

TAREFAS DE GEOMETRIA COM PAVIMENTAÇÃO DO PLANO: uma aplicação em didática da matemática

Amarildo Aparecido dos Santos ¹

RESUMO

O presente relato de experiência foi desenvolvido para uma turma de Didática da Matemática na Universidade Federal do ABC, em 2024. Trata-se da aplicação de uma sequência de ensino para explorar a pavimentação do plano bidimensional com polígonos regulares. A pavimentação consiste em cobrir o plano com polígonos regulares, de modo a não existirem espaços entre elas ou sobreposições. Buscamos referência em Santos (2020) que apresentou uma sequência de ensino aplicada para alunos do Ensino Fundamental, anos finais, com o uso do Cabri Geomètrie II. A fim de aplicar para alunos de graduação em Licenciatura em Matemática, foi proposto a sequência de ensino, porém com o uso do *software* GeoGebra, que é de domínio público e gratuito. Foram baseados nos referenciais teóricos de Parzysz (2001) que fundamenta o ensino da geometria em 4 níveis e, em Machado (2005) que sugere, para a construção do pensamento geométrico, uma articulação entre 4 faces de um tetraedro. Para os alunos de graduação foi proposto uma tarefa para construir pavimentações com apenas um polígono regular, se possível, com os polígonos: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular, octógono regular, eneágono regular, decágono regular e dodecágono regular. Além disso, caso fosse possível pavimentar, preencher uma parte do plano, caso não fosse possível pavimentar, justificar porque não pavimentou. Repetir o processo com apenas dois polígonos regulares e, com apenas três polígonos regulares. Os resultados das tarefas foram produtivos, pois houve construções de pavimentação muito interessantes, pois, muitos alunos perceberam que todos os triângulos regulares sempre pavimentavam, que todos os quadrados também, o mesmo ocorre com todos os hexágonos regulares. Agora nas combinações de dois ou três polígonos regulares, tiveram dificuldades para perceber que precisavam verificar que a soma de cada ângulo interno dos polígonos, em torno de um mesmo ponto de pavimentação, teria que formar 360° .

Palavras-chave: Didática da matemática, Tarefas de geometria, GeoGebra, Construção geométrica, Formação inicial.

INTRODUÇÃO

O presente relato de experiência é parte do desenvolvimento da disciplina de Didática da Matemática para alunos do curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal do ABC, formação inicial. Esta disciplina foi oferecida a alunos de graduação em Licenciatura em Matemática no primeiro quadrimestre de 2024 como obrigatória, podendo receber alunos de outros cursos que manifestassem interesse em licenciatura. A carga horária da disciplina foi de 48 horas, com dois encontros semanais de 2 horas, durante 12 semanas.

¹ Professor Visitantes da Universidade Federal do ABC - UFABC, amarildosantos10@gmail.com

A estratégia de ensino foi baseada na ementa da disciplina centrada no processos de ensino e aprendizagem da aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade; na matemática para o ensino; nas relações da matemática dos cursos de licenciatura com a matemática do ensino básico; nas questões curriculares como: análises de propostas curriculares e produção de material didático; nos estudos de aulas como recursos didáticos para o ensino de matemática; no perfil conceitual como: interações discursivas nas aulas de matemática; nos tópicos de didática da matemática francesa como: transposição didática, obstáculos epistemológicos, teoria das situações didáticas e engenharia didática. Como metodologia foram indicados artigos que corroboraram com a ementa e que abordassem as discussões pertinentes com a didática francesa e que contribuísse com o processo de ensino e aprendizagem de alunos da Escola Básica. O objetivo da disciplina foi apresentar e discutir tópicos matemáticos associados as principais tendências didáticas no sentido de contribuir para a formação inicial dos estudantes. Para isso, procuramos discutir e compreender os principais aspectos da didática da matemática dialogando com os estudantes e apresentando experiências práticas do dia a dia da profissão docente. Propomos a investigação de diferentes aspectos conceituais e didáticos que abordassem as grandes áreas da matemática como: aritmética, álgebra e geometria, a fim de desenvolver o pensamento crítico e reflexivo dos alunos e, desenvolver a perspectiva argumentativa, tanto na forma escrita quanto oral através de apresentações em grupos, debates nas apresentações e fichamentos.

