

## **ATRIBUINDO SIGNIFICADO À GEOMETRIA DOS FRACTAIS UTILIZANDO COMO RECURSO DIDÁTICO O CALEIDOSCÓPIO DE BASE TRIANGULAR REGULAR**

**Hélio Oliveira Rodrigues:** UDELMAR/CL; IFPE-EaD; FAINTVISA/PE  
**Mariluce Sinézia dos Santos:** FAINTVISA/PE

### **RESUMO**

A presente pesquisa tem por objetivo mostrar a importância da utilização do caleidoscópio de base triangular regular como recurso didático no ensino da Geometria dos Fractais. A relevância do estudo se caracteriza a partir das diferenças existentes entre a geometria euclidiana clássica e a geometria fractal, pois, enquanto a primeira ensinada nas escolas apresenta dimensões bem definidas e quantificadas, a segunda mostra infinitas possibilidades através de suas dimensões, podendo inclusive, apresentar números fracionários de tal forma a permitir um melhor ajuste às condições naturais de qualquer objeto de estudo. Neste sentido, a partir dessa compreensão surgiu a ideia de buscar uma alternativa de ensino, que pudesse contribuir com o processo ensino aprendizagem através das estruturas geométricas em função de suas simetrias, utilizando como recurso didático o caleidoscópio. O estudo teve como campo de pesquisa uma escola da rede privada da Região Metropolitana do Recife, onde da pesquisa participaram 31 (trinta e um) estudantes do Ensino Fundamental e 29 do Ensino Médio. Os procedimentos metodológicos foram desenvolvidos em dois momentos, ou seja, no primeiro todos os alunos envolvidos na pesquisa foram reunidos para participar da socialização de um texto de apoio abordando a geometria dos fractais. No segundo momento foi desenvolvida uma oficina apenas com os alunos do Ensino Fundamental, para construção de um caleidoscópio artesanal. Os resultados obtidos apontaram que a geometria dos fractais é de grande importância para o aprendizado dos estudantes principalmente, quando se diz respeito às formas geométricas não definidas.

**Palavras chave:** Geometria Fractal, Formas Geométricas e Recursos Didáticos.

### **INTRODUÇÃO**

Após anos de trabalho lecionando como professora no Ensino Fundamental e Médio foi possível perceber as dificuldades encontradas pelos estudantes no que se refere ao entendimento da Geometria Clássica, tanto no que se diz respeito ao seu aspecto conceitual quanto na resolução de problemas. A resposta para tal pergunta surge quando posteriormente através de estudos mais específicos foi possível perceber que um dos fatores que contribuem para o não entendimento da Geometria pelos estudantes é que o conhecimento geométrico que se ensina em grande parte nas escolas, está restrito a Geometria Euclidiana, mesmo as diretrizes curriculares da Rede Pública de Educação Básica de Pernambuco, sugerir a utilização de noções geométricas não euclidianas. Diante deste fato surgiu a ideia de propor um resultado didático que pudesse contribuir com o professor no ato do ensino e com a aprendizagem do estudante na sala de aula, a partir da geometria dos fractais, pois através dela

muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica podem ser percebidas pelos fractais. Isto está de acordo com as concepções de Zuin (2002), quando ele aponta que os currículos Escolares do Ensino fundamental sofreram grande mudança com a Lei n. 5692, 11 de Agosto de 1971 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que fazia obrigatório a integração da Educação Artística a todas as séries dos cursos de 1º e 2º grau integrando-a outros componentes curriculares, de Ávila (2010), quando ele afirma que as Geometrias não Euclidianas provocaram mudanças e o aprimoramento do sistema axiomático de Euclides, que voltou a ser estudado com cuidado e reconsiderado. Ou seja, a Geometria começou a passar por mudanças significativas a partir do estudo da geometria não Euclidiana. Segundo Garbi (2006), os principais geômetras que se lançaram ao questionamento de uma geometria que era considerada intocável e iniciaram a tentativa de demonstrar o quinto postulado usando os quatro anteriores e que de alguma forma provocaram algumas mudanças significativas. Garbi em suas considerações afirma que foi Girolano Saccheri (1667–1733), padre jesuíta italiano quem encontrou os primeiros teoremas não euclidianos.

