

# UM ESTUDO SOBRE FUNÇÃO POROSIDADE DA REGIÃO DE COMPACTAÇÃO NO MOVIMENTO GRAVITACIONAL DE UMA SUSPENSÃO PARTICULADA EM PROVETA

Hariel Udi Santana Mendes <sup>[1]</sup>; Antônio Santos Silva <sup>[2]</sup>

<sup>[1]</sup> Universidade Federal de Sergipe, Pós-Graduação em Engenharia Química – harieludi@hotmail.com

<sup>[2]</sup> Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Matemática – ass@infonet.com.br

## Resumo

O movimento de suspensões particuladas é um grande objeto de estudo nas diversas áreas da Engenharia. Diversas aplicações são encontradas para este estudo, como, por exemplo, no escoamento em meios porosos e na sedimentação. Neste trabalho, com base nos testes de proveta para a sedimentação gravitacional, consideram-se as regiões de sedimentação livre, de transição e de compactação, ocupadas pela suspensão durante o processo. Na região de compactação, a suspensão será modelada por um meio poroso com restrição de incompressibilidade que, sob certas condições, permite o estabelecimento de uma equação diferencial para a função porosidade. Com isso, formula-se um modelo matemático cuja solução fornece diretamente a função porosidade para a região de estudo. Na equação que define a função porosidade surgem parâmetros constantes que precisam ser determinados, os quais também aparecem nas equações que descrevem as alturas das interfaces superior descendente e inferior ascendente e a porosidade média da suspensão. Foram determinados resultados numéricos que mostraram que o comportamento da curva obtida para a interface superior ascendente e porosidade média com o tempo são compatíveis com formas da literatura.

**Palavras-chave:** Função porosidade; região de compactação; meios porosos; sedimentação.

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo dos fenômenos de transportes em meios porosos é relevante tanto do ponto de vista teórico, como em diversas situações práticas que podem ser aplicadas nas diversas áreas da Engenharia, como por exemplo, na Engenharia de Processos Químicos, com ênfase nas operações unitárias que envolvem esta aplicação [1]. Na Engenharia de Petróleo, uma grande aplicação para o escoamento em meios porosos seriam os métodos de recuperação de petróleo, que consistem em injeção de fluido no reservatório, na maioria das vezes água ou gás, para aumentar a recuperação do óleo *in place* no reservatório [2].

Baseada na mecânica do contínuo para uma partícula sólida, é importante destacar que o movimento de queda acelerada de uma partícula num fluido é considerado o ponto de partida para se obter informações para a análise de parâmetros de uma suspensão particulada [3]. Do ponto de vista de um meio poroso saturado com fluido, modelado pela Teoria Contínua de Misturas Sólido-Fluido sem reações químicas, considerando que a densidade do sólido e do fluido puros são constantes, ou seja, com restrição de incompressibilidade, a formulação teórica,

como apresentada em [4], fornece equações de balanço generalizadas, envolvendo grandezas constitutivas e arbitrárias.

Para um problema unidimensional, pode ser utilizada modelagem matemática do movimento gravitacional de suspensões particuladas em proveta, que não é simplesmente um problema puro de sedimentação. A modelagem envolvida é mais complexa, visto que, são envolvidas sub-regiões que variam com o tempo e são delimitadas por interfaces em movimento, sendo que em cada região a porosidade e as velocidades satisfazem um sistema de equações diferenciais parciais [5]. Além disso, é necessário estabelecer condições de contorno e iniciais para a resolução das equações diferenciais, considerar as condições de salto através da interface em movimento para caracterizar o problema que será modelado [5].

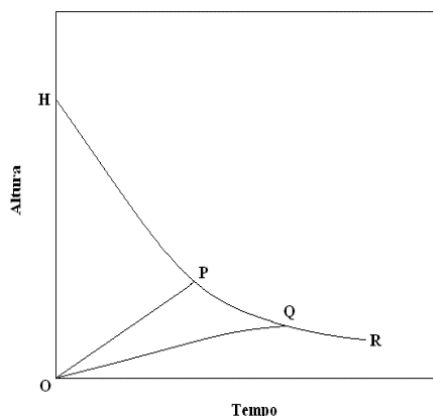
Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo acerca da função porosidade na região de compactação do movimento gravitacional de uma suspensão particulada em proveta, através de modelagem matemática.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 Modelagem Matemática

De acordo com o modelo matemático proposto por [5], o movimento de queda das partículas sólidas em proveta (início do movimento de queda das partículas sólidas até o término) é possível de ser caracterizado por meio de uma curva Altura x Tempo. Esta curva é dividida em sub-regiões, as quais podem ser caracterizadas de acordo com a Figura 1.

