ISSN: 2358-8829

EQUAÇÕES FUNCIONAIS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO

Alex Pereira Bezerra [1]
Baldoino Sonildo da Nóbrega [2]
Luis Vinicios Oliveira Fernandes [3]
Sara Lopes Silva [4]

RESUMO

As equações funcionais são relevantes em diversos campos da matemática com aplicações práticas em diferentes áreas. Essas equações permitem descrever e modelar fenômenos complexos do mundo real, desde o crescimento populacional até a propagação de doenças, o movimento de objetos físicos, o comportamento econômico entre outros. Elas ajudam a entender as relações entre as variáveis e a prever seu comportamento em diferentes situações. A resolução dessas equações estimula habilidades de pensamento lógico, criatividade e análise crítica, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Devido a essa importância, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre as equações funcionais e suas aplicações. Buscamos compreender as propriedades das equações funcionais e explorar sua utilidade na resolução de desafios matemáticos e aplicações em outras áreas do conhecimento. Inicialmente, realizamos uma revisão bibliográfica abrangente para entender os fundamentos teóricos das equações funcionais. Analisamos diferentes técnicas e estratégias utilizadas para resolver problemas que envolvem essas equações. Em seguida, avaliamos uma seleção de problemas, destacando a aplicação prática em diferentes contextos (juros compostos, desintegração radioativa, cálculo de área e problemas de matemática olímpica). Os resultados mostraram que as equações funcionais desempenham um papel importante para o ensino de matemática e através de sua aplicação adequada é possível simplificar a complexidade dos desafios, encontrando soluções eficientes.

Palavras-chave: Equações funcionais, Ensino de Matemática, Raciocínio lógico.

INTRODUÇÃO

A matemática é uma linguagem universal que permeia todos os campos do conhecimento e desempenha um papel central na compreensão do mundo que nos cerca. Ela oferece ferramentas essenciais para a compreensão de fenômenos reais, o que facilita a solução de problemas, a tomada de decisões e o progresso em diversas áreas. A matemática não se limita apenas a cálculos e fórmulas; ela também estimula o desenvolvimento cognitivo, desafiando a mente a pensar de forma crítica, resolver problemas complexos e aplicar princípios lógicos a

---

[1] Mestre pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, alex.bezerra@ifpb.edu.br;
[2] Doutorando do Curso de Engenharia de Processo da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, baldoino.nobrega@ifpb.edu.br;
[3] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba – IFPB, vinicios.luis@academico.ifpb.edu.br
[4] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba – IFPB, lopes.sara@academico.ifpb.edu.br;

ISSN: 2358-8829

diversas situações. Essas habilidades são valiosas em todos os aspectos da vida. Uma das áreas mais intrigantes e poderosas da matemática é o estudo das equações funcionais, um ramo que se destaca por sua capacidade de modelar fenômenos complexos e descrever o comportamento de sistemas dinâmicos em uma ampla variedade de contextos.

Diferentemente das equações algébricas tradicionais, onde a incógnita é apenas um número ou uma variável, nas equações funcionais a incógnita é uma função. Essas equações se concentram na investigação de funções desconhecidas que satisfazem uma relação funcional. As equações funcionais desempenham um papel essencial na previsão de eventos, na otimização de processos e na resolução de problemas complexos que desafiam a imaginação humana. Desde o estudo do crescimento populacional até a análise do comportamento econômico, passando pela modelagem de fenômenos físicos complexos, essas equações são uma ferramenta indispensável para cientistas, engenheiros e pesquisadores de todas as áreas (BEZERRA, 2014).

A história das equações funcionais é marcada por uma série de matemáticos que deixaram suas contribuições ao longo dos séculos. Entre eles estão: Leonhard Euler, que estudou as equações funcionais lineares; Joseph Fourier, que trabalhou com séries de Fourier e equações diferenciais; Augustin Louis Cauchy, que estudou as equações funcionais de Cauchy; e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, que trabalhou com equações funcionais em sua teoria dos números. Além dos autores mencionados anteriormente, outros nomes importantes incluem: Évariste Galois, que trabalhou com equações funcionais em sua teoria de grupos; Georg Cantor, que estudou as propriedades das funções contínuas e descontínuas; e Stefan Banach, que desenvolveu a teoria das equações funcionais lineares e introduziu o conceito de espaço de Banach (BOYER, 2012; BEZERRA, 2014).

