ISSN 2358-8829
Conedu VII Congresso Nacional de Educação
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA MINIMIZAR AS DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Eduardo José de Oliveira Estevão[1]
Tânia Maria Nunes Gonçalves[2]

RESUMO

Este artigo é resultado de uma pesquisa de dissertação, que objetiva descobrir as principais dificuldades que os estudantes possuem no processo de ensino e aprendizagem de álgebra, em especial encontrar soluções para as mesmas, nas perspectivas do desenvolvimento do pensamento algébrico e nas conceções de álgebra e educação algébrica, através da elaboração de atividades. Para determinar estas dificuldades realizou-se uma pesquisa bibliográfica de caráter descritivo e exploratório, objetivando caracterizar e explicar a origem de tais erros recorrentes no ensino de álgebra. Seguindo uma abordagem qualitativa, esta pesquisa também se preocupou em estabelecer relações entre as dificuldades, no sentido de estruturar atividades que possam minimizá-las. A partir disso, desenvolveram-se atividades das quais apresentam-se duas neste artigo, envolvendo a construção do círculo trigonométrico e padrões de sequências numéricas, com o intuito principal de desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes.

Palavras-chave: Dificuldades. Conceções de Álgebra. Pensamento Algébrico. Círculo Trigonométrico. Sequências numéricas.

INTRODUÇÃO

É evidente as dificuldades que os estudantes trazem desde o Ensino Fundamental, relacionadas ao ensino de matemática, que ficam ainda mais percetíveis quando se trata de álgebra. A álgebra na maioria das vezes é encarada apenas como um ramo da Matemática que se preocupa em encontrar o *x* da questão. Isso remete à conceção que estudantes e até mesmo professores possuem, de que ensinar álgebra significa apenas manipulações matemáticas e simplificações de expressões. O ensino de álgebra envolve outros aspectos, nomeadamente, o desenvolvimento do pensamento algébrico. Portanto, o objetivo principal da pesquisa aqui apresentada foi a criação de atividades simples que resolvem dificuldades que os estudantes possuem na aprendizagem de álgebra, em particular a dificuldade em raciocinar.

Na seção *Metodologia* será explicado o procedimento empregue para determinar as dificuldades que estudantes têm relativamente à álgebra, de modo a possibilitar a criação de atividades focadas em solucioná-las. Na seção *Referencial Teórico* serão expostas as conceções da álgebra e da educação algébrica nas quais essas jazem. Na seção *Resultados e*

[1]Mestrando em Matemática pela Universidade Federal de Catalão – UFCAT, eduestevao@hotmail.com.
[2]Professora orientadora: Doutora em Matemática Aplicada, University of Kent – Reino Unido, t.m.n.goncalves@ufg.br.

Discussão serão apresentadas duas atividades desenvolvidas para sanar algumas dificuldades apresentadas, em especial para estimular o pensamento algébrico. Conclui-se o artigo com considerações finais sobre o desenvolvimento de atividades voltadas à eliminação das dificuldades encontradas pelos estudantes no estudo de álgebra.

METODOLOGIA

Para fazer a pesquisa, de foro descritivo, apresentada neste artigo, procedeu-se a um levantamento bibliográfico sobre estudos que tratam dos temas *Dificuldades no Ensino e Aprendizagem de Álgebra*, *Conceções de Álgebra* e *Pensamento Algébrico*. Em seguida, fazendo uma pesquisa exploratória do material colhido, foi possível elaborar atividades que ajudam a resolver as dificuldades encontradas, das quais duas são apresentadas aqui.

REFERENCIAL TEÓRICO

A álgebra é um importante ramo da matemática que relaciona muitos conceitos, fórmulas e propriedades, úteis para as mais diversas atividades humanas e científicas. Para entender-se melhor como a álgebra é/foi encarada durante toda sua evolução, é necessário estudar suas diferentes conceções.