A ideia de incluir o tema da dissertação de mestrado de Santos (2020) justifica-se pelo fato de ter desenvolvido uma sequência de ensino com o uso da estratégia de engenharia didática, dividida em três etapas. A sequência de ensino foi concentrada em dois dias de aplicações, a primeira foi a manipulação do material didático desenvolvido pelo pesquisador. Trata-se de polígonos regulares e não regulares produzidos com EVA de 4 cm de espessura, como triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos e dodecágonos, distribuídos em 5 kits com 178 peças em cada um. A referida dissertação está publicada em e-book de domínio público pela Atena editora. O objetivo das atividades foi desenvolver pavimentação de polígonos regulares e não regulares. Para isso, os alunos deveriam preencher o plano, sem deixar fendas ou buracos entre eles e, sem sobreposição. Seguimos com a metodologia.

METODOLOGIA

Como metodologia foi selecionado 5 artigos: Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais; Práticas de discussão em sala de aula de matemática: os casos de dois professores; ensinar matemática à luz de uma perspectiva crítica: algumas reflexões; um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de realizações em livros didáticos e, perspectivas para o estudo da probabilidade e da estatística no ensino fundamental. A finalidade foi analisar o ponto de vista apresentado pelos autores e relacionar ao contexto da didática da matemática, discutindo a possibilidade de aplicação das estratégias para alunos da escola básica, destacando pontos positivos e as possibilidades de adaptação para o ensino fundamental, anos finais e, ensino médio. Para o desenvolvimento dessa estratégia a turma foi dividida em grupos, por afinidade, para as devidas discussões. Os mesmos grupos também apresentaram seminários abordando a concepção didática francesa de acordo com os tópicos: obstáculos epistemológicos, registro de representação semiótica, teoria das situações didáticas, contrato didático, transposição didática e, engenharia didática.

Para cada apresentação foi escalado um outro grupo para debater o tema apresentado com a intervenção dos demais grupos a fim de provocar a discussão em função do aproveitamento das ideias propostas pelos autores dos textos. Para cada apresentação dos cinco artigos os grupos produziram um fichamento das ideias dos autores, acrescentando suas opiniões em relação a contribuição com o processo didático descrito. Para os seminários, os grupos fizeram a apresentação e propunham estratégias de aplicação na escola básica de acordo com os grandes temas propostos na BNCC (2018), que também foi discutida em aula a partir da análise de livros didáticos do PNLD a partir de 2022, com o tema geometria. Segue os referenciais teóricos que embasaram o desenvolvimento do relato de experiência.

REFERENCIAL TEÓRICO

Como estamos abordando com referenciais teóricos da didática francesa, destacamos elementos da engenharia didática de Artige (1988), que é vista como metodologia de investigação e caracteriza-se por uma sequência experimental baseada em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na percepção, na realização, na observação e na análise da sequência de ensino. A engenharia didática foi dividida em quatro fases: Análises prévias: apoia-se num

quadro teórico didático geral, em conhecimentos didáticos já adquiridos, em estudos prévios de programas, de propostas curriculares e de livros didáticos e em estudos históricos e epistemológicos dos conteúdos visados; Concepção e análise a priori das situações didáticas: o investigador faz escolhas didáticas para a concepção de sua sequência de atividades e inicia a análise a priori das mesmas; A experimentação e aplicação da sequência: é o momento da organização e aplicação da sequência de atividades planejadas; Análise a posteriori: é a interpretação das informações extraídas da experimentação e da sequência de ensino e que levam a validar ou não as hipóteses de pesquisa.

