

O JOGO TORRE DE HANÓI COMO UM OBJETO DE APRENDIZAGEM

Lucimara Muzykant da Silva¹
André Ferreira Bento²

RESUMO

O artigo relata uma atividade elaborada e aplicada em uma turma do 6º ano do ensino fundamental, no qual tem o objetivo de investigar se o jogo Torre de Hanói, utilizado como um objeto de aprendizagem, contribui para o aprendizado de operações matemáticas envolvendo potenciação. O trabalho apresenta uma descrição da elaboração de uma proposta de atividade diferenciada para o reforço deste conteúdo, e uma discussão sobre temas relacionados ao uso de tecnologias digitais aliadas ao ensino da matemática. Durante o desenvolvimento desta pesquisa, percebeu-se a capacidade do uso de um objeto de aprendizagem como um recurso didático importante e necessário em algum momento no ensino da disciplina, pois pode aprofundar a compreensão de determinados conteúdos.

Palavras-chave: Aprendizagem, Torre de Hanói, Tecnologias Educacionais, Matemática.

INTRODUÇÃO

Com a ampla disponibilidade de recursos relacionados às novas tecnologias digitais, existentes em muitas escolas e instituições de ensino, é preocupante que ainda exista uma grande dificuldade e receio por parte dos professores em utilizar esses métodos inovadores para formalizar ou reforçar conteúdos. A falta de conhecimento ou de capacitação específica na área faz com que muitos educadores ainda sigam pelo caminho tradicional, considerado mais fácil e rotineiro, repetindo o mesmo roteiro de estudo sem flexibilizar ou explorar diferentes abordagens para o ensino.

Com a finalidade de tornar a sala de aula mais interessante e atrativa, foi elaborada uma proposta de atividade que integra o uso de recursos tecnológicos educacionais. A atividade tem como principal objetivo reforçar o ensino da introdução às operações matemáticas envolvendo potenciação, utilizando o jogo online Torre de Hanói como um objeto de aprendizagem. Essa abordagem busca não apenas engajar os estudantes, mas também aprofundar a compreensão do conteúdo previamente conceituado.

¹Graduada do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Catarinense - IFC, lucimatematica.ifc@email.com;

² Mestrando no Curso de Tecnologias da Informação e Comunicação da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, andre.bento@ifc.edu.br

Este trabalho também oferecerá aos estudantes a oportunidade de explorar e utilizar tecnologias digitais como ferramentas de aprendizagem, promovendo sua autonomia e desenvolvendo habilidades de pesquisa. Ao estabelecer uma conexão entre a matemática, as tecnologias e outros recursos disponíveis, o propósito é enriquecer o processo de aprendizado. Como afirmam Silva e Silva (2004, p. 2), "a inclusão de atividades do tipo laboratorial pode ser uma das vertentes fundamentais para alcançar uma melhor qualidade na aprendizagem da Matemática, especialmente no que diz respeito à construção do conhecimento."

Neste contexto, o que vem a ser proposto, é a criação de uma aula com uma sequência didática que envolve uma atividade diferenciada utilizando recursos digitais. Para tanto, foi aplicado o jogo Torre de Hanói em sua versão digital online junto a 26 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual localizada na cidade de Araranguá do estado de Santa Catarina, tendo a professora de matemática (autora do trabalho) como mediadora.

A coleta de dados se caracterizou através de uma análise qualitativa, na qual envolveu a observação dos eventos ocorridos durante o jogo e o preenchimento de uma tabela que foi distribuída aos estudantes, onde eles deveriam responder a questões para concluir a atividade. A análise dos dados foi realizada por meio do agrupamento e verificação das respostas fornecidas pelos estudantes nessa tabela.

A seguir, apresenta-se a metodologia utilizada, seguida de discussões relacionadas aos temas abordados neste estudo, mediante pesquisa exploratória que abrange os principais argumentos e teorias de diversos autores que contribuem para sustentar a ideia e introduzem características favorecendo o bom desenvolvimento da atividade. Por fim, são apresentados os resultados, acompanhados de discussões e considerações.

METODOLOGIA

A atividade foi realizada com uma turma de 26 estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental na Escola Estadual Julieta Aguiar Bertoncini, localizada em Araranguá-SC, onde atualmente leciono como professora de matemática contratada. A metodologia proposta para a pesquisa envolveu reunir a turma no laboratório de informática e organizá-los em grupos. Inicialmente, foi apresentado o conceito da Torre de Hanói utilizando o material em sua forma concreta, com explicações detalhadas sobre as características das peças e as regras do jogo, ilustradas por meio de exemplos.

