IV CONEPETRO EDIÇÃO DIGITAL
IV Congresso Nacional de Engenharia de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis
VI Workshop de Engenharia de Petróleo
www.conepetro.com.br ISSN: 2446-8339

ATRATORES GLOBAIS E EXPONENCIAIS PARA MISTURAS DE SÓLIDOS COM LEI DE FOURIER

Jamille Ludimila Lopes de Almeida [1]
Mirelson Martins Freitas [2]

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo do comportamento assintótico das soluções de um sistema não linear de equações diferencias parciais que modela mistura de sólidos com mecanismos de dissipação não linear e lei de Fourier. Esse modelo é muito utilizado na engenharia de reservatórios para a modelagem matemática de fenômenos físicos como o escoamento e distribuição de calor no meio poroso. Usando a recente teoria de quase-estabilidade, provamos a existência de um atrator global regular com dimensão fractal finita, o qual é caracterizado como uma variedade instável do conjunto dos pontos estacionários. A quase-estabilidade do sistema é obtida por meio de uma estimativa de estabilidade que também implica a existência de um atrator exponencial generalizado.

Palavras-chave: Mistura de sólidos, Lei de Fourier, Atratores globais, Atratores Exponenciais.

INTRODUÇÃO

Existem diversas aplicações da teoria de mistura de sólidos no campo das ciências biológicas, no campo da engenharia civil e na área da engenharia de reservatórios. Devido à formação e construção do meio poroso, ele possui problemáticas com alto nível de dificuldade. A complexidade se deve às características do reservatório (por exemplo, heterogeneidade de permeabilidade e anisotropia) ou ao processo de recuperação de óleo (por exemplo, ação capilar, gravidade e comportamento de fase) ou uma combinação de ambos. A interpretação cinemática, a construção das equações de balanço de massa e energia foi proposta pelos autores Contieri (1937), Flügge e Siegfried (1960) e Bowen (1980) onde houve a aplicação da teoria das misturas através da relação entre escoamento e deformação utilizando uma abordagem lagrangiana para o fluxo e analisando o comportamento de cada partícula do sólido. Foi definido que nessa teoria a propriedade de potencial químico é concedida a cada componente.

---

[1] Graduanda do Curso de Engenharia de Exploração e Produção de Petróleo da Universidade Federal do Pará - UFPA, jamille.almeida@salinopolis.ufpa.br;
[2] Professor orientador: Doutor, Faculdade de Matemática - UFPA, mirelson@ufpa.br.

ISSN: 2446-8339

Para o caso especial em que o sólido é rígido e o fluido incompressível, restrições adicionais devem ser usadas ao deduzir as restrições termodinâmicas (BOWEN, 1980, p. 1129).

Um trabalho mais recente Chueshov e Lasiecka (2010), estudou o comportamento assintótico da solução para misturas dadas por

$$\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(u-w) + \beta_1\theta_{1,x} + \beta_2\theta_{1,x} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T),$$

$$\rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(u-w) + \gamma_1\theta_{1,x} + \gamma_2\theta_{1,x} = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T), \qquad (1)$$

$$b_1\theta_{1,t} + b_2\theta_{2,t} - K_{11}\theta_{1,xx} - K_{12}\theta_{2,xx} + \beta_1 u_{xt} + \beta_2 w_{xt} + a(\theta_1 - \theta_2) = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T),$$

$$b_2\theta_{1,t} + b_3\theta_{2,t} - K_{21}\theta_{1,xx} - K_{22}\theta_{2,xx} + \gamma_1 u_{xt} + \gamma_2 w_{xt} - a(\theta_1 - \theta_2) = 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T),$$

onde as componentes tinham duas temperaturas diferentes. Os autores provaram o decaimento exponencial para uma classe genérica de materiais. No entanto, para condições restritas e considerando uma condição de contorno de Neumann, os autores concluíram que em geral, o sistema não é exponencialmente estável; eles provaram que a solução decai polinomialmente a uma taxa de $t^{-1/2}$. Os autores também provaram que esta taxa é ótima para o modelo estudado. Usando condição de contorno de Dirichlet, eles provaram o decaimento polinomial com taxa de $t^{-1/6}$.