Levando em consideração que as atividades apresentadas aos alunos da licenciatura que envolve o ensino da geometria, mais especificamente a pavimentação, nos apoiamos no artigo de Parzysz (2001), o qual distingue 4 níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Nível 0: geometria concreta onde os objetos são materializados; nível 1: geometria espaço-gráfica onde os objetos são apresentados com o uso de instrumentos (régua, compasso ou *software* geométrico); nível 2: geometria proto-axiomática onde as demonstrações são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo sem necessidade de explicitar; nível 3: geometria axiomática, onde as demonstrações utilizam um sistema de axiomas.

Tratando ainda do ensino da geometria, Machado (2005) sugere para a construção do pensamento geométrico 4 faces de um tetraedro; a percepção: refere-se à observação e a manipulação de objetos materiais. É a caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta; a construção: refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico. A construção reforça a percepção; a representação: refere-se à reprodução por meio de desenhos, ou objetos percebidos ou construídos. A representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção; a concepção: refere-se à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e da teorização. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico, é onde os elementos conceituais são evidenciados, onde têm predomínio as definições formais, o enuncia do preciso das propriedades, proposições e teoremas. A concepção favorece a percepção, a construção e a representação. Destacamos que nenhuma das faces do tetraedro é privilegiada, não tem uma sequência para acontecimentos durante o processo de ensino e aprendizagem na geometria. Com isso, seguimos com os resultados o desempenho dos alunos e a discussão.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

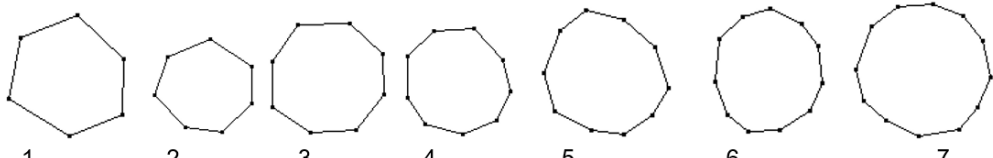
Descrevemos a seguir como foi desenvolvido a sequência de ensino para os alunos de graduação. A princípio a sequência de ensino foi criada para ser desenvolvida em 3 blocos. O primeiro para exploração dos polígonos via manipulação do material concreto, pensado para investigar o grau de conhecimento dos alunos da escola básica e o conhecimento em relação aos polígonos. O segundo para exploração com o uso do *software* Cabri Geomètrie, pensado para que os alunos pudessem confirmar por meio do *software* as situações construídas no bloco anterior. E o terceiro, estudar as propriedades dos polígonos para explicitar os invariantes relacionados aos polígonos. Esta sequência foi produzida e aplicada para aluno do oitavo ano do ensino fundamental, anos finais em novembro de 2006.

Para a aplicação na disciplina de didática da matemática foi aplicado somente o terceiro bloco, que corresponde a somas das medidas dos ângulos internos e externos dos polígonos e, as medidas de um ângulo interno e externo dos polígonos regulares, a qual chamamos de dedução. Além disso, foi disponibilizado o *kit* de material concreto para a manipulação e possíveis pavimentações. Apresentamos a seguir na figuras 1 a atividade aplicada no laboratório de matemática.

Figura 1: atividades do bloco III - dedução

Dedução – Atividade 1 – BLOCO III

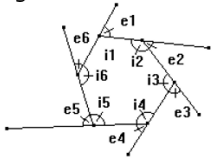
Considerando os polígonos regulares a seguir:



- Em quantos triângulos podemos decompor cada um dos polígonos acima?
- Em quantos triângulos podemos decompor um polígono de n lados?
- Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados?
- Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?
- Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?
- Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

Dedução – Atividade 2 – BLOCO III

- Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?
- Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.
- Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?
- Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

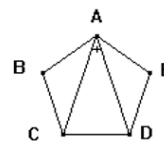


Dedução – Atividade 3 – BLOCO III

Determinar a medida do ângulo $\widehat{CAD}$ sabendo que a figura é um polígono regular. Descrever o processo.