Em seguida, os alunos foram auxiliados no acesso ao mesmo material na versão digital, disponível como objeto de aprendizagem na plataforma online do GeoGebra, no link: <https://www.geogebra.org/m/nd9fTdHh>. Após a compreensão e familiarização com o funcionamento do objeto na versão digital, o jogo foi iniciado com duas peças, seguindo em ordem sucessiva até cinco peças, enquanto as jogadas dos grupos eram observadas no ambiente.

À medida que os estudantes se familiarizavam com a tecnologia e o jogo, uma tarefa foi introduzida para destacar as relações do conteúdo trabalhado na semana anterior, especialmente as operações envolvendo potenciação. Todos os integrantes dos grupos receberam um formulário com uma tabela, contendo um exercício que relacionava as jogadas do jogo com as operações matemáticas a serem calculadas. Além de estimular o raciocínio para perceber a lei de formação $2^n - 1$ que estabelece o número mínimo de movimentos a ser feito na jogada de acordo com o número de peças “n” utilizada. Esta tabela foi preenchida ao longo da atividade e entregue ao final.

A tabela com o exercício servirá posteriormente para verificar se os resultados esperados foram alcançados, permitindo entender se as operações foram resolvidas corretamente. A Figura 1 ilustra o projeto "Tabela para o Jogo com a Torre de Hanói", criada para a aplicação desta atividade.

Figura 1 – Tabela para o jogo com a Torre de Hanói

Jogo com a Torre de Hanói		
Nome:		
Quantas peças você utilizou? Coloque no quadradinho.	Quantos movimentos você fez na jogada?	Resolva a expressão abaixo para descobrir o número mínimo de movimentos:
Número de peças = n.	Espera-se o número mínimo de movimentos.	$2^n - 1 =$
2^2 		
2^3 		
2^4 		
2^5 		
2^6 		

Fonte: O Autor, 2024

REFERENCIAL TEÓRICO

Ao discutir conceitos de tecnologia, ou melhor das novas tecnologias, o que normalmente vem à mente são recursos ligados à informática e a dispositivos eletrônicos. No entanto, é importante lembrar que tecnologia não se limita a isso. Ela “pode ser entendida como um conjunto de conhecimentos aplicados a uma determinada tarefa ou à resolução de problemas”. Nesse sentido, itens como lápis, cadernos, livros e quadros também são considerados tecnologias, pois contribuem para o aprendizado no contexto educacional (ALMEIDA, 2005).

As novas tecnologias podem ser definidas em conformidade com esse conceito, sendo as "novas" aquelas desenvolvidas a partir da década de 1990, período marcado por avanços em áreas como a eletrônica, telecomunicações e informática. Esses avanços incluem o desenvolvimento do computador, da televisão a cabo e por satélite, bem como das videoconferências, que são frutos da evolução da sociedade e refletem a lógica da nossa época (SIMÕES, 2002, p. 119).

Em acordo com Simões (2002), podemos afirmar que estamos vivendo em uma nova era tecnológica. É crucial que os professores considerem a integração de novas tecnologias no ensino da matemática, uma disciplina que frequentemente causa apreensão entre os estudantes e que precisa ser conceituada e demonstrada de maneira clara, especialmente no início do ensino fundamental, quando os alunos constroem a base para os anos seguintes.

D'Ambrosio (1989, p. 01) observa que "[...] essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas se reduz a procedimentos determinados pelo professor." Essa colocação enfatiza a necessidade de uma busca contínua por práticas pedagógicas que favoreçam a compreensão da matemática, permitindo que os alunos façam conexões entre os conceitos matemáticos e seu cotidiano.

De acordo com Almeida (2003), muitos docentes ainda não se sentem preparados para integrar tecnologias em suas atividades pedagógicas, devido à complexidade de articular e compreender determinadas mídias que podem potencializar o aprendizado dos alunos. É essencial que os professores compreendam e dominem essas ferramentas antes de elaborar tarefas, utilizando-as de forma consciente e produtiva no momento adequado.

O autor também destaca que, devido à falta de formação continuada, muitos professores são incentivados pelos multiplicadores a desenvolver estratégias pedagógicas

adequadas, baseadas nas experiências vivenciadas. Nesse contexto, o multiplicador desempenha um papel fundamental ao orientar o professor, que, por sua vez, é crucial para a participação ativa e o desenvolvimento do aluno em atividades que promovam o uso e a produção de conhecimento significativo.

Segundo Ribeiro e Ponte (2000, p.19), quando se referem à formação continuada, destacam que, se o professor ficar “isolado e sem possibilidade de realizar uma reflexão continuada, parece improvável que a porta da sala de aula se abra à introdução da tecnologia num sentido educacionalmente inovador”.

