanhar o professor e poderão não perceber a importância dela na Matemática.

Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998) descrevem o desenvolvimento de provas dentro dos quatro primeiros níveis de van Hiele. Para os pesquisadores, os alunos do nível 1 não entendem o conceito de prova. Para os do nível 2, uma prova consiste em alguma verificação experimental da verdade da propriedade em um ou alguns casos. Dependendo do grau de aquisição dessas habilidades pelos alunos, eles podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os alunos do nível 3 são capazes de fazer deduções e provas lógicas, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades, sendo os exemplos específicos apenas uma ajuda e não mais a prova em si.

Por fim, os alunos do nível 4 de van Hiele podem entender e escrever provas formais padrão. Algumas vezes eles podem utilizar desenhos específicos apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que um desenho é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas. Assim, no nível 4 de van Hiele, os alunos já têm a capacidade de escrever provas formais e já sabem diferenciar entre as várias declarações relacionadas (direta, inversa, etc.), como também em escrever os diferentes tipos usuais de provas (direta, inversa, ad absurdum, etc.) (JAIME e GUTIÉRREZ, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Fazendo uma ligação com Balacheff (2000), poderíamos concluir que nos níveis 2 e 3, os alunos constroem *provas*, que podem estar dentro das três primeiras categorias encontradas pelo pesquisador (*empirismo ingênuo*, *experiência crucial* e *exemplo genérico*), e no nível 4 o aluno pode construir uma *prova* dentro da categoria *experiência mental*, pois a desenvolve teoricamente. Já a *demonstração* é somente desenvolvida no nível 5 de van Hiele, pois para a sua elaboração necessita-se um nível maior de conhecimentos, uma vez que ela se constitui em uma verdadeira teoria reconhecida como tal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conseguimos, então, perceber a ligação entre os níveis do pensamento geométrico de van Hiele e o processo de provas e demonstrações, que começa a ser iniciado pelo nível 2, com provas utilizando exemplos e verificações empíricas e se desenvolve até chegar na construção de provas intelectuais (nível 4). Lembrando sempre que esse desenvolvimento deve ser feito quando o professor conhece e sabe das características do modelo de van Hiele e reconhece que quando aluno e professor falam diferentes "idiomas", não existe a possibilidade de ocorrer a aprendizagem. Portanto, o professor deve trabalhar com o material adequado e a linguagem adequada, de modo a atingir a maioria de seus alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática, Provas e demonstrações matemáticas, Níveis do pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidadde los Andes. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document>. Acesso em: 12 jan. 2018.

BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, n. 88(1), p. 48-54, 1995.

DALL'ALBA, C. S. (2015). *Possibilidade de utilização do software GeoGebra no desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

D'AMBROSIO, U. (2004). Prefácio. In: *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). Belo Horizonte: Autêntica, p. 11-24.

DE VILLIERS, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 400-431. Tradução de Celina A. A. P. Abar. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/5167/3696>. Acesso em: 12 jan. 2018.

GARNICA, A. V. M. (2004). História oral e Educação Matemática. In: *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98.

GIL, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*(2/3), 27-46. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2019.

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. In *Proceedings of the 18th PME Conference* (vol. 3, pp. 41-48). Lisboa, Portugal: PME. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut94a.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2019.

KALEFF, A. M. et al. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van Hiele. *Bolema* (Rio Claro), 10, 21-30. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671>. Acesso em: 12 jan. 2018.

NASSER, L. (1992). Níveis de Van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria?. *Boletim GEPEM*, 29, 21-25.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. (2003). *Argumentação e provas no ensino de Matemática*. 2 Ed. Projeto Fundão. Rio de Janeiro: Editora do IM/UFRJ.

PIETROPAOLO, R. C. (2005). *(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PONTE, J. P.; PEREIRA, J. M.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Práxis Educativa*, Paraná, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

SENK, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749519?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 12 jan. 2018.

VAN HIELE, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria).* (Tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais). Tradução Rosa Corberán et al. Universidade de Utrecht: Utrecht, Holanda.