No gráfico da Figura 1, HPQR até a altura H corresponde à região de líquido puro, OPHO corresponde à região de sedimentação livre (SL), OPQO corresponde à região de transição (RT) e a região limitada por OQR e o eixo dos tempos corresponde à região de compactação (RC). As curvas HPQR, OP e OQ correspondem, respectivamente, às alturas da interface superior descendente, da onda de aceleração e da interface inferior ascendente.



*Figura 1: Gráfico representativo do processo de sedimentação em proveta.*

As seguintes relações podem ser escritas de cada uma das curvas da Figura (1):

$$x(t), 0 \leq t \leq \infty \quad \bar{x}(t), 0 \leq t \leq t_0 \quad z(t), 0 \leq t \leq t_c \quad (1)$$

sendo  $t$  a variável tempo,  $x(t)$  a altura da interface superior descendente,  $\bar{x}(t)$  a altura da onda de aceleração e  $z(t)$  a altura da interface inferior ascendente. O tempo  $t_0$  indica o instante de encontro da interface superior descendente com a onda de aceleração e o tempo  $t_c$  indica o instante de encontro das duas interfaces. As alturas satisfazem as condições iniciais (equação 2) e as condições de contorno (equação 3).

$$x(0) = H \quad \bar{x}(0) = 0 \quad z(0) = 0 \quad (2)$$

$$\bar{x}(t_0) = x(t_0) \equiv x_0 \quad x(t_c) = z(t_c) \equiv x_c \quad (3)$$

onde  $H$  é a altura inicial da suspensão na proveta. Além disso, considera-se  $y$  como a coordenada espacial (posição) orientada para cima de tal modo que  $y = 0$  representa o fundo da proveta ou o eixo dos tempos na Figura 1. A função porosidade da suspensão na proveta é definida através da Equação 4.

$$\varepsilon(y, t) \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (4)$$

A função porosidade satisfaz a condição inicial:

$$\varepsilon(y, 0) = \varepsilon_0 = \text{constante} \quad 0 \leq y \leq H \quad (5)$$

Com a seguinte notação no fundo da proveta:

$$\varepsilon(0, t) = \varepsilon_m(t) \quad 0 \leq t \leq \infty \quad \varepsilon_{mf} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_m(t) \quad (6)$$

As velocidades do fluido e do sólido, são definidas, respectivamente, por:

$$V_1(y, t) \text{ e } V_2(y, t) \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (7)$$

E são nulas no fundo da proveta, expressando as condições de contorno:

$$V_1(0, t) = V_2(0, t) = 0 \quad 0 \leq t < \infty \quad (8)$$

Modelando a suspensão na proveta por um meio poroso com restrição de incompressibilidade, da teoria de [4], os balanços de massa e quantidade de movimento linear podem ser escritos como segue.

## 2.2 Balanços Básicos

- Balanços de massa

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon V_1) = 0 \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} ((1 - \varepsilon) V_2) = 0 \quad (9)$$

- Balanços de quantidade de movimento linear

$$\rho_1 a_1 = -\varepsilon \frac{\partial P_f}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + m + \rho_1 g_1 \quad \rho_2 a_2 = -(1 - \varepsilon) \frac{\partial P_s}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - m + \rho_2 g_2$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \Pi_{sf}}{\partial t} \quad , \quad \Pi_{sf} = P_s - P_f$$

$$g_1 = g_2 = -g \quad (10)$$

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_f \quad \rho_2 = (1 - \varepsilon) \rho_s$$

$$a_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial y} \quad \alpha = 1, 2$$

sendo  $P_f(y, t)$  e  $P_s(y, t)$  pressões arbitrárias,  $a_\alpha$  a aceleração,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  a parte constitutiva do tensor tensão,  $m(y, t)$  a força difusiva ou resistiva,  $\rho_f$  e  $\rho_s$  as massas específicas do fluido e do sólido, respectivamente e  $g$  a aceleração da gravidade.