Usiskin (1995) define quatro conceções da álgebra segundo o papel atribuído à variável e a importância dada aos seus diversos usos: a álgebra como aritmética generalizada, a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, a álgebra como estudo de relações entre grandezas e a álgebra como estudo de estruturas. Na primeira conceção, *álgebra como aritmética generalizada*, a variável é encarada como generalizadora de padrões. Na segunda conceção, *álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, ao contrário da primeira conceção, as variáveis são encaradas como incógnitas, ou seja, um termo desconhecido que se pretende determinar. Na terceira conceção, *álgebra como estudo de relações entre grandezas*, as letras assumem diversos valores, expressando relações entre elas, como é o caso das funções. Na quarta e última conceção, *álgebra como estudo de estruturas*, as letras são encaradas como símbolos abstratos, como por exemplo quando lidamos com as operações entre polinômios.

Três períodos da história do ensino de álgebra – antes, durante e depois da matemática moderna, deram origem às conceções de educação algébrica propostas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1992,1993), que dividem o desenvolvimento do ensino de álgebra em três conceções principais: linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica. A primeira conceção, *linguístico-pragmática*, referente ao período antes da matemática moderna, define a álgebra como um instrumento técnico e mecânico para resolver problemas, para a qual basta o estudante apropriar-se do transformismo algébrico para conseguir resolver problemas. Com o movimento da matemática moderna vem a segunda conceção, *fundamentalista-estrutural*, onde o objetivo é de fundamentar a matemática escolar, justificando cada passagem do transformismo algébrico através de propriedades. Após esse movimento, vem a terceira conceção de educação algébrica, *fundamentalista-analógica*, que pretende sintetizar as duas conceções anteriores, de forma a recuperar o valor instrumental da álgebra na resolução de problemas ao mesmo tempo que se preocupa em justificar o cálculo algébrico através de recursos geométrico-visuais.

Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 85) concluem que todas estas conceções possuem algo negativo em comum: “[...] a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica”. Portanto, os estudos dessas conceções de álgebra e educação algébrica sinalizam a necessidade de desenvolver um pensamento que independentemente da linguagem algébrica pode ser manifestado: o pensamento algébrico.

De acordo com Coelho e Aguiar (2018, p. 178), o pensamento algébrico precisa de ser estimulado para crescer e na opinião deles a álgebra oferece um ambiente propício se, no seu ensino, o foco dela for “[...] desenvolver no estudante um pensamento que o auxilie na busca de padrões e analogias quando enfrentar problemas cotidianos.” Deve-se portanto, elaborar atividades que estimulem ou incentivem o desenvolvimento deste pensamento, criando um ambiente favorável para que ele se manifeste. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o pensamento algébrico pode ser caracterizado pelos seguintes aspectos: estabelecer relações ou comparações entre expressões numéricas e padrões geométricos; compreender e tentar exprimir aritmeticamente uma situação-problema; tentar construir vários modelos aritméticos para uma situação-problema; descobrir os vários significados de uma mesma expressão numérica; entender a igualdade como uma equivalência entre duas grandezas ou duas expressões numéricas; simplificar uma expressão aritmética; desenvolver processos de generalização; compreender e tentar exprimir regularidades ou invariâncias; propor formas mais sucintas para expressar situações-problema.

Com base nas conceções de álgebra e educação algébrica aqui apresentadas, conclui-se que o pensamento algébrico vai além da tarefa de calcular, ele dá sentido aos símbolos e às formas como os objetos se relacionam, podendo ser estimulado através da generalização de regularidades e padrões. À medida que este pensamento se desenvolve, o estudante também evolui sua capacidade de exprimir matematicamente situações e problemas, descrevendo assim uma relação de subsistência entre linguagem e pensamento, e não de subordinação (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993). Portanto, o enfoque deste trabalho foi a criação de atividades que estimulam o raciocínio.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através da pesquisa feita em diversas fontes, sintetizam-se no Quadro 1 as principais dificuldades dos estudantes no processo de aprendizagem de álgebra (ARAÚJO, 2008; BEZERRA, 2016; BOOTH, 1995; GIL, 2008; ESTEVÃO, 2020, no prelo; GIL; FELICETTI, 2016; GIRALDO, 2012; GONÇALVES, 2013; PONTE, 2005; SCARLASSARI, 2007; SOCAS; CAMACHO; HERNANDEZ, 1998; STOCCO, 2016; TRUJILLO, 2012; VELOSO; FERREIRA, 2010).

