GEOMETRIA E APLICAÇÕES: O CÁLCULO DO VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO UTILIZANDO O GEOGEBRA

Elissandro da Silva Feitosa [1]
Renato Darcio Noleto Silva [2]

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática tem sido cada vez mais desafiador em uma sociedade que se utiliza cada vez mais de recursos tecnológicos, pois ao mesmo tempo em que algumas escolas resistem em fazer uso de tecnologias, o mundo vive a "quarta revolução industrial". Com o surgimento de termos como realidade aumentada e inteligência artificial, várias discussões sobre a utilização de *smartphones* e outras tecnologias digitais em sala de aula são travadas constantemente, por um lado, os estudantes se apropriam cada vez mais das tecnologias, do outro, surgem obstáculos , dos quais podemos citar a resistência da comunidade escolar em aceitar e utilizar estes recursos em suas propostas de ensino.

Nesse sentido, buscar estratégias diversificadas para introduzir um conteúdo e exercitar a prática parece consensual entre os professores e alunos, faz parte da proposta desse trabalho, assim, testamos um experimento com a utilização de uma ferramenta tecnológica, o GeoGebra, que, apesar de bastante conhecido no meio matemático, é pouco utilizado nas escolas públicas do Brasil.

Com o objetivo de dar mais consistência a essas afirmações sobre o uso de tecnologias em sala de aula, dados das pesquisas de Silva (2019) apontam 33% disseram que as aulas de matemática despertam sua atenção em compreender os conteúdos, 29% disseram que conseguem relacionar os conteúdos de matemática como o dia a dia; 77% afirmam que seus professores desenvolvem o conteúdo de funções a partir da tríade definição, exemplo, exercício; 82% responderam que o professor nunca propôs atividade utilizando qualquer tipo de tecnologia; 91% afirmam que há proibição do professor/escola para o uso de smartphone em sala de aula; 89% dos alunos possuem smartphones; 71% utilizam smartphones constantemente fora da escola; 39% utilizam o smartphone mais de 6 horas por dia; 95% não possuem computador ou notebook em casa; 90% dão nota de 8 a 10 para aulas propostas com o uso de tecnologias.

Do ponto de vista dos docentes entrevistados, 97% possuem formação na área; 40% afirmam não possuir domínio suficiente para propor atividades com a utilização de tecnologias; 73% dizem que não tiveram disciplinas na graduação que tratassem da utilização de tecnologias de maneira satisfatória; 60% disseram nunca terem proposto atividades nas aulas de matemática que envolvessem a utilização do laboratório de informática; 30% responderam que não participaram de formação continuada na área de tecnologias nos últimos 2 anos; 63% possuem computador/notebook; 63% afirmam que desenvolvem o conteúdo de funções a partir da tríade

[1] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Maranhão- IFMA, elissandrosilva999@gmail.com@gmail.com;
[2] Professor do Instituto Federal do Maranhão (IFMA) e pela Secretaria de Estado da educação do Maranhão (SEDUC-MA), renato.silva@ifma.edu.br.

definição, exemplo, exercício. De acordo com os dados acima, percebemos que existe um grande potencial exploratório para o ensino de tecnologias no ensino de matemática, pois alunos e professores apresentam características compatíveis com a proposta por já serem bastante inseridos num contexto tecnológico, por outro lado, pouco o utilizam no ensino. Segundo os PCN:

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução. (BRASIL, 1997, p. 42)

Atentamos a muitas vozes que exprimem que os professores e estudantes não tem interessam por utilizar as tecnologias em favor da aprendizagem, a nossa questão problema gira em torno de saber se "como o GeoGebra pode contribuir na aprendizagem do cálculo de volumes de figuras espaciais?". Complementando a nossa inquietude, tratamos de delimitar o objetivo: analisar os resultados de um experimento para o cálculo de volumes utilizando o GeoGebra.

Tendo em vista a pergunta diretriz e o objetivo deste trabalho, propomos uma atividade que permite calcular o volume de figuras geométricas espaciais obtidas com a revolução de figuras planas com a utilização do GeoGebra como instrumento de mediação. Por outro lado, cabe cuidarmos pelo sentido no uso do termo "instrumento" no contexto da proposta e no uso de Tecnologias Digitais, pois de acordo com Borba et al,

> A noção de experimentação com tecnologias pode inicialmente ser entendida como o uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração de problemas matemáticos. Contudo, existem especificidades com relação às formas de uso dessas tecnologias nessa perspectiva (BORBA et al, 2014, P.5051).

