ISSN: 2358-8829

COMPARAÇÃO DO MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL DE FIBONACCI COM OS MODELOS EXPONENCIAL E LOGÍSTICO

Ana Beatriz Ferreira Leite de Farias [1]
Josefa Itailma da Rocha [2]

INTRODUÇÃO

Os modelos de crescimento populacionais são modelos matemáticos que tem o objetivo de prever o tamanho de uma população ao longo dos anos. Existem vários modelos que fazem previsão de crescimento populacionais e eles variam de modelos mais simples, com poucas variáveis estudadas, a modelos mais complexos que levam em consideração situações reais. Nesse trabalho vamos apresentar três modelos comumente estudados na matemática, que são os modelos Exponencial, de Fibonacci e o crescimento Logístico, fazer uma comparação entre eles e discutir as vantagens e limitações de cada um.

METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

O trabalho foi desenvolvido através de pesquisa bibliografica em livros, revistas e trabalhos publicados sobre o tema. Os gráfico usados para ilustrar os resultados foram gerados através da linguagem Python.

REFERENCIAL TEÓRICO

O problema de reprodução e coelhos que foi proposto por Fibonacci, em seu livro *Liber Abaci* (1202), pode ser formulado da seguinte maneira: "*Um homem coloca um par de coelhos em um local cercado. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano, se se supõe que cada mês cada par de coelhos gera um novo par, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida?*" A quantidade de pares de coelhos por mês forma a seguinte sequência,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

conhecida como sequência de Fibonacci.

[1] Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, beatriz.leite@estudante.ufcg.edu.br;
[2] Professora da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br;

ISSN: 2358-8829

É fácil observar que em cada mês o número de casais é a soma dos casais já existentes com os novos casais que nasceram. Assim, chamando de F_n o número de casais no mês n, temos $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 2$. Como mostrado em (HEFEZ, 2012, pag 27) os termos da sequência são dados por

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é chamado *número de ouro*. Além disso, como mostrado em (LOPES, 2022, pag 25) a razão entre dois termos consecutivos da sequência tende ao número de ouro, ou seja,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi \tag{1}$$

O modelo de crescimento populacional de Fibonacci é um modelo idealizado, que não leva em consideração a mortalidade nem limitações de recursos (espaço, alimentação, predadores etc.). No início, o crescimento é lento, mas com o passar do tempo, o crescimento da população acelera.

O modelo de crescimento exponencial, como construído em (BOYCE, 2016, pag 29) definido por

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

onde P_0 é a população inicial e r é a razão de crescimento e t o tempo. Esse modelo não depende de valores anteriores, como no modelo de Fibonacci, depende apenas da taxa de crescimento e do tempo considerado. Também é um modelo idealizado sem restrições ambientais. Ele aparece em vários contextos naturais e sociais, como na reprodução de bactérias ou disseminação de Fake News em redes sociais.

O modelo de crescimento logistico, proposto por Pierre-François Verhulst (1804-1849), é uma alternativa ao crescimento exponencial que leva em consideração a capacidade de suporte do ambiente. Ele supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um valor limite ou a capacidade de suporte, isto é, a população tende a se estabilizar quando o tempo aumenta. Esse modelo leva em consideração os recursos limitados do ambiente. Isso significa que a população tem um crescimento alto inicialmente, mas à medida que o tempo passa, a população tende a estabilizar. A formulação desse modelo é dada por

ISSN: 2358-8829

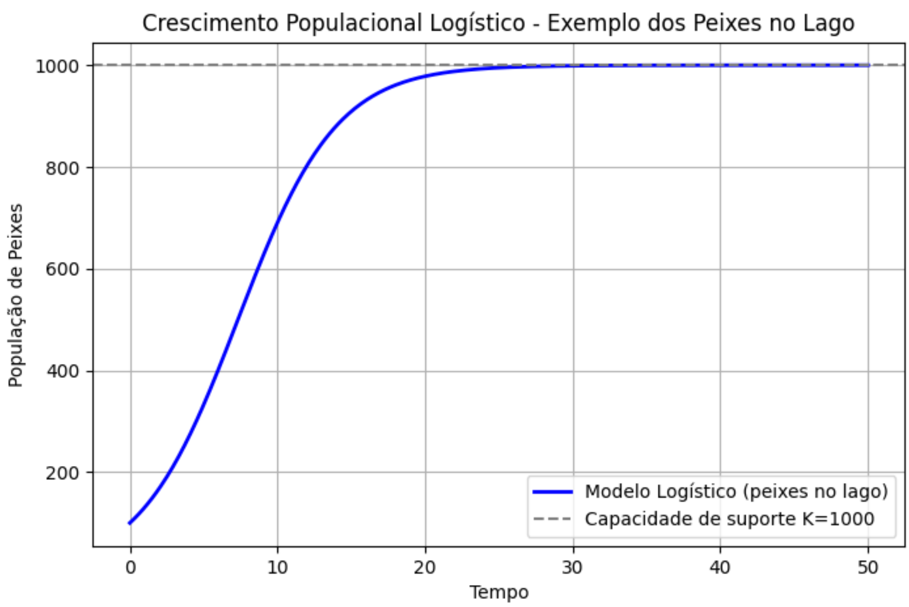
$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

onde $P(t)$ é a população no tempo t, P_0 é a população inicial, r é a taxa de crescimento e K é o valor limite da população ou capacidade de suporte do ambiente. Observe que $P(t) \to K$, quanto $t \to \infty$, isso significa que a população fica próximo de K à medida que o tempo evolui, ou seja, a população estabiliza.