Quadro 1 – Principais dificuldades na aprendizagem da álgebra

Dificuldades dos estudantes
Dificuldade em passar da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa
Dificuldade em interpretar as letras
Dificuldade em pensar
Dificuldade em entender o que lê e exprimir o que pensa
Dificuldade em enxergar a utilidade do que está sendo ensinado
Dificuldade com simplificação de expressões algébricas
Dificuldade com a noção de igualdade
Dificuldade em usar as fórmulas, as propriedades e procedimentos
Dificuldade em generalizar
Dificuldade em memorizar

Fonte: Autoria própria

Ao analisar essas dificuldades, levando em conta os fatores dificultadores – estabelecidos mediante os contextos e atividades em que essas dificuldades surgiram, observou-se que existem muitas interseções entre elas e que algumas delas possuem a mesma origem.

Com o objetivo de ajudar a minimizar as dificuldades supramencionadas, estruturam-se algumas atividades, levando em conta aspectos didáticos que podem levar ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Apresentam-se abaixo duas atividades:

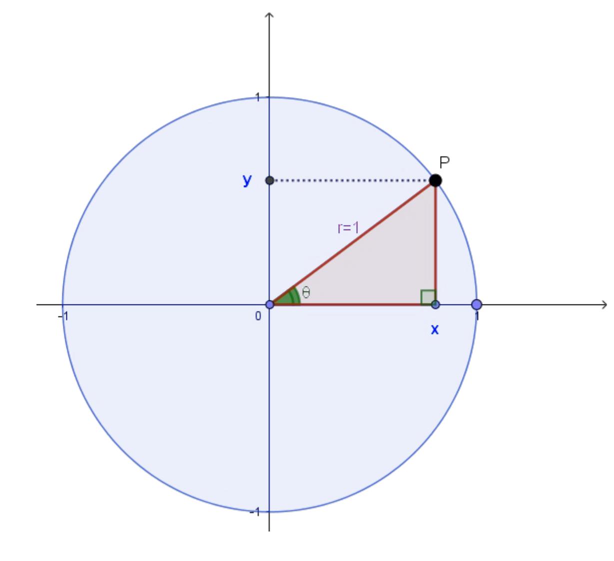
- Construindo o círculo trigonométrico;
- Sequência de números.

Conedu VII Congresso Nacional de Educação
ISSN 2358-8829
Educação como (re)Existência: mudanças, conscientização e conhecimentos.
15, 16 e 17 de outubro de 2020
Centro Cultural de Exposições Ruth Cardoso - Maceió-AL

Na primeira atividade os estudantes construirão, com a ajuda do professor, um círculo de cartolina ou outro material, com raio de 1 decímetro, e alguns triângulos retângulos todos iguais, cuja hipotenusa seja do mesmo tamanho que o raio do círculo (as medidas e materiais utilizados podem ser modificados e adaptados de acordo com o professor). O objetivo desta atividade é que os estudantes construam relações e fórmulas trigonométricas (as quais são expressões algébricas), assim entendendo os seus significados e proveniências, em vez de apenas memorizá-las. A memorização é importante, pois facilita na resolução de problemas. No entanto, às vezes a memória falha e é nesse momento que é crucial saber a origem das fórmulas, pois permite determiná-las e assim usá-las. Ao contrário do que comumente é feito nas salas de aula, apenas apresentar a fórmula e dar exemplos, os estudantes nesta atividade irão compreender como surgem matematicamente estas relações: ao posicionar os triângulos retângulos no círculo trigonométrico, fazendo rotações em torno da origem e reflexões em torno dos eixos cartesianos os estudantes serão capazes de criar hipóteses e compartilhar suas descobertas com toda a classe.