Os conceitos sobre equações funcionais foram estudados bem antes de sua formalização. Exemplos iniciais dessas equações podem ser encontrados no trabalho do matemático Nicole Oresme do século XIV (BEZERRA, 2014). Ele forneceu uma definição indireta de funções lineares por meio de uma equação funcional e também explorou as relações geométricas entre variáveis. A formalização e o desenvolvimento teórico das equações funcionais tiveram início com Augustin Louis Cauchy, cujo trabalho influenciou significativamente o campo. Sua famosa Equação Funcional de Cauchy desafiou matemáticos a investigar as funções, revelando-se um marco importante na história das equações funcionais.

Além das aplicações no mundo real, as equações funcionais é um conceito relevante na resolução de problemas de matemática olímpica. As principias olímpiadas de Matemática tais como OBM (Olimpíada Brasileira de matemática) e IMO (Olimpíada Internacional de Matemática) quase sempre abordam questões que exigem o entendimento desse tema.

Portanto, no âmbito do ensino de matemática, essas equações são importantes, pois fomentam o desenvolvimento do pensamento lógico e promovem a capacidade de resolver problemas. À medida que os educadores integram problemas que envolvem equações funcionais no currículo escolar, eles têm a capacidade de estimular a criatividade dos alunos além de trabalhar com abstrações que ajudam a desenvolver a capacidade de pensar de forma abstrata e aplicar essas habilidades a diferentes contextos. Isso pode tornar o ensino de matemática mais envolvente e significativo para os estudantes.

Diante disso, o objetivo desse trabalho é apresentar um estudo sobre as equações funcionais e suas aplicações. Para resolver problemas envolvendo equações funcionais existem uma variedade de teorias e métodos. Uma das técnicas é o Método das Substituições que consiste em encontrar substituições apropriadas para transformar a equação funcional em um modo mais fácil de resolver. Além deste, a resolução pode ser obtida por transformadas, métodos numéricos e métodos de iteração. Neste trabalho apresentaremos apenas conceitos e aplicações da famosa equação funcional de Cauchy e problemas de matemática olímpica que exigem técnicas simples de substituição.

METODOLOGIA

Para realizar esta pesquisa, empregamos uma metodologia de caráter exploratório, na qual foi conduzido uma revisão bibliográfica que teve como ponto inicial o acesso a materiais didáticos. Foram consultados livros, dissertações, teses e ampliado as buscas nos ambientes do Google Academic, Sciello e Portal da Capes.

Inicialmente buscamos compreender os principais fundamentos das equações funcionais de Cauchy, destacando exemplos e aplicações. Exploramos a utilidade dessas equações para mostrar algumas demonstrações das fórmulas de juro composto, do cálculo da área do retângulo e da desintegração radioativa. Foram também selecionados problemas olímpicos para mostrar a utilidade das técnicas de substituição nas equações funcionais.

ISSN: 2358-8829

Equação Aditiva de Cauchy

Uma equação funcional da forma:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.0}$$

é chamada Equação Aditiva de Cauchy (SAHOO, 2011).

Uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é aditiva se satisfaz a Equação Funcional Aditiva de Cauchy, isto é,

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), para\ todo\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.1 Uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita racionalmente homogênea se, $\varphi(rx) = r\varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $r \in \mathbb{Q}$.

Proposição 1.1 Se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação aditiva de Cauchy, então φ é racionalmente homogênea. Além disso, existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\varphi(r) = cr$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Teorema 1.1 (Cauchy) Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função aditiva. Se φ é contínua, então φ é linear, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = cx$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2 Seja φ uma solução da equação (1.0). Se φ é contínua em um ponto, então, ela é contínua em todos os pontos.

Equação Exponencial de Cauchy

A equação funcional exponencial de Cauchy é:

$$f(x + y) = f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Teorema 1.2: A solução geral da equação exponencial de Cauchy, tem a seguinte forma:

$$\varphi(x) = e^{\mathrm{A(x)}}, \tag{1.2}$$

onde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva, ou $\varphi(x) = 0$.

Definição 1.2 Uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma função exponencial real se satisfaz

$$f(x + y) = f(x)\, f(y), \tag{1.3}$$

para todo x, $y \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.3 Toda solução φ da equação funcional (1.1) é da forma:

$$\varphi(x) = 0 \text{ ou } \varphi(x) = e^{A(\ln(1+\mathrm{nx}))}, \tag{1.4}$$

onde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva.

ISSN: 2358-8829

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES FUNCIONAIS

Aplicação 1. Área do retângulo

A Equação Funcional de Cauchy (Aditiva), é da seguinte forma:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}.,$$

sabemos que a solução abaixo satisfaz a equação:

$$f(x) = cx, \tag{1.5}$$

com c uma constante qualquer, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Considere um retângulo cujo comprimento da base é a e o comprimento da atura é b.