A ideia dos fractais começou a ser desenvolvida a partir das concepções de Mandelbrot (1976), quando a partir de muitos estudos no referido campo, criou o termo *fractal*, é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original, quebrando desta forma a concepção de que os cálculos da Geometria em geral só poderiam ser desenvolvidos a partir da Geometria Euclidiana Clássica.

### **Problemas de Pesquisa**

Qual a importância da utilização do caleidoscópio como recurso didático no ensino da Geometria dos Fractais no Ensino Fundamental?

### **Objetivo Geral**

Compreender a formação das estruturas geométricas a partir de suas simetrias através do caleidoscópio.

### **Objetivos Específicos**

- Levantar dados sobre a formação das estruturas geométricas complexas e irregulares a partir do caleidoscópio;
- Analisar como se dá a formação das estruturas geométricas através do caleidoscópio;
- Identificar a simetria das estruturas geométricas formadas pelo caleidoscópio a partir da observação;

## **Breve Relato Histórico Sobre a Geometria dos Fractais**

A ideia da Geometria Fractal teve sua origem a partir de trabalhos de alguns matemáticos entre 1875 e 1925, esses trabalhos revelaram alguns objetos que se supunha não terem grande valor científico, mas com o desenvolvimento de estudos e pesquisas, os fractais constituíram-se em uma área importante de investigação matemática. Apresentando-se com imagens de objetos abstratos, tendo como características do todo ser infinitamente multiplicado por cada parte, os fractais observados de forma impactante estão fora da compreensão da mente humana, porém a partir da sistematização da lógica visual tornam-se compreensíveis e observáveis.

Dentre muitos pesquisados que se aprofundaram sobre os fractais, há aqueles que se destacam Karl Weierstrass considerado um dos percussores, em que 1872 a partir de estudos mais específicos apresentou exemplos de funções contínuas em seu domínio, Benoît Mandelbrot que aparece com destaque neste campo de estudo, sendo inclusive, considerado um dos grandes estudiosos da arte fractal, onde através do seu livro *Les objets Fractals: Forme, Hasard et dimension* os fractais receberam destaque por utilizar o termo fractal para descrever um número de fenômenos matemáticos que pareciam exibir comportamento surpreendente. Todos estes fenômenos envolviam a definição de alguma curva ou algum conjunto através do uso de algumas funções ou algoritmos recursivos. Entre os estudos realizados tais fenômenos pode-se destacar o de George Cantor em sua teoria dos conjuntos. O conjunto de Cantor é talvez o primeiro objeto reconhecido como fractal. Embora não possua o apelo visual da maioria dos fractais, esse conjunto é peça fundamental no estudo dos fractais e dos sistemas dinâmicos (JANOS, 2008, p.12). Cantor também influenciou fortemente os fundamentos da matemática, entre eles a definição de infinito que hoje utilizamos. Segundo Cantor (apud Janos, 2008, p. 13) um conjunto infinito é aquele que pode ser colocado em correspondência um a um com um subconjunto próprio de se mesmo. Um importante estudo sobre os fractais foi realizado por Koch em 1904, onde na teoria da curva aponta que o segredo para se obter um objeto fractal é continuar repetindo isso, sem parar. Outra consideração importante de Koch, diz respeito a relação existente entre a curva de Koch e os flocos de neve, pois, se for traçada uma curva de Koch fechada chamada de floco de neve, ela definirá uma figura plana que tem uma área finita, mas um perímetro infinito. Outra teoria importante sobre o estudo da geometria dos fractais é a teoria conhecida como o Tapete de Sierpinski. Nesta teoria Sierpinsky, aponta que um conjunto pode ser expresso como a união de oito subconjuntos congruente e não sobreposto, onde cada um dos quais é congruentes à contração do conjunto original.