Como, das equações (8), tem-se que a função  $\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2$  não depende de  $y$ , a partir da equação (7), nota-se que:

$$\varepsilon V_1 + (1 - \varepsilon) V_2 = 0 \quad 0 \leq y \leq x(t) \quad 0 \leq t < \infty \quad (11)$$

### 2.3 Porosidade na Região de Compactação

A região de compactação é limitada pela proveta e por:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq z(t) & \quad 0 \leq t \leq t_c \\ 0 \leq y \leq x(t) & \quad t_c \leq t \leq \infty \end{aligned} \quad (12)$$

Por serem  $P_f(y, t)$  e  $P_s(y, t)$  arbitrárias, estas pressões podem ser escolhidas de modo adequado, de tal maneira que do sistema (10) pode ser escrita a equação de interseção:

$$\begin{aligned} \beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \varepsilon(1 - \varepsilon)(V_2 - V_1) + V_0(\varepsilon - \varepsilon^*) \\ \varepsilon^*(t) &= \varepsilon_\infty + \frac{3}{4}(\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \\ \varepsilon_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t) \end{aligned} \quad (13)$$

sendo  $V_0$  uma velocidade constante,  $\varepsilon_\infty$  uma porosidade crítica e, com base em (6),  $\varepsilon_{mf}$  é a porosidade final no fundo da proveta.

Com isso, a partir das equações de balanço de massa (9) e das equações (11) e (13), obtém-se a equação diferencial parcial a seguir:

$$\beta_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (14)$$

Pelas equações (6), (8) e (13) tem-se a condição de contorno:

$$\beta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(0, t) = V_0(\varepsilon_m(t) - \varepsilon^*(t)) \quad (15)$$

Além disso, adota-se outra condição de contorno:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(0, t) = -3k(\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \quad , \quad k = \frac{V_0^2}{16\beta_0} \quad (16)$$

Baseado na solução estática de (13), introduz-se a função:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \exp\left(\frac{4y}{L_0}\right) \quad , \quad L_0 = \frac{V_0}{4k} \quad (17)$$

Para a obtenção da condição final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(y, t) = \varepsilon(y) \quad (18)$$

Assim, as condições representadas pelas equações (2), (5), (15), (17) e (18) e a equação diferencial (14) formam um problema para a função porosidade, cuja solução exata é dada por:

$$\varepsilon(y, t) = (\varepsilon_m(t) - \varepsilon_{mf}) \exp\left(\frac{y}{L_0}\right) + \varepsilon(y) \quad (19)$$

Produzindo, pelas equações (6) e (8), a relação para a porosidade no fundo da proveta:

$$\varepsilon_m(t) = \varepsilon_{mf} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{mf}) \exp(-3kt) \quad (20)$$

Para a localização da interface superior ascendente, adota-se a condição:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = k \left( \frac{2}{kt+1} - 3 \right) \xi_1 \quad \xi_1(t) \equiv \varepsilon(z(t), t) - \varepsilon(z(t)) \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (21)$$

Então, pelas equações (2), (16), (17), (19), (20) e (21), a altura da interface inferior ascendente é dada por:

$$z(t) = \frac{V_0}{2k} \ln(kt+1) \quad 0 \leq t \leq t_c \quad (22)$$

Para o cálculo de  $k$  e  $V_0$ , utiliza-se o encontro das interfaces, que fornece as relações:

$$V_0 = 2\omega_0 \quad kx_c = \omega_0 \ln(kt_c+1) \quad \omega_0 t_c > x_c \quad (23)$$

sendo  $\omega_0$  a velocidade inicial da interface inferior ascendente.

Para encontrar a altura da interface superior descendente após o encontro das interfaces pode-se utilizar como base a equação (19). Para isso, como ponto de partida, considera-se a porosidade média da região de compactação após o encontro das interfaces, expressa por:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{1}{x(t)} \int_0^{x(t)} \varepsilon(y, t) dy \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (24)$$

Logo, das equações (19), (20) e (24) temos:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{mf}) \frac{H}{x(t)} E_1 + (\varepsilon_{mf} - \varepsilon_\infty) \frac{H}{x(t)} E_2 \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (25)$$

onde

$$E_1 = r_0 (\exp(-3kt)) \left( \exp\left(\frac{x(t)}{L_0}\right) - 1 \right) \quad (26)$$

$$E_2 = \frac{r_0}{4} \left( \exp\left(\frac{4x(t)}{L_0}\right) - 1 \right) \quad , \quad r_0 = \frac{L_0}{H} \quad (27)$$