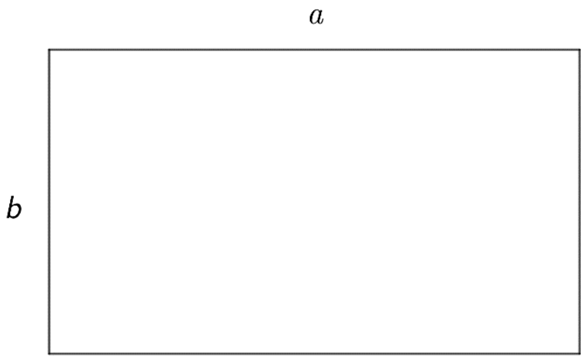

Figura 1.1

É evidente que a área de um retângulo dependerá da altura e da base. Assim, a área A, do retângulo é uma função de é $a\ e\ b$, isto é,

$$A = f(a, b) \qquad (1.6|)$$

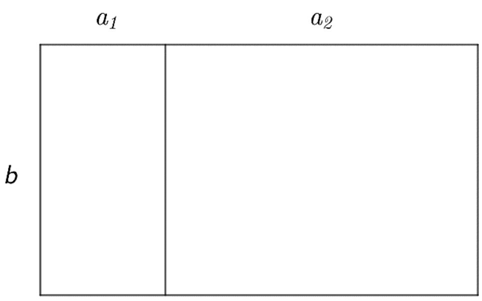

Figura 1.2

Dividindo o retângulo em dois retângulos menores, por um segmento paralelo à altura, de modo que $a = a_1 + a_2$, com $a_1, a_2 \in]0, +\infty]$ (1.7). Note que a e b são números positivos e diferentes de zero, logo, $f(a, b) \geq 0$.

Os retângulos possuem altura b, o de base a_1 tem área igual a A_1, já o retângulo de base a_2 tem área igual a A_2, sabemos que $A_1 + A_2 = A$ (1.8).

ISSN: 2358-8829

É fácil notar que, $A_1 = f(a_1, b)$ e $A_2 = f(a_2, b)$, logo por (1.6) e (1.8):

$$f(a,b) = f(a_1,b) + f(a_1 + b) \text{ com } a_1, a_2 \text{ e } b \in [0, +\infty[. \tag{1.9}$$

Note que b é uma constante. Por (1.7) e (1.9),

$$f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b). \tag{1.10}$$

Por construção, considerando a figura 1.1, podemos dividir o retângulo por um segmento paralelo a base, onde obteremos:

$$f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2), \tag{1.11}$$

com b_1 e $b_2 \in]0, +\infty[$.

Utilizando a solução da Equação Funcional Aditiva de Cauchy (1.5) em (1.10), teremos:

$$f(a,b) = ka, \tag{1.12}$$

onde k é uma constante que depende de b e $k \geq 0$, assim

$$f(a,b) = k(b) \cdot a, \tag{1.13}$$

usando (1.13) em (1.11)

$$k(b_1 + b_2)a = k(b_1)a + k(b_2)a,$$

ou seja,

$$k(b_1 + b_2) = k(b_1) + k(b_2), \tag{1.14}$$

aplicando novamente o resultado (1.5) em (1.14)

$$k(b) = \beta \cdot b \tag{1.15}$$

Com β uma constante real abstrata, por (1.13) e (1.15) concluímos que:

$$f(a,b) = \beta \cdot b \cdot a$$

Sabendo que $f(a,b) \geq 0$ o que força β a ser uma constante positiva.

Aplicação 2. Juros compostos

Os juros compostos satisfazem as seguintes equações:

$$f(x + y, t) = f(x,t) + f(y,t) \tag{2.0}$$

$$f(x, t + s) = f(f(x,t), s), \tag{2.1}$$

para todo $x, y, t, s \in \mathbb{R}_+$.

Perceba que x e y na primeira equação representam capitais aplicados no mesmo tempo t, ou seja, que não faz diferença dividir o capital, considerando uma mesma quantidade de

ISSN: 2358-8829

tempo. Já na segunda equação t e s representam o tempo, onde t é o primeiro período e s o incremento do período, que no caso a equação representa que o investimento x aplicado em um tempo $t+s$ é igual ao valor do capital $f(x,t)$ aplicado em um período s.