Tais considerações ficam bem demarcadas, quando se estuda a teoria de Sierpinski a partir do triângulo de Sierpinsky e formar o Tapete de Sierpinsky, analisando o tapete a partir dessa teoria pode ser observado que o padrão intrincado de triângulos continua para sempre em escala menor. A Geometria Fractal vem se estruturando, graças ao desenvolvimento da informática. Apesar de suas inúmeras aplicações e utilidades, a falta de ferramentas adequadas para sua aplicabilidade em diversas situações tem impossibilitado a resolução de muitos problemas, por isso, a busca por uma teoria completa e unificada se faz necessário, para que a humanidade possa lidar com os fenômenos imprevisíveis da natureza (RODRIGUES e BARBOSA, 2007).

### **Utilização dos Recursos Didáticos e suas Perspectivas de Ensino a Partir dos PCN's**

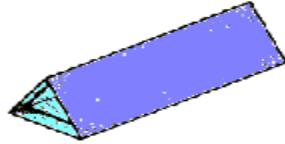
O processo educacional vem passando por transformações constantes no que diz respeito à didática, ou seja, a utilização dos recursos didáticos, onde se verifica que a utilização dos recursos didáticos é fator fundamental para facilitar a aprendizagem do estudante, e isto não ficam de fora da Geometria.

De acordo com Niemann (2012), os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's apresenta algumas críticas em relação às tendências tradicionais, sobre o ensino dos conteúdos matemáticos, pois, o mesmo é feito através da exposição de definições, exemplos e demonstrações, seguidos de exemplos de exercícios e aplicações. Niemann aponta que todo novo conhecimento deve ser construído a partir de conceitos, apoiando-se sobre os conhecimentos anteriores que, ao mesmo tempo, são modificados e adquiridos. Para Moreno (2006, p. 51), na interação desenvolvida por um estudante em situação de ensino, são utilizados conhecimentos anteriores, onde o mesmo submete-os à revisão, modifica-os, rejeita-os ou os completa, redefine-os, descobre novos contextos de utilização e dessa maneira, constrói novas concepções.

Desta forma, a importância da utilização dos recursos didáticos para o ensino da geometria contribuirá para o reconhecimento dos fractais, suas propriedades, e aplicações através de exemplos e experimentos que, por sua vez, mais do que aprender um tópico de matemática, ele será capaz de produzir materiais didáticos manipuláveis e de ver o mundo a partir de um novo olhar, através de arranjos simétricos repetidos e perfeitos, cujo número de imagens formadas está diretamente ligado ao ângulo entre os espelhos. Através do caleidoscópio de base triangular regular podem obter figuras com efeitos diferentes, a partir de pedaços coloridos de vidros ou de outros materiais, chegando desta maneira ao ângulo de  $60^\circ$  formando seis imagens, sabendo que o caleidoscópio pode formar outros ângulos, tais como o

de  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e outros, dependendo da formação do caleidoscópio, pois, se o caleidoscópio for de base hexagonal formará ângulos de  $120^\circ$  e assim sucessivamente.

**Figura 6:** ilustração do caleidoscópio



**Fonte:** disponível em: <http://www.feiradeciencias.com.br>

As figuras visualizadas no caleidoscópio possuem formas regulares, irregulares e complexas. Brito (2006) ao examinar a utilidade de material manipulativo, baseado na teoria de Piaget, sobre como os estudantes adquirem conhecimento lógico matemático, verificou que, “O uso de objetos manipulativos tem sido proposto em sala de aula e são úteis quando eles possibilitam e estimulam os estudantes a pensarem, fazendo relações abstratas ao responderem determinados problemas”.