Dedução – Atividade 4 – BLOCO III

- a) Um retângulo é um polígono regular? Escrever sua resposta.
b) Um losango é um polígono regular? Escrever sua resposta.



Dedução – Atividade 5 – BLOCO III

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se presta a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

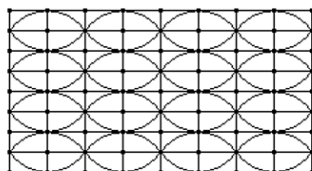


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

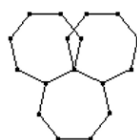
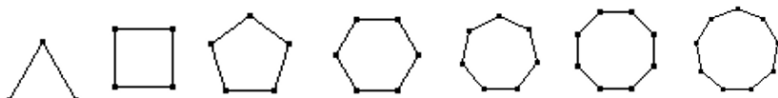


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

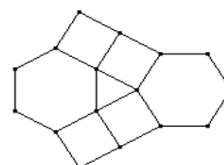
A seguir uma relação de alguns polígonos regulares.



Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos regulares acima, sendo um deles octogonal, qual deverá ser a forma do outro polígono escolhido?

Dedução – Atividade 6 – BLOCO III

Você acabou de fazer algumas pavimentações com dois tipos de polígonos regulares. Outras pavimentações podem ser feitas com dois ou mais de polígonos regulares. Uma delas é a pavimentação (3-4-4-6), que está indicada a seguir. Trata-se de um triângulo equilátero (3 lados), de dois quadrados (4 lados) e de um hexágono regular (6 lados). Existem 8 combinações possíveis de polígonos regulares para pavimentar o plano. Tente encontrar as outras 7 pavimentações.



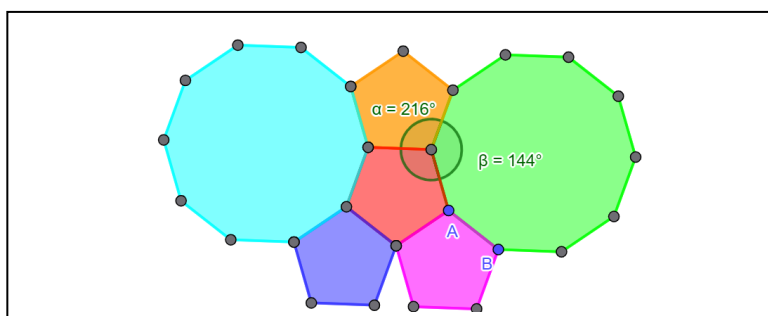
Fonte: Um estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação. Santos (2020)

A tarefa foi respondida em grupo e obtivemos resultados bastantes satisfatórios em todas as etapas do bloco III, com a construção da dedução da soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono, bem como a interpretação de sua aplicação para as demais atividades. As etapas para a construção e dedução da generalização da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono foi destacada pelos alunos. Destacamos a atividade 6 onde foi solicitada as pavimentações propriamente dita. Nesta atividade foi colocada uma das possíveis pavimentações e solicitado ao alunos que criasse outras pavimentações, utilizando o *kit* de

material manipulativo disponibilizado. Praticamente todos os grupos conseguiram encontrar as pavimentações possíveis.

Houve um grupo que destacou a pavimentação (5, 5, 10), que não possui continuidade, que é a junção de dois pentágonos com o decaedro regulares, apesar de a soma das medidas dos ângulos internos em torno de um ponto dos polígonos regulares formar 360° não é possível dar continuidade para pavimentar o plano, pois a pavimentação não pode deixar fendas ou sobreposição e, alguns grupos perceberam isso. Segue uma representação na figura 2.