O professor pedirá que os estudantes posicionem os triângulos retângulos, conforme ilustrado no Quadro 2.

Quadro 2 – Círculo trigonométrico com raio igual à hipotenusa do triângulo retângulo

<table>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Da imagem os estudantes concluem que:</td></tr>
<tr><td>$$\sin\theta = \frac{cateto\,oposto}{hipotenusa}$$ $$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$</td></tr>
<tr><td>$$\cos\theta = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa}$$ $$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$</td></tr>
<tr><td>$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria

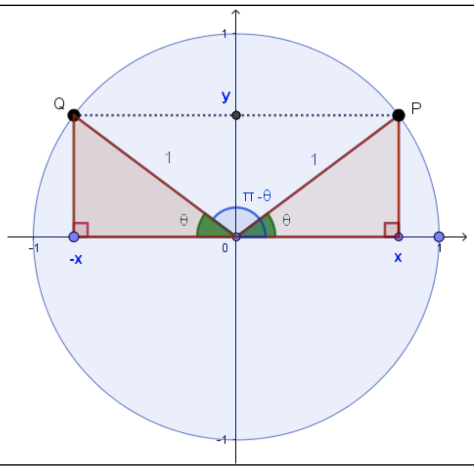
Usando as definições de cosseno e seno, anteriormente aprendidas, os estudantes chegarão à conclusão que à medida que o ponto P se desloca no círculo trigonométrico (sentido horário ou anti-horário), os valores do cosseno e seno de um ângulo θ são lidos, respectivamente, nos eixos do x e do y. Além disso, usando o Teorema de Pitágoras,

ISSN 2358-8829

eles conseguem obter a *Fórmula Fundamental da Trigonometria* e a *equação cartesiana de um círculo centrado na origem de raio 1*.

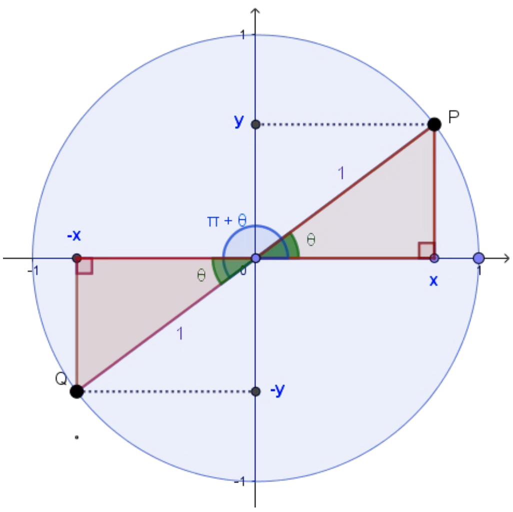
A partir dessa atividade o professor poderá ir formalizando outros conceitos, já que os estudantes estarão mais familiarizados com a ideia de que cada ponto da circunferência está associado ao cosseno e seno de um dado ângulo θ. Por exemplo, um dado ponto P possui como projeções nos eixos das abscissas e ordenadas, os valores de $\cos\theta$ e $\sin\theta$, respectivamente. Ainda através dessa atividade, pode-se também introduzir os conceitos de redução de ângulos dos segundo, terceiro e quarto quadrantes ao primeiro quadrante, usando rotações e reflexões do triângulo retângulo. Os Quadros 3, 4 e 5 ilustram essas ideias.

Quadro 3 – Redução de ângulo do segundo quadrante ao primeiro

	Os estudantes posicionarão os triângulos retângulos de forma que o triângulo do segundo quadrante‡ seja uma reflexão do triângulo do primeiro quadrante em torno do eixo das ordenadas, ou seja, a abcissa do ponto P é simétrica à abcissa do ponto Q e as suas ordenadas são iguais, concluindo assim, que: $\sin(\pi-\theta)=y=\sin(\theta)$; $\cos(\pi-\theta)=-x=-\cos(\theta)$.