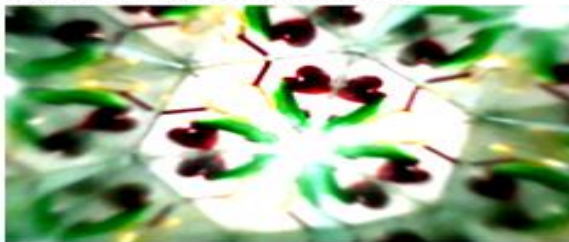
Assim, as Figuras 07, 08 e 09 são formadas através do caleidoscópio, relacionadas e separadas de acordo com sua forma, tais podem ser observadas abaixo.

**Figura 7:** figura de forma regular



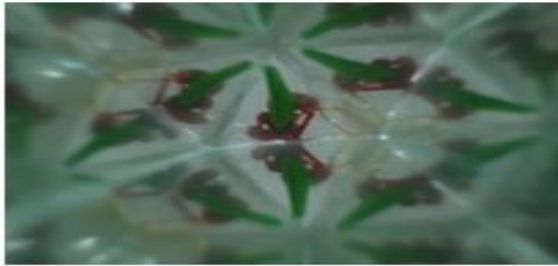
As figuras regulares são aqueles que apresentam todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes. Como pode ser observado nestas figuras acima, as multiplicidades das imagens são simétricas, pois, colaboram no desenvolvimento da percepção de posição e a constância de forma e de tamanho, ou seja, a percepção de que a forma de uma figura não depende de seu tamanho ou posição. As figuras simétricas têm a mesma forma e o mesmo tamanho, mas nem sempre estão na mesma posição.

**Figura 8:** figura de forma irregular



As figuras irregulares são aquelas que apresentam lados e ângulos com medidas diferentes.

Figura 9: figura de forma complexa



As figuras complexas são aquelas que não apresentam formas com a mesma dimensão, ou seja, quando falamos em uma figura complexa estamos falando de uma figura geométrica e abstrata composta por várias partes, onde não se pode dimensionar com exatidão.

## **METODOLOGIA**

A metodologia adotada nesta pesquisa foi desenvolvida a partir de uma abordagem quantitativa, qualitativa de forma exploratória descritiva. Quantitativa, por quantificar os dados obtidos através das amostras e ser apropriada para situações que possibilitem a utilização de medidas (MOREIRA, *apud* RODRIGUES, 2011). Qualitativa, por estimular a análise proporcionando ao pesquisador desenvolver conceitos e ideias a partir de padrões encontrados nos dados obtidos (OLIVEIRA, 2011). Oliveira ainda em acréscimo afirma que a pesquisa de forma exploratória descritiva apresenta uma abordagem específica em relação aos dados coletados, onde a descrição dos fatos possibilita uma maior compreensão do fenômeno investigado. O estudo foi realizado com 31 (trinta e um) estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 29 (vinte e nove) estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma instituição da Rede Privada de Ensino, situada na cidade do Recife, a escolha do referido campo de pesquisa se deu pela facilidade de acesso do pesquisador e pela existência da série escolhida, tendo como sujeitos da pesquisa os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio. Vale salientar que antes da aplicação do questionário investigativo, os alunos do 1º ano do Ensino Médio passaram apenas pela socialização de um texto de apoio abordando os conceitos fundamentais da geometria fractal, enquanto que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental além participarem da socialização do mesmo texto de apoio, participaram também de uma oficina.

## **DESCRIÇÃO DAS ANÁLISES E RESULTADO DA INVESTIGAÇÃO**

Neste momento serão apresentadas as descrições das análises dos resultados dos questionários investigativos das turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. As informações obtidas

através dos questionários foram organizadas e registradas através de tabelas, para efeito de um comparativo e análise dos resultados entre os grupos envolvidos na pesquisa.

### Descrição das Análises do Questionário Investigativo do Ensino Fundamental

As informações obtidas através dos questionários investigativos foram sistematicamente organizadas e registradas através da **Tabela 01** referem-se às análises das questões do 9º ano do Ensino Fundamental. Vale salientar tais considerações se deram, apenas para efeito de comparativo, para análise dos resultados dos dois grupos pesquisados.