Considere (2.0) contínua e pelo Teorema 1.1

$$f(x,t) = c(t) \cdot x, \tag{2.2}$$

aplicando (2.2) em (2,1),

$$c(t+s) \cdot x = c(t) \cdot c(s) \cdot x,$$

logo,

$$c(t+s) = c(t) \cdot c(s),$$

onde chegamos na Equação Funcional de Cauchy (logarítmica), que tem solução da forma

$$c(t) = e^{\lambda t}$$

λ é uma constante real qualquer, fazendo $\lambda = Ln(1+r)$, temos

$$c(t) = \left(e^{Ln(1+r)}\right)^t,$$

portanto,

$$c(t) = (1+r)^t \tag{2.3}$$

substituindo (2.3) em (2.2),

$$f(x,t) = x(1+r)^t$$

onde, $r \geq 0$.

Aplicação 3. desintegração radioativa

Considerando m_0 a massa inicial do elemento radioativo e m_t a massa presente no corpo ao decorrer do tempo t. Veremos que $f(t)$ será a relação entre a massa da substância presente no tempo com a massa inicial, de forma que:

$$m(t) = m_0 f(t) \tag{3.0}$$

A quantidade do elemento radioativo no momento $t+h$ poderá ser dito de duas maneiras distintas:

$$m(t+h) = m_0 f(t+h) \tag{3.1}$$

ISSN: 2358-8829

$$m(t+h) = m_0 f(t) f(h) \tag{3.2}$$

Ao aumentarmos a unidade de tempo para $t + h$, a quantidade de substância vai corresponder a:

$$m(t+h) = m_0 f(t+h), \;\; t, h \in \mathbb{R}_+. \tag{3.3}$$

Logo, o fenômeno ocorrerá da seguinte forma:

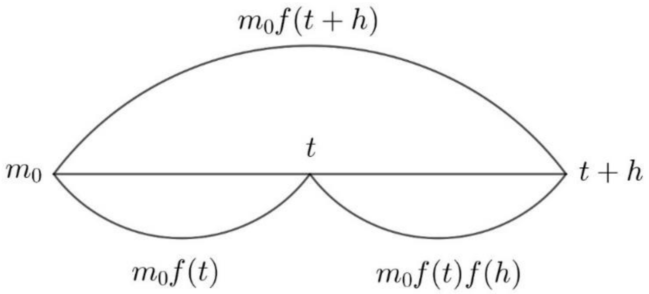

Figura 1.3

Sendo assim,

$$m_0 f(t+h) = m_0 f(t) f(h), \;\; t, h \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4}$$

De acordo com a solução geral da equação funcional exponencial de Cauchy, temos:

$$f(x) = e^{\alpha x}, \tag{3.5}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Portanto, a função f vai ser dita como contínua, ou seja, como a solução da equação funcional exponencial de Cauchy é expressa por (3.5). Substituindo x por t:

$$f(x) = e^{\alpha t}, \; \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Desse modo:

$$m(t) = m_0 f(t) = m_0 e^{\alpha t} \tag{3.7}$$

Como a massa $m(t)$ irá decrescer ao decorrer do tempo, a constante α deverá ser negativa, assim:

$$\alpha = -\gamma, \qquad \gamma > 0. \tag{3.8}$$

Constatamos que:

$$f(t) = m_0 e^{-\gamma t}, \tag{3.9}$$

onde a constante γ é denominada constante de decaimento.

Problemas Olímpicos

Problema 1. (OBM/2001 – 2ª Fase): Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$, para todos os reais x e y.

Fazendo $x = y = 0$ na equação dada, temos:

$$f(0) = f(0) + f(0) + 8.0.0 + 115$$

Somando $(-f(0))$ em ambos os membros, concluímos que:

$$f(0) = -115 \qquad \text{(i)}$$

Sabemos que o fato da função ser par conseguimos substituir, $y = -x$:

$$f(x - x) = f(x) + f(-x) + 8x(-x) + 115$$

Desenvolvendo:

$$f(0) = 2f(x) - 8x^2 + 115 \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), obtemos:

$$-115 = 2f(x) - 8x^2 + 115$$

Organizando:

$$2f(x) = 8x^2 - 115 - 115$$

Sendo assim, concluímos que:

$$f(x) = 4x^2 - 115$$

Problema 2. (OBM) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 999$ e $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ para todo n inteiro positivo. Determine o valor de $f(1998)$.