Nesse sentido, utilizamos o termo instrumento na perspectiva da Teoria da Gênese Instrumental de Rabardel (1995), para realizar e analisar o experimento.

MATERIAIS E MÉTODOS

Utilizar tecnologias nas aulas de matemática pode representar um diferencial para as aulas predominantemente expositivas. Vale ressaltar que não basta apenas levar computador, data show ou smartphone para a sala de aula, mais do que isso é necessário que o professor torne essas ferramentas um instrumento pedagógico (RABARDEL, 1995), propondo atividades que complementem o ensino. Segundo Dullius e Quartieri,

> a utilização da tecnologia em sala de aula difere bastante da utilização que dela fazemos no dia a dia. Dessa forma, o planejamento, a colocação de objetivos, a escolha de materiais, a seleção de tarefas, a antecipação de questões, ganham uma dimensão central na prática do professor com recursos tecnológicos. (DULLIUS E QUARTIERI, 2015, P. 13)

Considerar e interrelação entre homem e máquina para a aprendizagem de um objeto matemático, cabe um estudo mais detalhado e teórico de forma que nos permita compreender os processos de aquisição do conhecimento propiciados por esta relação. Para isso, consideremos os estudos de Rabardel (1995), que desenvolve a teoria da instrumentação e fornece elementos teóricos apropriados ao estudo da ação do sujeito, mediado por um instrumento onde podemos utilizar a tecnologia em situações de ensino e aprendizagem (sejam elas fora ou dentro da escola propriamente dita, como por exemplo, a educação à distância). Um dos primeiros elementos teóricos da Gênese Instrumental de Rabardel é a noção de esquema, artefato e instrumento.

A noção de esquema é baseada nos estudos de Vernaud, o qual se comporta sempre quatro elementos: antecipações do objetivo que ele quer atingir, regras de ação (que vão gerar a ação do sujeito), inferências (que permitem que o sujeito avalie suas ações) e invariantes operatórios (são do tipo proposição, função proposicional ou argumentos e que tornam operacional a ação do sujeito). Rabardel (1995) descreve as relações existentes entre o sujeito, a ferramenta (artefato) e os esquemas de utilização, cuja definições são:

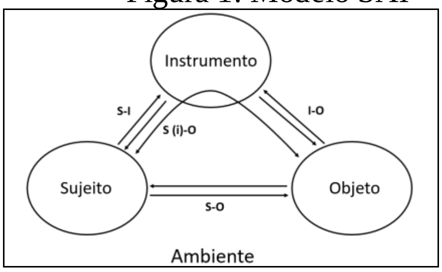
- **Sujeito**: Indivíduo ou grupo de indivíduos (alunos) que desenvolvem as atividades propostas ou são partícipes do estudo;

- **Artefato**: dispositivo material (Computador, smartphone ou lápis e borracha) ou imaterial (software, aplicativo, figura ou gráfico) que se pretende transformar em instrumento;

- **Esquemas de utilização**: Segundo Rabardel (1995), é "uma organização invariante, de comportamentos para classes de situações" que permitem que a ação do sujeito seja operatória.

- **Objeto**: Refere-se ao que se pretende aprender com a utilização da ferramenta (aplicativos matemáticos). Nesse sentido, a ideia principal da Gênese instrumental é a transformação do artefato em Instrumento (Modelo SAI - Situações de Atividades Instrumentais) que apresenta a relação entre o sujeito e o objeto mediadas pelo instrumento Figura 1.

Figura 1: Modelo SAI



Fonte: Adapatado de Rabardel (1995)

Para Rabardel (1995, apud ALENCAR, 2012), o modelo disposto na Figura 1, evidencia as interações que intervêm da atividade instrumental: sujeito-objeto (S-O), sujeito-instrumento (S-I), instrumento-objeto (I-O) e sujeito-objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O] que se desenvolvem num ambiente formado pelo conjuntos de condições que o sujeito deverá levar em conta para realizar sua atividade. Nesse contexto, o instrumento é composto de dois componentes: artefato, produzido para o sujeito; e os esquemas de utilização agregados, estes por sua vez são resultados da construção do próprio sujeito ou da apropriação de esquemas já existentes.

No nosso contexto, o aluno é o sujeito, o GeoGebra é o artefato (considerando-se que já possuem domínio de utilização do computador), o objeto é conteúdo de volumes de figuras espaciais de revolução.