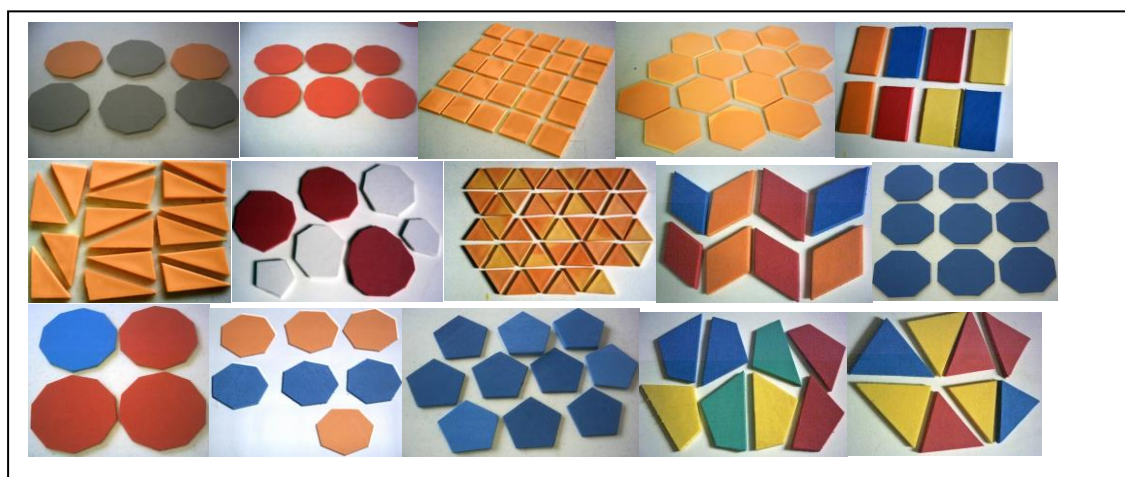
Figura 2: pavimentação com dois pentágonos e um decaedro regulares



Fonte: produzido pelo autor

Apresentamos na figura 3 o *kit* de materiais manipulativos que contribuíram para a compreensão da pavimentação do plano. No material, os polígonos regulares possuem 2,5 cm de lado, os polígonos não regulares possuem medidas diferentes. O *kit* contém seis dodecágonos regulares, quatro decágonos regulares, seis eneágonos regulares, nove octógonos regulares, sete heptágonos regulares, quatorze hexágonos regulares, dez pentágonos regulares, vinte e cinco quadrados, quarenta e dois triângulos equiláteros, dezesseis triângulos retângulos, seis polígonos não regulares, oito retângulos, oito quadriláteros em forma de trapézio, oito triângulos escalenos e oito losangos, totalizando 178 peças.

Figura 3: material manipulativo produzido para a sequência de ensino



Fonte: produzido pelo autor

Considerando os resultados dessas tarefas em grupo podemos dizer que a elas produziram uma reflexão positiva e, a troca de ideias dentro do grupo favoreceu a compreensão do significado da pavimentação.

A outra parte que destacamos foi a aula em um dos laboratórios da universidade onde os alunos utilizaram o *software* GeoGebra online para desenvolver a atividade de pavimentação com polígonos regulares, conforme indicada na figura 4.

Figura 4: Atividade aplicada aos alunos na aula de didática da matemática - 2024

Caros alunos.

Esta atividade refere-se a utilização do *software* GeoGebra para a construção das pavimentações no plano com polígonos regulares.

- 1 – Construir pavimentações, se possível, com apenas um dos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular, octógono regular, eneágono regular, decágono regular e dodecágono regular. Fazer comentários das pavimentações.
- 2 – Construir pavimentações, se possível com apenas dois polígonos regulares. Fazer comentários das pavimentações.
- 3 – Construir pavimentações com apenas três polígonos regulares. Fazer comentários das pavimentações.