**Tabela 01:** Questionário Investigativo da turma do 9º ano do Ensino Fundamental

Questões	Respostas				NR	%	Total
	RA	%	RI	%			
02 A	28	90,32	2	5,45	1	3,23	31
02 B	27	87,10	3	9,68	1	3,22	31
02 C	19	61,29	7	22,58	5	16,13	31
03 A	18	58,06	13	41,24	0	0	31
03 B	21	57,74	10	32,26	0	0	31
03 C	19	61,29	11	35,48	1	3,23	31
04	21	67,74	10	32,26	0	0	31
05 A	17	54,84	14	45,16	0	0	31
05 B	19	61,29	12	38,71	0	0	31
05 C	25	80,65	6	19,35	0	0	31

As informações obtidas foram organizadas e registradas na **Tabela 01** referem-se aos questionamentos do questionário investigativo do Ensino Fundamental.

### Descrição das Análises das Questões do Questionário Investigativo do Ensino Médio

As informações obtidas através dos questionários investigativos foram sistematicamente organizadas e registradas através da **Tabela 02** referem-se às análises das questões do 1º ano do Ensino Médio. Vale salientar tais considerações se deram, apenas para efeito de um comparativo, para análise dos resultados dos dois grupos pesquisados.

**Tabela 02:** Questionário Investigativo da turma do 1º ano do Ensino Médio

Questões	Respostas				NR	%	Total de Estudantes
	RA	%	RI	%			
01	7	24,14	22	75,86	0	0	29
02 A	25	86,12	3	10,34	1	3,45	29
02 B	26	89,65	1	3,45	2	6,90	29
02 C	8	27,59	17	58,52	4	13,79	29
03 A	12	41,38	9	31,03	8	27,59	29
03 B	15	51,73	10	34,48	4	13,79	29
03 C	10	34,48	11	37,93	8	27,59	29
04	10	34,48	19	65,52	0	0	29
05 A	16	55,17	13	44,83	0	0	29
05 B	15	51,72	14	48,28	0	0	29
05 C	0	0	29	100	0	0	29

As informações obtidas foram organizadas e registradas na **Tabela 02** referem-se aos questionamentos do questionário investigativo do Ensino Médio.

### **Confronto Entre os Questionários Investigativos dos Ensinos Fundamental e Médio**

Neste momento está sendo estabelecido um confronto entre os questionários investigativos. Vale salientar, que o referido confronto se restringirá a comparação entre os aumentos percentuais após o ensinamento diante das informações já comentadas anteriormente.

A questão 01 do questionário investigativo que aborda a importância do instrumento e pergunta se o estudante conhece o caleidoscópio, registrou uma diferença percentual de 75,86% em favor do Ensino Fundamental. Esta considerada diferença se deu uma vez que, os estudantes do 9º ano vivenciaram e construíram o caleidoscópio, enquanto que a turma do 1º ano do Ensino Médio teve apenas uma breve explanação sobre o conteúdo. A questão 02 do questionário investigativo que aborda a identificação das figuras geométricas registrou na alternativa “a” uma diferença percentual de 4,11%, na alternativa “b” uma diferença de 2,55%, enquanto que na alternativa “c” a diferença percentual foi de 33,70%. Isto aponta que a intervenção realizada pela pesquisadora junto aos estudantes do Ensino Fundamental, contribuiu de forma significativa, para a assimilação das formas geométricas.

A questão 03 do questionário investigativo que trata da observação das figuras retiradas do caleidoscópio, bem como da comparação entre as formas geométricas. A partir do comparativo foi possível observar que a alternativa “a” apresentou uma diferença percentual de 16,68%, a alternativa “b” 16,01% e a alternativa “c” uma diferença percentual de 26,81% em prol da turma do Ensino Fundamental.

A questão 04 do questionário investigativo que trata da comparação e justificativa das formas irregulares e complexas. Nesta questão foi observada uma diferença percentual de 33,26% em favor do Ensino Fundamental. A questão 05 do questionário investigativo que aborda a comparação das figuras em relação às quantidades de fractais foi possível observar que a alternativa “a” apresentou uma diferença percentual de 3,67%, na alternativa “b” a diferença foi de 9,57% enquanto que, na alternativa “c” a diferença percentual foi de 80,65% em favor do Ensino Fundamental.