Portanto, é fundamental proporcionar aos alunos autonomia na realização da atividade, incentivando a interação em grupo com os colegas e a produção de conhecimento por meio de descobertas e reflexões dentro desse ambiente de aprendizagem. É essencial que o professor desafie os alunos a explorar as articulações dessa tecnologia e integre o conteúdo que deseja trabalhar. Para isso, é importante que o professor possua um bom conhecimento das mídias disponíveis e as utilize de maneira adequada ao contexto, garantindo que o aprendizado seja eficaz e significativo.

O jogo Torre de Hanói foi criado pelo matemático francês Eduardo Lucas no ano de 1883 (TAHAN, 1974, p.137), o inventor associou a brincadeira a uma curiosa lenda- a lenda do fim do mundo:

Quando Deus criou o mundo, colocou no templo de Benares, o jogo de Hanói com 64 andares de ouro. Por determinação de Brama, os sacerdotes ficaram encarregados de transportar a Torre de ouro da haste A para a haste B, de acordo com as regras do jogo. Os movimentos, desde o princípio do mundo, são feitos pelos sacerdotes, noite e dia, sem parar. Segundo a crença dos hindus, a terminação desse jogo vai assinalar o fim do mundo [...] (TAHAN; 1974, p. 140).

Ainda em acordo com o autor, o jogo consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos ou peças uns sobre os outros, em ordem crescente, de cima para baixo. As regras são passar todas (utilizando uma peça a cada jogada) de uma extremidade a outra sem que o maior fique em cima de um menor. O número de movimentos é dado por $2^n - 1$ onde “n” é o número de peças. Por exemplo, para solucionar o jogo com 3 peças, são necessários 7 movimentos; Para solucionar o jogo com 4 peças, são necessários 15 movimentos; e assim sucessivamente. A figura 2 mostra o material na sua versão concreta.

Figura 2 – Torre de Hanói



Fonte: O Autor, 2024

Baseado na concepção deste material comercializado em madeira foi construído o digital, possibilitando a simulação do jogo na versão online disponível em várias plataformas de sites, podendo considerá-lo como um objeto de aprendizagem, conforme o embasamento teórico para o conceito de tal:

Um Objeto de Aprendizagem é uma unidade educativa com um objetivo de aprendizagem associado a um tipo concreto de conteúdo e atividades para sua realização, caracterizado por ser digital, independente, e acessível através de metadados com a finalidade de serem reutilizados em diferentes contextos e plataformas (MORALES, GARCIA, BARRÓN, 2007 apud MACIEL 2018).

O uso desse objeto de aprendizagem pode promover o desenvolvimento do conhecimento, criatividade, dedução e autonomia dos alunos. Quando utilizado como um jogo, ele desperta maior curiosidade e estimula o raciocínio, facilitando o aprendizado. “O jogo pode aumentar o interesse pela atividade, resgatando o prazer de aprender matemática e criando oportunidades para a imaginação, o que é benéfico para o desenvolvimento cognitivo” (GRANDO, 1995).

Jogos computadorizados envolvem aspectos lúdicos, intelectuais, afetivos e sociais (Pinto et al., 2006). Nesse sentido, eles se destacam como ferramentas pedagógicas eficazes, oferecendo alternativas valiosas no processo de ensino- aprendizagem e servindo como um meio de interação social.

Teixeira et al. (2007, p. 348) fazem um paralelo entre jogos educacionais e objetos de aprendizagem, sugerindo que a combinação desses elementos pode proporcionar ludicidade e dinamismo, contribuindo para o aprendizado por meio do uso do computador. O autor introduz o conceito de "objeto jogo" (OJ), que representa os jogos de aprendizagem na forma de objetos de aprendizagem (OAs).

Assim, o Jogo Torre de Hanói, em sua versão digital, pode ser considerado um objeto de aprendizagem, ou mais precisamente, um objeto jogo, que pode engajar os alunos e tornar o aprendizado da matemática mais prazeroso.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante a atividade proposta, ao observar as jogadas dos estudantes, foi possível identificar que, após uma série de tentativas, e com a ajuda da professora mediadora, eles perceberam que o número mínimo de movimentos no jogo é representado pela expressão $2^n - 1$. Para alcançar esse entendimento, e resolver a expressão, o estudante precisa reconhecer e aplicar seus conhecimentos sobre potenciação, o que contribuiu para o desenvolvimento e aprimoramento de suas habilidades nesse conteúdo.

Ao finalizar todas as jogadas, os estudantes questionaram sobre a utilização de um número maior de peças: “qual seria o número mínimo de movimentos se utilizasse 10 peças no jogo”? Nesse contexto, introduziu-se o propósito da fórmula, que mostraria esse resultado através da substituição no valor “n” e resolução da expressão.