As formas geométricas espaciais apresentam-se como obstáculo para o ensino de matemática, uma vez que se sabe da existência de alunos com déficit em relação ao reconhecimento das formas. Nessa perspectiva surgem os softwares educacionais resultado das constantes evoluções tecnológicas, estes podem ser utilizados nas mais diversas ocasiões e etapas de ensino, desde o simples desenho de um cubo ao cálculo integral de uma função.

Em atividade proposta por Dantas (2017), é descrito um processo para calcular o volume de sólidos de revolução através do software GeoGebra é necessário que as formas de revolução devem ser obtidas pela rotação de uma região de um plano em torno de uma reta desse plano, chamado eixo de revolução ou rotação, que toca a fronteira da região ou não intersecta a região em nenhum ponto.

Nesse sentido, as formas podem ser obtidas no GeoGebra a partir do desenho de um polígono qualquer, que gira em torno de determinado eixo. É possível então calcular o volume do polígono criado encontrando o seu centro de massa ou baricentro possibilitando a aplicação do teorema de pappus que segundo Lima (2006),

> se uma figura plana gira em torno de um eixo de seu plano, o volume (V) gerado é igual ao produto da área dessa figura (S) pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro ($2\pi d$). (LIMA et al. 2006, p. 284).

O cálculo volume da forma de revolução segundo Dantas (2017) é dado por a multiplicação da área da figura plana (S), pela distância(d) do baricentro até o eixo em que a figura foi girada e por 2π, ou seja, $V = S.d.\ 2\pi = 2\pi dS$.

Em tese a atividade pode apresentar resultados satisfatórios voltando-a para o ensino médio e superior, mas que não limita-se ao cálculo de volume das formas de revolução “básicas”, como um cilindros, prismas e cones, foi observado que a técnica pode ser usada em sólidos que utilizamos no nosso cotidiano, com base nisso é possível calcular o volume de uma lata de refrigerante através do GeoGebra e do teorema de pappus. Pode-se também obter-se o volume de uma maçã ou objetos não simétricos, porém teríamos como resultado um valor aproximado.

Nesse trabalho, reuniram-se 20 alunos do curso de licenciatura de matemática, na disciplina de tecnologias aplicadas ao ensino. Foi proposta a seguinte atividade:

“Como podemos calcular o volume de uma figura espacial gerada a partir da rotação de uma figura geométrica plana com o uso do GeoGebra?”. Na oficina, os alunos já conheciam o programa, faziam uso de suas ferramentas com propriedade, portanto, já instrumentalizaram a ferramenta, no entanto, nunca tinham desenvolvido tal atividade, esta proposta por Dantas (2017). As atividades foram realizadas com a orientação deste autor, e observadas à luz da teoria da Gênese Instrumental, registradas em vídeo com o software “Ocam”

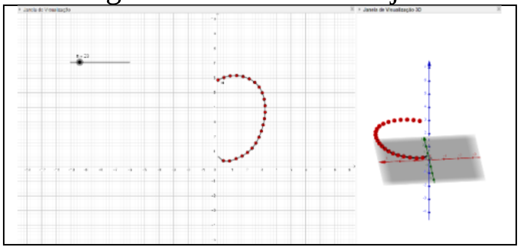
DESENVOLVIMENTO, RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos dados observados nas etapas anteriores foi colocada em pratica a oficina de cálculo de volumes de sólidos de revolução, no laboratório de informática do campus, e que teve início às 13h e término as 16h da tarde.

Inicialmente foi pedido aos alunos a abertura do software GeoGebra, e que fosse habilitada a janela de visualização 3D, dentro da teoria da gênese instrumental as “novas” ferramentas de 3D do software usado foram consideradas como um artefato pois os envolvidos não conheciam tal ferramenta.

No segundo momento, foram inseridas imagens (uma por estudante) dos objetos disponíveis, dentre os quatro (maçã, vaso, garrafa e pote), e posiciona-la no centro do eixo y, de forma que o objeto preserve o seu tamanho original, durante esta etapa todos os alunos tiveram êxito. Em seguida, foi necessário que os alunos construíssem pontos em torno da silhueta do objeto escolhido e a partir dos pontos construídos determinar uma curva através do comando *Spline=[<lista de pontos>]* digitado no campo de entrada, posteriormente foi criado um controle deslizante de 1 até 150, com incremento 1, em seguida obtida uma lista L_1 de n pontos sobre a curva criada, digitando *L_1 = Sequência[a(i), i, 0, 0.999, 1 / n]*, depois desse comando, os alunos retiraram a imagem, e ocultaram os pontos, e como resultado tiveram o mesmo da figura 1.