Por exemplo, imagine um lago onde introduzimos uma população de peixes. No início, os peixes encontram bastante alimento e espaço. Com o tempo, a competição aumenta, com mais peixes no ambiente há menos espaço e menos comida disponível. Quando a população atinge o tamanho máximo sustentável do lago (capacidade de suporte), o crescimento desacelera e se estabiliza. Suponha que a população inicial é $P_0 = 100$ peixes, que a taxa de crescimento é $r = 0{,}3$ e a capacidade limite do lago é $K = 1000$, então o modelo é dado por

$$P(t) = \frac{1000}{1 + \left(\frac{1000}{100} - 1\right) e^{-0{,}3t}} = \frac{1000}{1 + 9e^{-0{,}3t}}$$

Figura 1 – Modelo Logístico



Fonte: Elaborado pelas autoras (2025)

Observando o gráfico, vemos que o crescimento inicial é alto, próximo de uma exponencial, mas a partir de um determinado momento, o crescimento desacelera e a população estabiliza próximo a capacidade de suporte.

ISSN: 2358-8829

Comparação dos modelos

Vamos fazer uma comparação direta dos três modelos através do problema de reprodução dos coelhos apresentado no início da sessão. Por (1), a taxa de crescimento do modelo de Fibonacci é aproximadamente $\varphi \cong 1{,}618$. Em termos de comparação, vamos considerar o modelo exponencial com taxa de crescimento aproximado com o de Fibonacci, para isso vamos considerar $r = \varphi$. Assim, o modelo exponencial é dado por

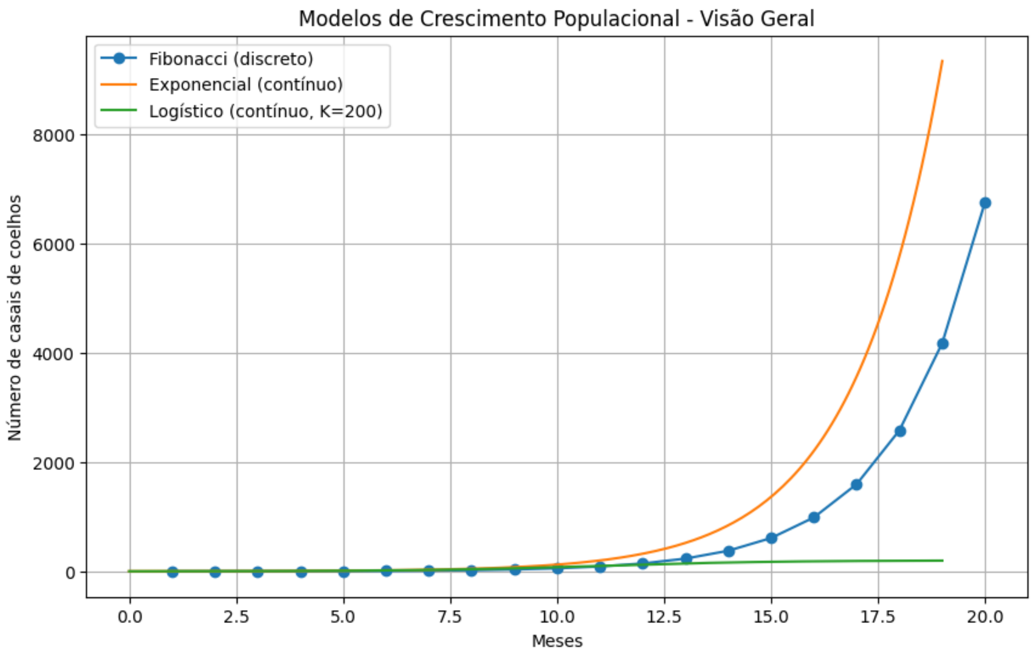
$$P_e(t) = \varphi^n.$$

Agora, considerando uma restrição na capacidade de suporte também, suponha que o local onde os coelhos estão sendo criados tenha capacidade para apenas 200 coelhos. Com esses dados, o modelo logístico é dado por

$$P(t) = \frac{200}{1 + \left(\frac{200}{1} - 1\right) e^{-0{,}4812t}} = \frac{200}{1 + 199e^{-0{,}4812t}}$$