Usando o balanço de massa, tem-se que:

$$(1 - \bar{\varepsilon}(t))x(t) = (1 - \varepsilon_0)H \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (28)$$

Assim, a partir das equações (24), (25), (26), (27) e (28) chega-se à expressão:

$$\frac{x(t)}{H} = A_0 + (A_f - A_0)E_1 + (1 - A_f)E_2 \quad t_c \leq t \leq \infty \quad (29)$$

A qual, com base em (23), (26) e (27), fornecem de forma implícita, a altura da interface superior descendente após o encontro das interfaces, sendo que:

$$A_0 = \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_\infty} \quad \text{e} \quad A_f = \frac{1 - \varepsilon_{mf}}{1 - \varepsilon_\infty} \quad (30)$$

Por (3) e (29) no ponto de encontro das interfaces tem-se:

$$\frac{x_c}{H} = A_0 + (A_f - A_0)E_{1c} + (1 - A_f)E_{2c} \quad (31)$$

onde

$$E_{1c} = E_1 \quad \text{e} \quad E_{2c} = E_2 \quad \text{para} \quad x = x_c \quad \text{e} \quad t = t_c \quad (32)$$

Além disso, considerando-se o sedimento final ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$\frac{x_f}{H} = A_0 + (1 - A_f)E_{2f}, \quad E_{2f} = E_2 \quad \text{para} \quad x = x_f \quad (33)$$

sendo  $x_f$  a altura final da interface superior descendente.

Com isso, das equações (31), (32) e (33), obtêm-se:

$$A_f = \frac{r_c - E_{2c} + (E_{2f} - r_f)(1 - E_{1c})}{E_{1c} - E_{2c} + E_{2f}(1 - E_{1c})} \quad (34)$$

$$A_0 = r_f - (1 - A_f)E_{2f} \quad , \quad r_c = \frac{x_c}{H} \quad , \quad r_f = \frac{x_f}{H} \quad (35)$$

As quais fornecem, por (30), os resultados:

$$\varepsilon_\infty = 1 - \frac{1 - \varepsilon_0}{A_0} \quad (36)$$

$$\varepsilon_{mf} = 1 - (1 - \varepsilon_0) \frac{A_f}{A_0} \quad (37)$$

Assim, por (17), (19), (20), (22), (36) e (37), a porosidade para a região de compactação fica completamente estabelecida.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados para a função porosidade dependem, por (17), (19) e (20), dos valores de  $V_0$ ,  $k$ ,  $\varepsilon_{mf}$  e  $\varepsilon_\infty$ . De acordo com [5], para definir o ponto de encontro das interfaces ( $x_c, t_c$ ), deve-se obter o ponto mínimo de:

$$W = \frac{u_0 x}{2(H - x) - u_0 t} \quad (38)$$

Onde  $u_0$  é a velocidade de sedimentação livre.

As relações (23) formam a base inicial para o cálculo de  $\omega_0$  e  $k$ , começando com  $\omega_0$ , o qual já tem um limitante inferior.

Para a suspensão aquosa de atapulgita com porosidade inicial 0,97 e altura inicial da suspensão na proveta de 40 cm [6], o valor de  $\omega_0$  compatível com (29) foi de 0,098 cm/min, resultado em  $k$  igual a 0,006 min<sup>-1</sup>. Para esta suspensão são mostrados resultados nas Tabelas 1 e 2.

A Tabela 1 mostra que a função porosidade da região de compactação, antes do instante de encontro das interfaces, comporta-se de acordo com dados da literatura, representativos do fenômeno, ou seja, para cada instante a porosidade aumenta do fundo da proveta até a interface superior descendente, diminuindo com o tempo em cada posição.

A Tabela 2 mostra que a função porosidade da região de compactação, após o instante de encontro das interfaces, também se comporta como esperado, ou seja, para cada instante a porosidade aumenta do fundo da proveta até a interface superior descendente, diminuindo com o tempo em cada posição.