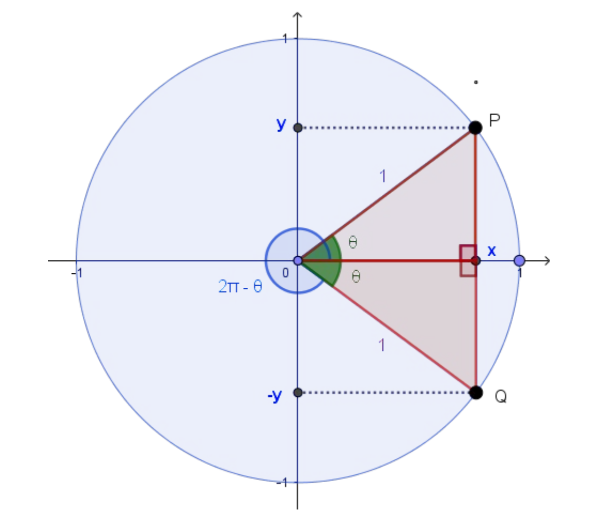
Fonte: Autoria própria
‡ Existe outra redução de ângulo do segundo quadrante ao primeiro, fazendo uma rotação de π/2.

Quadro 4 – Redução de ângulo do terceiro quadrante ao primeiro

	Nesta etapa da construção, os estudantes posicionarão o segundo triângulo retângulo no terceiro quadrante de modo que o ponto P seja simétrico do ponto Q, ou seja, um giro de 180º no sentido anti-horário. Concluindo assim, que: $\sin(\pi+\theta)=-y=-\sin(\theta)$; $\cos(\pi+\theta)=-x=-\cos(\theta)$.

Fonte: Autoria própria

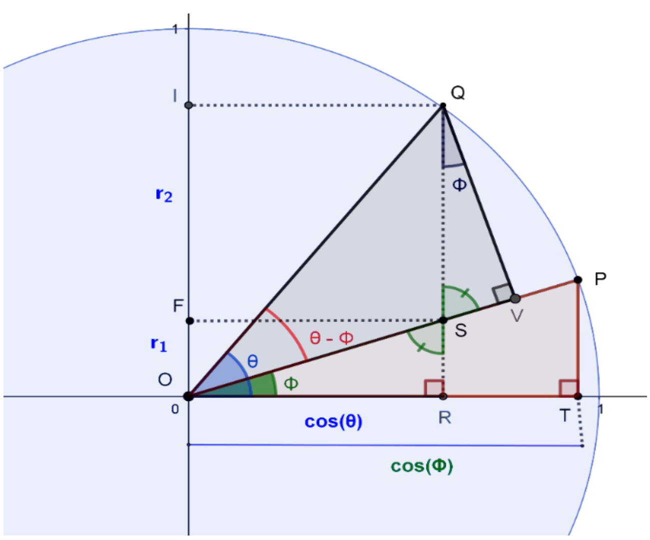
Quadro 5 – Redução de ângulo do quarto quadrante ao primeiro

	Para esta redução, os estudantes posicionarão o segundo triângulo retângulo no quarto quadrante, de modo que este seja uma reflexão do primeiro triângulo em torno do eixo das abscissas. Dessa forma, conclui-se que: $\sin(-\theta) = -y = -\sin(\theta)$; $\cos(-\theta) = x = \cos(\theta)$.

Fonte: Autoria própria

Pode-se também pedir aos estudantes que descubram as fórmulas do cosseno e seno da diferença entre dois ângulos, usando a imagem ilustrada na Figura 1. Para que eles descubram e não se sintam desanimados, devem-se dar dicas. Existem várias formas de determinar essas fórmulas, não necessariamente usando a Figura 1; devem-se incentivar os estudantes a achar várias.