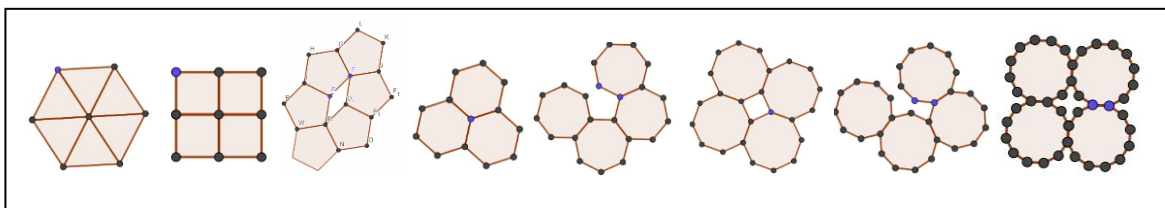
Fonte: produzido pelo autor

Para o desenvolvimento desta atividade os alunos foram orientados a utilizarem o ambiente de geometria dinâmica GeoGebra online para reafirmar as construções. Tivemos o cuidado de recomendar que utilizassem a ferramenta “polígono regular” nas construções e excluíssem o plano cartesiano e a malha quadriculada para que pudessem ter o ambiente como se fosse uma folha em branco. Essas informações foram necessárias para evitar que os alunos utilizassem a malha quadriculada para construir figuras que não preservassem as características de construção como por exemplo o quadrado e os polígonos regulares.

Todos os alunos perceberam que a pavimentação com apenas um polígono como: triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular preenchiam o plano. Notaram também que os demais polígonos regulares recomendados não seria possível pavimentar o plano pois em torno de um vértice de pavimentação não seria possível encontrar a soma de seus ângulos igual a 360° . Na aula, alguns alunos tiveram dificuldade para construir as pavimentações com dois e três polígonos regulares pois, não foi disponibilizado o *kit* de material manipulável por se tratar da fase da institucionalização, já haviam realizado os testes na aula anterior.

Temos várias construções realizadas pelos alunos. Na figura 5 apresentamos tentativas de pavimentações com apenas um polígono produzidas por eles. Alguns alunos não conseguiram realizar todas as verificações.

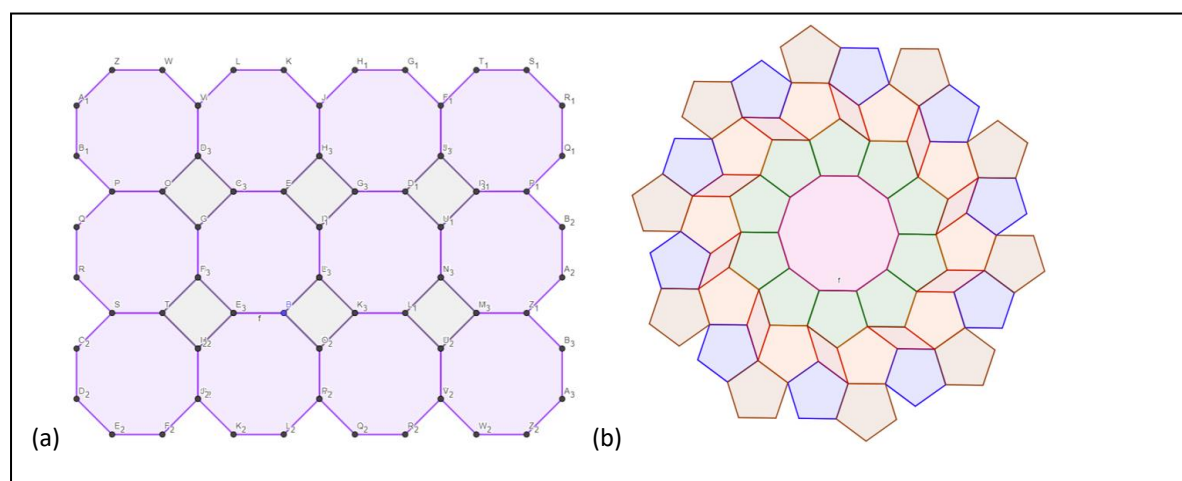
Figura 5: Pavimentações realizadas pelos alunos na aula do dia 08/03/2024



Fonte: construção realizada pelos alunos da disciplina de didática da matemática 2_2024

Agora apresentamos algumas construções com dois polígonos, bem como os comentários feitos por eles sobre as construções indicados na figura 6.