*Tabela 1: Valores da porosidade da região de compactação antes do encontro das interfaces.*

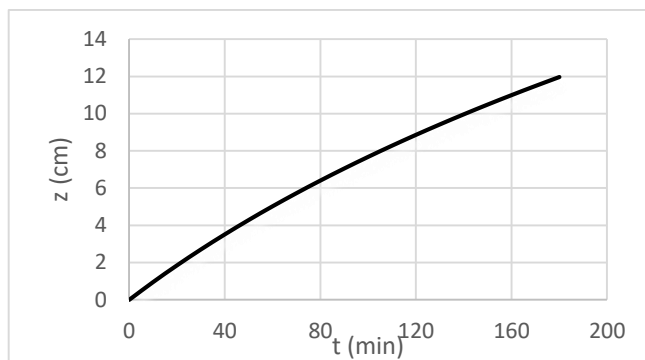
y (cm)	$\varepsilon(y, t), \quad 0 \leq y \leq z(t)$			
	40 min	80 min	120 min	160 min
0	0,9249	0,9039	0,8941	0,8896
1,0	0,9305	0,9066	0,8954	0,8902
2,0	0,9368	0,9096	0,8969	0,8910
3,0	0,9442	0,9132	0,8987	0,8920
4,0		0,9173	0,9009	0,8932
5,0		0,9223	0,9036	0,8949
6,0		0,9284	0,9071	0,8972
7,0			0,9117	0,9004
8,0			0,9181	0,9052
9,0				0,9126
10,0				0,9242
	z(t), cm			
	3,49	6,34	8,74	10,81

*Tabela 2: Valores da porosidade da região de compactação após o encontro das interfaces.*

y (cm)	$\varepsilon(y, t), \quad 0 \leq y \leq x_f$ ( $x_f = 11,25$ cm)			
	200 min	220 min	240 min	260 min
0	0,8874	0,8869	0,8865	0,8862
1,0	0,8878	0,8871	0,8867	0,8864
2,0	0,8882	0,8875	0,8870	0,8866
3,0	0,8888	0,8880	0,8874	0,8870
4,0	0,8896	0,8887	0,8880	0,8875
5,0	0,8908	0,8897	0,8889	0,8884
6,0	0,8925	0,8912	0,8904	0,8898
7,0	0,8951	0,8937	0,8927	0,8920
8,0	0,8992	0,8976	0,8964	0,8957
9,0	0,9058	0,9039	0,9026	0,9017
10,0	0,9164	0,9142	0,9127	0,9117

A Figura 2 ilustra que a forma da curva da interface inferior ascendente com o tempo resultante do modelo apresenta o comportamento esperado [7].





*Figura 2: Altura da interface inferior ascendente versus tempo.*

#### 4. CONCLUSÕES

O modelo matemático apresentado fornece a função porosidade em termos de parâmetros, os quais podem ser determinados conhecendo-se os movimentos das interfaces, principalmente o da interface superior descendente, relacionada à porosidade média da suspensão. Assim, dados experimentais mostrando as alturas das interfaces e a porosidade média podem ser facilmente empregados para a determinação de parâmetros de sedimentação. Para a suspensão testada, verificou-se o comportamento compatível da função porosidade e da interface inferior ascendente com a literatura.

#### 5. REFERÊNCIAS

- [1] CREMASCO, M.A. **Operações unitárias em sistemas particulados e fluidodinâmicos** – 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2014.
- [2] ROSA, A. J. R. S. CARVALHO e J. A. D. XAVIER: **Engenharia de Reservatórios de Petróleo**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- [3] BASSET, A. B. **Dynamic simulation of sheared suspensions**. Philosophical Transactions of the Royal Society A, v. 179, p. 43-63, 1888.
- [4] SILVA, A. S.; JESUS, E.; PAGANO, R. L.; MENESES, L. D. M.; ROCHA C. P. S. **Equações do movimento de suspensões particuladas com restrição de incompressibilidade**. Scientia Plena, v. 9, n. 11, p. 114201-1, 2013.
- [5] LIBÓRIO, D. O. **Construção de uma Base de Informações para a Diferença de Pressões Arbitrárias em uma Suspensão Particulada**. 2016, 74f, Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Sergipe, UFS, 2016.
- [6] TILLER, F. M.; D’AVILA, J.S. **Zona de compressão em sedimentação**. Anais do VIII ENEMP, Vol. 2, p. 269-297. Curitiba-PR. 1980.
- [7] FONT, R. **Compression Zone Effect in Batch Sedimentation**. AIChE Journal, Vol. 34, n. 2, p. 229-252. 1988.