As principais dificuldades estavam relacionadas ao uso da tecnologia e jogar com um número maior de peças. Alguns estudantes optaram por ignorar o uso do computador, preferindo trabalhar com a versão concreta do material (Torre de Hanói), e os mesmos não conseguiram finalizar jogadas com sucesso quando utilizaram 4 e 5 peças da Torre.

A análise das respostas dos estudantes na tabela revelou um maior índice de erros nas operações quando envolvia expoentes mais altos junto a base 2. Uma porcentagem dos estudantes resolveu a operação de forma incorreta, multiplicando a base (dois) pelo expoente que acompanhava. Dentre os 26 estudantes, 8 concluíram a atividade corretamente. A tabela 1 mostra a distribuição do número de estudantes que erraram ao resolver a expressão ou deixaram respostas em branco.

Tabela 1: Distribuição do número de desacertos e de respostas em branco das resoluções da tabela.

Nº de estudantes	Desacertos	%	Sem resposta	%
26	15	57,7	3	11,53

Fonte: Dados de pesquisa da autora

Ao serem questionados sobre suas impressões do jogo, os estudantes comentaram que haviam descoberto o segredo para jogar bem. Eles destacaram a importância de raciocinar antecipadamente, prevendo as jogadas para alcançar o número mínimo de movimentos conforme a quantidade de peças utilizadas.

Durante o desenvolvimento da atividade, constatou-se que o uso de um objeto de

aprendizagem é um recurso didático valioso e essencial em determinados momentos no ensino da disciplina de matemática, pois pode aprofundar a compreensão dos conteúdos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As novas tecnologias aliadas à propósitos educacionais podem proporcionar poder ao pensamento e raciocínio matemático, principalmente se ligadas a processos de investigação com autonomia, onde a comunidade estudantil cresce intelectualmente com o desenvolvimento de estratégias se tornando parte fundamental da sua experiência com a matemática.

Mas essas tecnologias não ensinam por si só. Ao professor cabe um papel decisivo na organização das situações de aprendizagem. É preciso que o educando atente para a natureza da atividade proposta, levando em acordo com a organização de um cenário propício para o aprendizado.

Os resultados obtidos por meio da análise das respostas desses estudantes, mostrou que uma porcentagem deles apresentam dificuldades ao desenvolverem cálculos envolvendo operações com potenciação. Ademais, os dados da pesquisa mostram que os maiores índices de incidência de erros deu-se na multiplicação dos fatores.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA. M.E. B. **Prática pedagógica e formação de professores com projetos: articulação entre conhecimentos, tecnologias e mídias.** Boletim do Salto para o Futuro. Série Pedagogia de Projetos e Integração de Mídias, TVESCOLASEEDMEC, 2003.

ALMEIDA. Maria Elizabeth Bianconcini. **Prática e formação de professores na integração de mídias. Prática pedagógica e formação de professores com projetos: articulação entre conhecimentos, tecnologias e mídias.** In: Integração das Tecnologias na Educação/ Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2005.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates.** SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989.

GEOGEBRA. Materiais. 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/> Acesso em: 26 fev. 2024.

GRANDO. R. C. **O Jogo e suas Possibilidades metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem da Matemática.** Campinas, SP, 1995. 175p. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, UNICAMP.

MACIEL, Cristiano. **EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA AMBIENTES VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM**. Edufmt Virtual. Cuiabá-MT, 2018.

PINTO, I. M.; BOTELHO, S. C.; SOUZA, R. C.; GOULART, T. S.; COLARES, R.; CAMPOS, R. L. **Saberlândia: plataforma lúdica integrando robótica e multimídia para educação**. In: **GT 2 - II Seminário Jogos eletrônicos, Educação e Comunicação**, 2006, Salvador – BA.

RIBEIRO, M.J.B.; PONTE, J.P. **A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de matemática**. Revista Quadrante, n.9, v.2, p.3-26, 2000.

SILVA, Raquel Correia da; SILVA, José Roberto da. **O papel do laboratório do ensino de Matemática**. Recife: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004.

SIMÕES, V. A. P. (2002). **Utilização de novas tecnologias educacionais nas escolas da rede estadual da cidade de Umuarama-PR**. Universidade Federal de Uberlândia(UFU).
TAHAN, Malba. **A matemática na lenda e na história**. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974.

TEIXEIRA, J. S. F.; SÁ, E. J. V.; FERNANDES, C. T. **Representação de Jogos Educacionais a partir do Modelo de Objetos de Aprendizagem**. Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). **Anais do XXVII congresso da SBC. WIE XII workshop sobre informática na escola**. Rio de Janeiro, 2007.