Figura 1 – Diferença entre dois ângulos



Fonte: Autoria própria

Por exemplo, pode-se achar a fórmula do seno da diferença entre dois ângulos como segue. Considere os triângulos *OSR* e *QSV*: estes são semelhantes visto que $O\hat{S}R = Q\hat{S}V$ (ângulos opostos pelo vértice) e $S\hat{R}O = S\hat{V}Q$ (ângulos retos). Portanto, $S\hat{O}R = \phi = S\hat{Q}V$. Da definição de seno temos que $\sin(\theta - \phi) = \overline{QV}$, mas $\overline{QV}$ por sua vez é igual a

$$\overline{QS}\cos(\phi)=r_2\cos(\phi). \quad (1)$$

Também temos que

$$\sin\theta=r_1+r_2 \Leftrightarrow r_2=\sin\theta-r_1, \quad (2)$$

onde r_1 é obtido pela semelhança dos triângulos *OSR* e *OPT*,

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{RS}}=\frac{\overline{OT}}{\overline{RO}} \Leftrightarrow \frac{\sin\phi}{r_1}=\frac{\cos\phi}{\cos\theta} \Leftrightarrow r_1=\cos\theta\frac{\sin\phi}{\cos\phi}. \quad (3)$$

Substituindo r_1 em (2) por (3) e depois substituindo r_2 em (1), obtemos a fórmula para o seno da diferença entre dois ângulos,

$$\sin(\theta-\phi)=\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right)\cos\phi=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi.$$

A partir desta fórmula, os estudantes poderão deduzir várias fórmulas, como por exemplo, o seno da soma de dois ângulos, para isso considerando $\sin(\theta+\phi)=\sin(\theta-(-\phi))$ e as fórmulas do Quadro 5.

A segunda atividade trata da sequências de números, que proporciona aos estudantes a oportunidade de encontrarem a fórmula do *n*-ésimo termo da sequência, válida para todos os termos da sequência. A atividade seria então proposta conforme enunciada no Quadro 6.

Quadro 6 – Atividade sobre a generalização de números em uma sequência

Considere a seguinte sequência de números 1, 3, 6, 10, ... i) Quais são os próximos 2 números da sequência? ii) Mostre que o *n*-ésimo termo da sequência é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. (4)

Fonte: Autoria própria

Para resolver o primeiro item, os estudantes deveriam começar por ver qual é a relação entre números consecutivos. Brincando um pouco com os números, logo percebem que a diferença entre 1 e 3 é 2, entre 3 e 6 é 3, e entre 6 e 10 é 4. Então o próximo será 10+5=15 e a seguir a 15, tem-se 15+6=21. Depois de responder a esta pergunta, é possível que os estudantes percebam que o *n*-ésimo termo é a soma dos *n* primeiros números naturais. Como o segundo item pede para mostrar que o *n*-ésimo termo da sequência é igual a (4), é importante dar umas dicas. Tem várias formas de responder ao segundo item:

a) usando o método de indução sobre $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$;