Figura 2- Silhueta do objeto



Fonte: autor (2019).

No próximo passo os alunos obteram n círculos em torno do eixo y através do comando L*_2 =Sequência [Círculo[(0, y(Elemento[L_1, i]),0), x(Elemento[L_1, i]), EixoY], i, 1, n]*, assim formando o solido de revolução, porém foi necessário ajustar eixo y na vertical, para isso os alunos tiveram que acessar a opção de janela de visualização, e marcar a opção eixo y é vertical.

Por fim os alunos iniciaram o processo de cálculo de volume, para tanto foi necessário segundo Dantas (2017, p. 153) "construir um polígono pelos n pontos sobre a curva, encontrar seu baricentro e utilizar o Teorema de Pappus". Digitando-se no campo de entrada o comando *Pol1 = Polígono[L_1],* para construção do polígono que tem como vértices os elementos de L_1, e depois digitando *Baricentro = CentroDeGravidade[Pol1]* para determinar o centro de gravidade do polígono.

Para o cálculo do volume é aplicado o teorema de Pappus Guldinus, digitando o comando *Volume = 2p * Pol1 * x(Baricentro)*, no campo de entrada.

Vale ressaltar que nos exemplos utilizados pelos alunos possuíam dimensões diferentes, e que se bem posicionado o volume seria igual ao do objeto físico, no exemplo tomado no presente artigo a maça não possui lados simétricos, porém o seu volume é um valor aproximado.

3- Registro de atividades (SAI)

Fonte: autor (2019)

Dos vinte alunos envolvidos na atividade, 70% realizaram sem dificuldades a atividades, e os demais, foram orientados pelos colegas e pelo orientador da atividade. Um fator muito recorrente fora a troca de experiências em grupo. Percebemos que o processo de Gênese Instrumental fora desenvolvido com a atividade, uma vez que os sujeitos, fizeram uso das ferramentas do artefato e conseguiram encontrar o volume da figura proposta na atividade, e consequentemente, conseguiram encontrar o volume de outras figuras propostas posteriormente, demonstrando o domínio das novas ferramentas conhecidas e por consequência, tornar o artefato um instrumento. A atividade pode ser visualizada na Figura 3.

A figura 3 reflete o desenvolvimento da atividade de acordo com o desenvolvimento dos alunos frente ao modelo proposto pelas Situações de Atividades Instrumentadas- SAI propostas por Rabardel (1995).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho nos possibilitou verificar como ocorreu o processo de Gênese Instrumental das ferramentas tecnológicas se apresentam frente ao ensino de matemática para o cálculo do volume de figuras de revolução de acordo com o que propõe Rabardel (1995). Verificamos que uma atividade orientada com passos simples para a utilização das ferramentas, do GeoGebra, permitiram a descoberta de ações ainda não desenvolvidas pelos estudantes, como:

- Capacidade de comunicação dos esquemas utilizados;
- Colaboração e trabalho em equipe;
- Associação do conteúdo utilizado com situações da realidades;
- Desenvolvimento de esquemas próprios de utilização;

Tendo em vista que uma única atividade desenvolvida não é suficiente para explorar o potencial do instrumento, nem tampouco das possibilidades associadas ao cotidiano dos alunos, prevemos desenvolver um projeto com Modelagem Matemática, volume e utilização do GeoGebra.

Palavras-chave: Volume de sólidos, Sólidos de revolução, GeoGebra, Ensino, Gênese Instrumental.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, S. V. **A Gênese Instrumental na interação com o Geogebra: proposta de uma oficina para professor de matemática**. Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC 134 p. São Paulo, 2012

BORBA, M. de C.; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental: matemática**. Brasília: MEC/SEB, 1997.

DANTAS, Sérgio Carrazedo; MATHIAS, Carmen Vieira. Formas de revolução e cálculo de volume. Ciência e Natura, v. 39, n. 1, p. 142, 2017.

DULLIUS, M. M., QUARTIERI, M. T. (org). **Explorando a matemática com aplicativos educacionais: séries iniciais do Ensino Fundamental**. Lajeado: Ed. Univates, 2015.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática no Ensino Médio - volume 2. Publicação SBM, 2006.

RABARDEL, P. **Homens tecnologias: abordagem cognitiva aos instrumentos contemporâneos**. Paris:Armand Colin, 1995.

SILVA, R. D. N. **Ensino de Pirâmides na construção de aplicativos para smartphones**. 2019. 296f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.