### **CONSIDERAÇÕES GERAIS**

Nos dias atuais, uma das grandes dificuldades enfrentadas na sala de aula pelos professores diz respeito a utilização de recursos que possam facilitar o processo da aprendizagem. Neste sentido, o presente estudo tem por objetivo compreender a formação das estruturas



geométricas a partir de suas simetrias, utilizando como recurso didático o caleidoscópio, baseando-se nas diversas formas geométricas encontradas na natureza, conhecidas como Geometria Fractal. Neste sentido, através das análises dos resultados obtidos, foi possível observar uma evolução tanto na construção das ideias, quanto na aquisição dos conceitos geométricos trabalhados durante a pesquisa e isto fica demarcado, a partir do momento em que os estudantes do Ensino Fundamental, apresentaram resultados altamente satisfatórios em relação ao referido estudo. Tais obtenções se deram, acredita-se, a princípio pela manipulação dos objetos no ato da confecção do caleidoscópio e posteriormente pelas intensas intervenções abordando os conceitos geométricos. Os resultados a partir das análises apontam que os procedimentos metodológicos adotados, bem como a sistematização de ensino durante o ensinamento propiciaram aos estudantes, além de uma maior segurança, uma melhor compreensão sobre a importância da utilização do caleidoscópio como recurso didático no ensino da Geometria dos Fractais. Isto se caracteriza, a partir do momento em que os estudantes do Ensino Fundamental apresentaram uma média percentual em relação aos acertos de 71,85%, enquanto que os estudantes do Ensino Médio apresentaram uma média percentual de apenas 45,14%. Tais considerações estão em conformidade com as concepções de Brousseau (*apud* Gálvez, 1996), quando ele aponta que o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo estudante e o conjunto dos comportamentos do estudante que são esperados pelo professor, se caracterizam a partir do contrato didático, pois, todos têm seus direitos e deveres. Desta forma, pode-se afirmar que a utilização do caleidoscópio como recurso didático, para o ensino da Geometria dos Fractais no Ensino Fundamental é de suma importância, pois, tal recurso facilitará não apenas o trabalho do professor na sala de aula, mas também promoverá uma aprendizagem super ordenada.

## REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral.** São Paulo - SP, 2010.
- BRITO, Alexsandra Felix de, **Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento,** Recife-PE, 2006.
- GARBI, Gilberto Geraldo, **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática,** editora: Livraria da Física, São Paulo - SP, 2006.
- GÁLVEZ, Grécia. A didática da matemática. In: PARRA, C. (Org.). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 26-35.
- JANOS, Michel, **Geometria Fractal,** editora: Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2008.

MANDELBROT, B., “**How long is coast at Britain?**” Sciece, (1967).

MORENO, Beatriz R. O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In: PANIZZA, Mabel. (Org.). **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

NIEMANN, Flávia de Andrade, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Tendências e Concepções no Currículo da Matemática para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Rio Grande do Sul, 2012.

OLIVEIRA, E. E. C. **Projeto e Análise de Antenas Patch Compactos com Contornos Rock**. Principia (João Pessoa) 2008.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

RODRIGUES, H. O; BARBOSA, Valdemir Francisco. **Utilizando o Ensino da Geometria dos Fractais para uma Melhor Compreensão das Formas da Natureza**. XIII Feira de Ciências do Nordeste. Recife, 2007.

RODRIGUES, H. O. **Importância da Utilização de Recursos Didáticos em um Processo de Transposição Didática para Promover Aprendizagem Significativa**. Universidad Del Mar – UDELMAR/Chile em agosto de 2011.

ZUIN, Elenice de Souza Lidron, **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o Ensino das construções Geométricas, entre outras considerações**. PUC – Minas Gerais 2002.