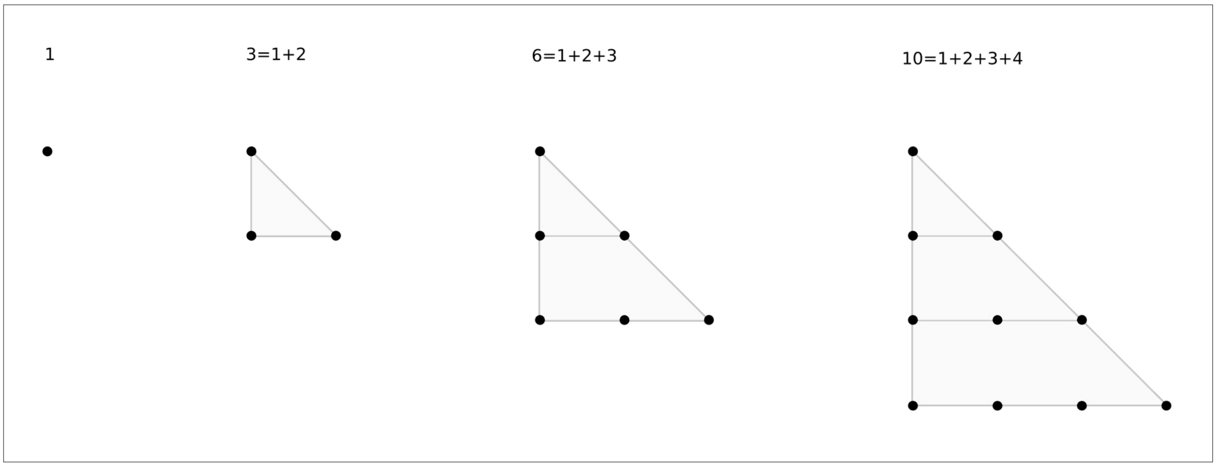
b) usando uma fórmula de recorrência;

c) usando o fato que a soma dos números naturais é uma progressão aritmética;

d) usando representações geométricas dos números da sequência.

A melhor forma para determinar o *n*-ésimo termo neste caso é usando as representações geométricas dos números da sequência, visto que este método apenas implica conhecimentos de geometria básica: área de polígonos. Assim, deve-se apresentar aos estudantes as representações geométricas dos números da sequência, conforme ilustrado na Figura 2 e dizer-lhes que eles deveriam usar esta informação para determinar o *n*-ésimo termo da sequência.

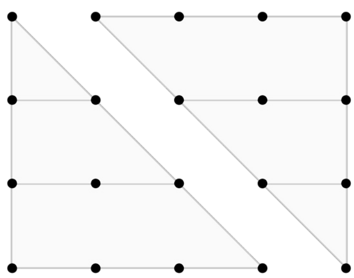
Figura 2 – Representação geométrica dos números da sequência



Fonte: Autoria própria

Olhando para as representações geométricas, os estudantes poderão ficar tentados em usar a fórmula da área de um triângulo para achar o *n*-ésimo termo. Por exemplo, a área do triângulo isósceles com 4 pontos de cada lado dá $(4\cdot4)/2=8$, que é diferente de 10. Este resultado não é surpreendente: estão faltando dois pontos que correspondem às quatro metades de pontos que ficam para fora do triângulo. Considere o retângulo na Figura 3.

Figura 3 – Retângulo



Fonte: Autoria própria

Esse retângulo é composto por 20 pontos, ou seja, 4 vezes 5 pontos. Ao dividir a área do retângulo por 2, obtém-se 10, que corresponde exatamente ao número de pontos presentes no triângulo com 4 pontos de cada lado. Portanto, o triângulo com *n* pontos de cada lado tem metade dos pontos do retângulo *n* por *(n+1)*, ou seja, o *n*-ésimo termo da sequência é

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Estas duas atividades permitiram: desenvolver o pensamento algébrico; por em prática a passagem da linguagem escrita para a linguagem algébrica e vice-versa; treinar a interpretação das letras, simplificação de expressões algébricas, e generalização de padrões e regularidades; familiarizar-se com a noção de igualdade, fórmulas, procedimentos e propriedades; ajudar a memorização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na tentativa de resolver as diversas dificuldades dos estudantes na aprendizagem da álgebra, sugeriram-se aqui duas atividades que desenvolvem o pensamento algébrico, apoiando-se nas conceções de álgebra e educação algébrica. É possível encontrar na dissertação de Estevão (2020, no prelo), outras atividades que desenvolvem o raciocínio e que sanam outras dificuldades do Quadro 1. Nessa obra, ao analisar os fatores dificultadores, verificou-se que existem várias interligações entre as dificuldades, o que poderá ajudar os professores a direcionar seu trabalho de acordo com as barreiras que enfrentam em seu dia a dia profissional. Aqui também foi visto, que com uma mesma atividade pode-se minimizar várias dificuldades.