Todavia, quando a temperatura apresenta um comportamento isotérmico, a presença de termos dissipativos no sistema acoplado são suficientes para obter o decaimento exponencial da energia do sistema. Esse foi o tema estudado por Quintanilla (2002) utilizando a teoria de Eringen (1994) e Cemal (1994) para deduzir o modelo de sólidos elásticos porosos no sistema abaixo:

$$\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi(z_t - u_t) - \mu_z z_{xxt} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty) \qquad (2)$$

$$\rho_u u_{tt} - \mu u_{xx} - a_2 z_{xx} - \xi(z_t - u_t) = 0 \quad em \quad (0,L)\times(0,\infty),$$

onde $\pm\xi(z_t - u_t)$ e $\mu_z z_{xxt}$ representam os termos dissipativos, $z = z(x,t)$ e $u = u(x,t)$ são variáveis dependentes que descrevem o deslocamento do fluido e do material. Usando o método da energia, o autor provou que a solução do sistema decai exponencialmente.

É importante destacar que todos os modelos citados acima são lineares e discutem apenas a estabilidade exponencial e polinomial. No entanto, numerosos modelos que são representados por equações diferenciais parciais e descrevem os fenômenos físicos que aparecem na engenharia são não lineares. Portanto é importante o estudo do comportamente assintótico (comportamente futuro) das soluções de tais modelos. Um ponto que verificamos

ISSN: 2446-8339

que ainda não foi abordado na literatura é problemas de mistura de sólidos não lineares, considerando a transferência de calor, bem como a existência de atratores globais e exponenciais. Assim, o presente trabalho pretende ser uma nova contribuição a este assunto.

Neste trabalho, consideramos o seguinte sistema que modela uma mistura de sólidos com damping não linear e lei de Fourier

$$\begin{aligned} &\rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \delta\theta_x + f_1(z,u) = h_1 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,T), \\ &\rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + g(u_t) + f_2(z,u) = h_2 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,T), \\ &c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \delta z_{xt} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,T). \end{aligned} \tag{3}$$

Aqui $h_1 = h_1(x)$ e $h_2 = h_2(x)$ representam as forças externas, $f_1(z,u)$ e $f_2(z,u)$ são termos de fonte não-lineares. O sistemas (3) é completado com as condições contorno e iniciais:

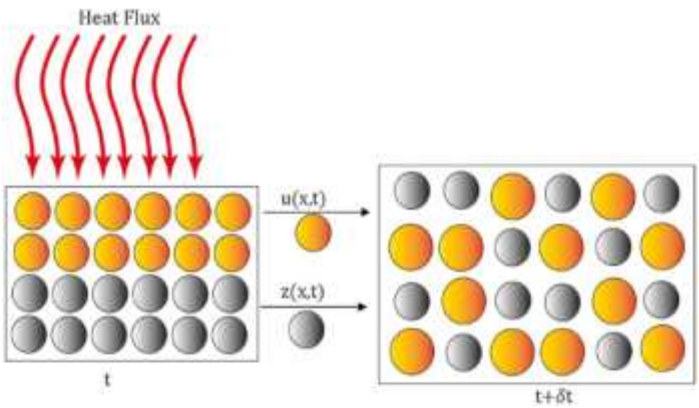
$$\begin{aligned} &z(0,t) = z_x(L,t) = u(0,t) = u_x(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, t > 0, \\ &z(x,0) = z_0(x), z_t(x,0) = z_1(x), 0 < x < L, \\ &u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), 0 < x < L, \\ &\theta(x,0) = \theta_0(x), 0 < x < L. \end{aligned} \tag{4}$$

Onde o deslocamento de cada constituinte e a temperatura, são respectivamente: $z(x,t): [0,L]\times[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}, u(x,t): [0,L]\times[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}, \theta(x,t): [0,L]\times[0,T] \longrightarrow \mathbb{R},$ As densidades das massas são descritas por $\rho_z > 0, \rho_u > 0$ e as constantes positivas c, κ e δ são relacionadas às hipóteses da termoelasticidade. Para $i = 1,2,3$ as constantes a_i satisfaz a relação abaixo:

$$a_2^2 < a_1 a_3 \tag{5}$$

O deslocamento dos componentes do sistema é influenciado pelo aumento de volume das partículas que tem origem na presença do fluxo térmico. A figura abaixo sinaliza o fenômeno:

Figura 1: Representação da mistura sólida binária sob o efeito do fluxo de calor.