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função que $f(1) = 999$ e

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n), \forall n \in \mathbb{N} \qquad \textbf{(i)}$$

para não ocorrer ambiguidade fazemos $n = z$ em **(i)**

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(z) = z^2 f(z), \qquad \textbf{(ii)}$$

por recorrência fazendo $n = z + 1$ em **(i)** com $z \in \mathbb{N}$ note que:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(z) + f(z + 1) = (z + 1)^2 f(z + 1). \qquad \textbf{(iii)}$$

Subtraindo **(ii)** de **(iii)** veja:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(z) + f(z+1) - \big(f(1) + f(2) + \cdots + f(z)\big)$$
$$= (z+1)^2 f(z+1) - (z^2 f(z)),$$

Realizando as devidas relações de sinais,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(z) + f(z+1) - f(1) - f(2) - \cdots - f(z)$$
$$= (z+1)^2 f(z+1) - z^2 f(z),$$

reorganizando a equação,

$$f(1) - f(1) + f(2) - f(2) + \cdots + f(z) - f(z) + f(z+1) = (z+1)^2 f(z+1) - z^2 f(z),$$

logo,

$$f(z+1) = (z+1)^2 f(z+1) - z^2 f(z),$$

$$f(z+1) = (z^2 + 2z + 1) f(z+1) - z^2 f(z),$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação,

$$f(z+1) = z^2 f(z+1) + 2z f(z+1) + 1 f(z+1) - z^2 f(z),$$

pela lei do cancelamento, e somando $z^2 f(z)$ em ambos os membros,

$$z^2 f(z) = z^2 f(z+1) + 2z f(z+1)$$

colocando $f(z+1)$ em evidencia, temos:

$$z^2 f(z) = f(z+1)(z^2 + 2z)$$

Dividindo ambos os membros$(z^2 + 2z)$ temos, como $z \neq 0$:

$$\frac{z^2 f(z)}{z^2 + 2z} = f(z+1)$$

Segue que,

$$\frac{z^2 f(z)}{z(z+2)} = f(z+1),$$

onde obtemos,

$$\frac{z f(z)}{(z+2)} = f(z+1)$$

ISSN: 2358-8829

Multiplicando ambos os membros por $(z+2)$,

$$zf(z)=f(z+1)(z+2)$$

Perceba que no primeiro membro o argumento de f multiplica a própria f, porém, não ocorre no segundo membro da igualdade, se multiplicarmos ambos os membros por $(z+1)$ (argumento de f no segundo membro) note que:

$$f(z)z(z+1)=f(z+1)(z+1)(z+2). \qquad \textbf{(iv)}$$

Perceba que chamando $g(x)=f(x)x(x+1)$ **(v)** com $x\in\mathbb{N}$ e fazendo $x=z$ e depois $x=z+1$

$$g(z)=f(z)z(z+1) \qquad \textbf{(v)}$$

e

$$g(z+1)=f(z+1)(z+1)(z+2) \qquad \textbf{(vi)}$$

pela equação **(iv)**, **(v)** e **(vi):**

$$g(z)=g(z+1)$$

Por indução, $g(1)=g(2)$, $g(2)=g(3)=\cdots=g(z)=g(z+1)=g(1)$ **(viii)**, ou seja, g é constante para z natural.

Fazendo $x=1$ em **(v)**,

$$g(1)=f(1)\cdot 1\cdot 2$$

por hipótese $f(1)$ é igual a 999, logo,

$$g(1)=1998$$

por **(viii)** g(z)=1998, isolando f(z) em **(v)** e substituindo g(z)=1998, temos que

$$f(z)=\frac{1998}{z(z+1)}$$

Onde encontramos a solução fazendo $z=1998$, ou seja, queremos saber $f(1998)$

$$f(1998)=\frac{1}{1999}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi apresentar um estudo sobre as equações funcionais e suas aplicações. Observamos que é possível chegar a fórmulas matemáticas, como a área do retângulo, juros compostos, desintegração radioativa através das equações funcionais. Verificou-se também que a partir dos métodos simples de substituições aplicados com as equações funcionais, problemas olímpicos inicialmente considerados complexos se tornam fáceis e com soluções acessíveis. Isso demonstra a importância dos fundamentos das equações funcionais tanto para o ensino de matemática como também para o desenvolvimento do aluno.

É possível inferir que a incorporação dos conceitos de equações funcionais no ensino de matemática proporciona o acesso a um nível mais elevado dessa disciplina, promovendo habilidades e desafios para os alunos em sala de aula. Para estudos futuros, outras equações funcionais e métodos de resolução podem ser investigados, como as equações de D'Almenbert, Jensen e Pexider.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Editora Blucher, São Paulo, 2012.

BEZERRA, A. **Uma introdução às equações funcionais**. Dissertação (mestrado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, p. 49. 2014.

GOMES, C. S. G.,Revista Eureka-Equações Funcionais para os mais Jovens, nº 37.

SAHOO, Prasanna K.; KANNAPPAN, Palaniappan. **Introduction to functional equations**. CRC press, 2011.

SMALL, C. G., Functional Equations and How to Solve Them. Problems Books in Mathematics, 2007.