O gráfico abaixo mostra o comportamento dos três modelos

Figura 2 – Comparação dos modelos

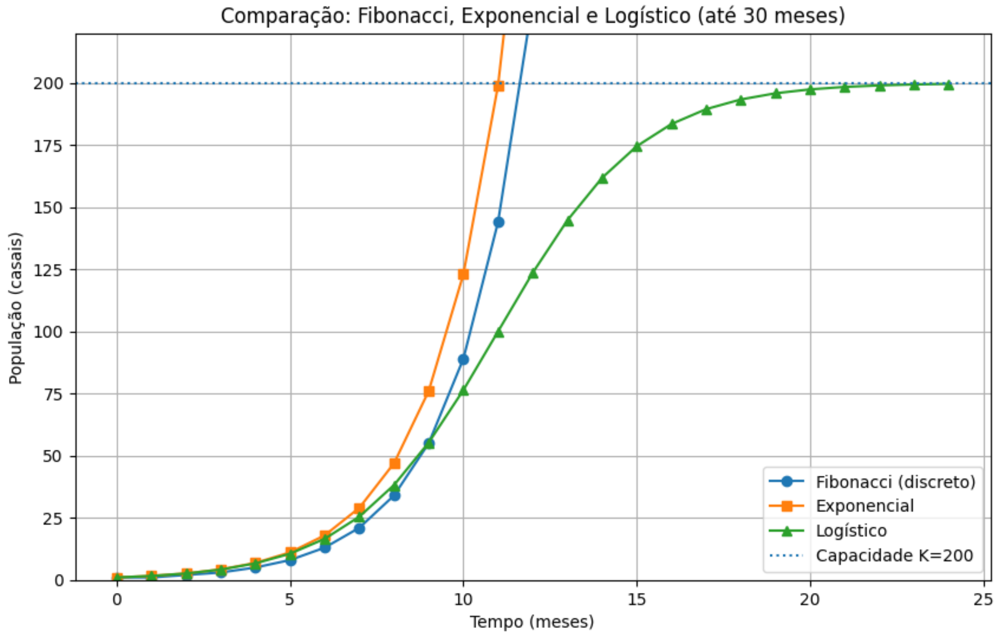


Fonte: Elaborado pelas autoras (2025)

O próximo gráfico apresenta a comparação dos três modelos no inicio do desenvolvimento, com t variando de 0 a 10 meses.

ISSN: 2358-8829

Figura 3 – Comparação inicial dos modelos



Fonte: Elaborado pelas autoras (2025)

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo logistico é mais realistico, pois leva em consideração fatores ambientais diferente dos modelo exponencial, que considera apenas a taxa de crescimento, ou do modelo de Fibinacci que depende apenas da quantidade anterior.

A comparação mostrada na Figura 3, mostra que o cresciemento de ambos os modelos são parecidos no inicio, mas o logístico se estabiliza em torno da capacidade de suporte, enquanto os outros dois modelos crescem sem restrição.

O modelo de Fibinacci cresce mais lentamente no inicio, mas acelera com o passar do tempo. O modelo exponencial cresce sem limitação é sua curva ultrapassa os outros dois. Já o modelo logistico, tem crescimento acelerado no inicio, mas se estabiliza, como mostrado na Figura 2. Esse comportamente é mais realista no probelma de reprodução de coelhos uma vez que o espaço e a alimentação são limitados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo de Fibonacci é um exemplo histórico e teórico, mas não é bom como predição realista de crescimento populacional. Apesar de suas limitações, é uma ótima ferramenta educacional que pode ser usado para introduzir o conceito de modelos matemáticos e mostra a relação de um problema real (coelhos) com uma das sequências mais importante da matemática. Além disso, serve de ponto de partida para estudo de modelos mais complexos como o exponencial e o logístico.

No modelo exponencial a taxa de crescimento é proporcional a população inicial e não é levado em consideração restrições do ambiente o que faz com que ele não seja realista a longo prazo. O modelo exponencial funciona bem quando estudamos curtos intervalos de tempo, onde as barreiras ambientais ainda não afetam o crescimento como, por exemplo, o crescimento de bactérias em laboratório quando ainda há muito espaço e nutrientes disponíveis.

Dos três modelo apresentados, o modelo logístico é o mais realista para descrever o crescimento de populações uma vez que leva em consideração a capacidade de suporte do ambiente K. Ele cresce rápidamente no inicio, mas vai estabilizando a medida que a população se aproxima de K, ao contrário dos outros modelos onde a população cresce indefinidamente. Porém, esse modelo ainda apresenta algumas limitações como a suposição que a capacidade de suporte do seja constante, o que nem sempre acontece, ela pode ser afetada por desastres naturais, mudanças climatica ou crises sociais, por exemplo.

Palavras-chave: Crescimento Populacional; Fibonacci, modelo exponencial, modelo logístico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o Programa de Educação Tutorial – PET/FNDE pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

HEFEZ, Adam. *Elementos de Aritmética* (Texto Universitário). Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

LOPES, Mariana de Oliveira. *Sequência de Fibonacci*: propriedades, curiosidades e aplicações. 2022. 61 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2022.