Figura 6: possíveis pavimentações com dois polígonos regulares produzidas na aula do dia 08/03/2024



Fonte: construção realizada pelos alunos da disciplina de didática da matemática 2_2024

Nessa construção, na figura 6(a) a aluna fez o seguinte comentário: “*Esta pavimentação foi construída com octágonos e quadrados. É visto geralmente em pisos. Esta sequência pode ser reproduzida infinitamente sem alterar seu padrão.*” Para a pavimentação na figura 6(b) a aluna destacou que não se trata de uma pavimentação porque foi inseridos nos espaços entre 4 pentágonos regulares um quadrilátero que não é regular. A aluna fez o seguinte comentário: “*Este padrão foi construído inicialmente com pentágonos regulares. Após isso, tracei um decágono ao centro e entre eles tracei losangos. Não é possível pavimentar com esta modelagem, pois há espaços não regulares que não podem ser preenchidos com polígonos regulares.*”

Com isso, consideramos que os alunos da disciplina de didática da matemática, turma do segundo quadrimestre de 2024, compreenderam e assimilaram todo o processo de ensino e aprendizagem sobre pavimentação, perceberam a importância do *kit* de material manipulativo para a preparação manual do processo de pavimentação com polígonos regulares e não

regulares. Assim, desenvolveram a pavimentação no ambiente de geometria dinâmica GeoGebra apresentando um ótimo desempenho. Não conseguimos apresentar todas as pavimentações dos alunos porque não temos espaços suficientes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a aplicação da sequência de ensino, constante em Santos (2020), durante o desenvolvimento da disciplina de didática da matemática para alunos de graduação em licenciatura em matemática, no segundo quadrimestre de 2024, na Universidade Federal do ABC, consideramos que o desempenho e o comprometimento dos alunos nas atividades propostas foram muito satisfatórios.

A aplicação da atividade se concentrou no estudo das propriedades dos polígonos e na pavimentação de polígonos regulares, que corresponde a construção do pensamento geométrico, fazendo correspondência ao processo de construção do pensamento em articulação com as 4 faces do tetraedro proposto por Machado (2005), podemos dizer que os alunos atingiram a sistematização do conhecimento geométrico, pois os elementos conceituais foram evidenciados destacando que as características das pavimentações foram preservadas e comentadas de acordo com a compreensão do processo didático desenvolvido na prática docente. Recorrendo as concepções do Parzysz (2001) podemos considerar que o desempenho dos alunos se encontram no nível 3, onde as deduções da generalização da soma das medidas dos ângulos internos e externos dos polígonos regulares foram formalizadas. Observando o desempenho nas pavimentações realizadas pelos alunos, notamos que chegaram na geometria axiomática ao conseguirem realizar as pavimentações com três polígonos regulares e perceber que o pentágono regular e o decágono regular, apesar de conseguirem parte com a soma das medidas dos ângulos em torno de um ponto igual a 360° , não existe a continuidade da pavimentação por todo o plano.

Consideramos que os resultados produzidos nas atividades foram produtivos, despertaram a criatividade dos alunos em relação a pavimentação de polígonos regulares, as combinações das pavimentações com três polígonos regulares provocaram nos alunos um novo desafio de procurar polígonos regulares, com número de lados maior que 12, que possam pavimentar o plano na mesma concepção desenvolvida com os polígonos indicados. Assim a aplicação da sequência de ensino superou as expectativas do pesquisador.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

MACHADO, Nilson José. Epistemologia e Didática. São Paulo: Cortez Editoria, 2005. 6ª ed.

PARZYSZ, Bernard. Artigo: Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique em PE1 (2001). Extrait du Colloque COPIRELEM – Tours – 2001.

SANTOS, Amarildo Aparecido dos. Um estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação. Ponta – PR: Atena editora, 2020.