A construção do círculo trigonométrico permite aos estudantes descobrir como se originam algumas fórmulas trigonométricas. Em virtude disso, possibilita-lhes dar sentido aos conceitos apresentados de forma que consigam memorizá-los, por terem sido compreendidos. Tendo isso em vista, essa atividade ajuda a minimizar as dificuldades em usar fórmulas, propriedades e procedimentos, e em memorizar. Nesta atividade, o pensamento algébrico desenvolve-se à medida que os estudantes estabelecem relações e comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos, que são explorados mediante os giros e/ou reflexões que ocorrem nos triângulos. Para a formulação desta atividade levamos em conta a conceção de álgebra de Usiskin (1995), na qual a variável é encarada como argumento, e a conceção de educação algébrica fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), onde a geometria é usada para justificar os cálculos e procedimentos algébricos.

Na segunda atividade, o pensamento algébrico desenvolve-se à medida que os estudantes estabelecem relações e comparações entre expressões algébricas e padrões geométricos, e desenvolvem processos de generalizações, escrevendo suas observações em linguagem algébrica. Assim, este tipo de atividade ajuda a combater as dificuldades em generalizar e em pensar, dado que instigam os estudantes a encontrar relações entre os termos, observando as mudanças. Nesta atividade aliaram-se as conceções de álgebra como aritmética generalizada proposta por Usiskin (1995), e a conceção de educação algébrica fundamentalista-analógica de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Com a apresentação destas atividades, enfatizou-se a importância em elaborar atividades que não sejam apenas técnicas e mecânicas, mas que dêem aos estudantes a oportunidade de vivenciar as várias conceções de álgebra, de maneira que desenvolvam o pensamento algébrico à medida que dão sentido ao que é ensinado, e consequentemente as dificuldades são superadas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. A. de. Ensino de Álgebra e Formação de Professores. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, s.l., v. 10, n. 2, mar. 2008.

BEZERRA, A. R. L. **Ensino da álgebra**: uso da linguagem e do pensamento algébrico como ferramenta de aprendizagem na educação básica. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – polo da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.) **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

ESTEVÃO, E. J. de O. **Dificuldades encontradas no estudo de álgebra no ensino médio**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Catalão, Catalão, 2020. No prelo.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *In*: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO: investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005, Lisboa.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. 2008. Dissertação (Mestrado Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

GIL, K. H.; FELICETTI, V. L. Reflexões sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem da Álgebra por Estudante da 7ª Série. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Aracaju, v. 1, n. 1, p. 19-35, ago. 2016.

GIRALDO, V.; CAETANO P.; MATOS F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GONÇALVES, J. A. **Dificuldades dos alunos que iniciam o estudo da álgebra**. 2013. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Faculdade de Pará de Minas, Pará de Minas, 2013.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. *In*: VALE, I. et al. (eds.) **Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa:SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

SOCAS, M. M.; CAMACHO, M.; HERNANDEZ J. Analisis didactico del lenguage algebraico en la enseñanza secundaria. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado: didácticas de las matemáticas para los profesores de educación secundaria**, n. 32, p.73-86, mai. 1998.

STOCCO, A. C. A álgebra e suas dificuldades no ensino médio. *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE**. Curitiba: SEED/PR., 2014. v. 1. (Cadernos PDE).

TRUJILLO, E. S. G. **Del lenguaje natural al lenguaje algebraico**: el significado de la variable: una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas. 2012. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Nacional de Colômbia, Bogotá, 2012.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da Escola Média e utilização de variáveis. Tradução de: Hygino H. Domingues. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VELOSO, D. S.; FERREIRA, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra. *In*: X SEMANA DE MATEMÁTICA e II SEMANA DA ESTATÍSTICA, 10., 2010, Ouro Preto. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto: Editora da UFOP, 2010. p. 59-65.