Fonte: O autor

O principal objetivo desse trabalho é analisar o comportamento assintótico do sistema dinâmico associado ao problema (3)-(4) bem como sua aplicação na engenharia. Mais especificamente, provamos a existência de um atrator global (entidades que descrevem a dinâmica assintótica desses sistemas que permitem prever o estado futuro dos sistemas) suave com dimensão fractal finita. Provamos também a estrutura geométrica do atrator, a saber, sua caracterização pela variedade instável do conjunto das soluções estacionárias do sistema. Finalmente, provamos a existência de um atrator exponencial generalizado.

METODOLOGIA

Para obter nossos resultados, utilizamos métodos recentes de quase-estabilidade desenvolvidos nos trabalhos de Chueshov e Lasiecka (2010) e Chueshov (2015). A seguir, lembramos a definição de quase-estabilidade para sistemas dinâmicos dissipativos.

Suponhamos que X, Y e Z são espaços de Banach reflexivos com X compactamente imerso em Y. Assumimos que o semigrupo o semigrupo $S(t)$ definido em um espaço de fase H satisfaz as seguintes condições:

- $S(t)z = \big(u(t), u_t(t)\big), z = \big(u(0), u_t(0)\big) \in H = X \times Y,$
- A funções u possui a seguinte regularidade

  $u \in C([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); Y).$

Definição: O sistema é dito quase-estável sobre um conjunto limitado invariante $B \subset H$, se existe uma seminorma compacta $\mu_X(\cdot)$ definida no espaço X e funções escalares não negativas $a(t), b(t)$ e $c(t)$ sobre $[0,\infty)$ tais que:

- $a(t)$ e $c(t)$ são localmente limitadas em $[0,\infty)$;
- $b(t) \in L^1(0,\infty)$ possui a propriedade $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0;$
- para todo $z_1, z_2 \in B$ e $t > 0$ as seguintes condições:

  $|S(t)z_1 - S(t)z_2|_H^2 \leq a(t)|z_1 - z_2|_H^2$,

  $|S(t)z_1 - S(t)z_2|_H^2 \leq b(t)|z_1 - z_2|_H^2 + c(t) \sup_{0<s<t} \left[\mu_X\big(u^1(s) - u^2(s)\big)\right]^2$

  são satisfeitas. Aqui denotamos $S(t)z_i = \big(u^i(t), u_t^i(t)\big)$, $i = 1,2$.

 ISSN: 2446-8339

A quase-estabilidade do nosso sistema foi provada por meio de uma desigualdade técnica chamada de desigualdade de estabilidade. Com isso, a existência de atratores globais com dimensão fractal finita e suas propriedades de suavidade foram obtidas (veja Teorema 1 abaixo).

REFERENCIAL TEÓRICO

Assumimos as seguintes hipóteses com base no trabalho de Ma e Monteiro (2017):

Hipóteses:

a. As forças externas $h_1, h_2 \in L^2(0, L)$;

b. Existe uma função $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nabla F = (f_1, f_2);$$

c. Existe $q \geq 1$ e $C > 0$ tal que

$$\left|\nabla f_j(z,u)\right| \leq C\left(|z|_{q-1} + |u|_{q-1} + 1\right), j = 1{,}2;$$

d. Existem constantes $\eta \geq 0, m_F > 0$ com

$$0 \leq \eta < \frac{1}{2\eta_0},$$

Tal que

$$F(z,u) - \eta(|z|^2 + |u|^2) - m_F$$

Além disso,

$$\nabla F(z,u) \cdot (z,u) - F(z,u) \geq -\eta(|z|^2 + |u|^2) - m_F,$$

e. Assumimos que $g \in C^1(\mathbb{R})$ é uma função crescente com $g(0) = 0$ e existe $m, M > 0$ tal que

$$m \leq g^{'}(s) \leq M, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Para obter os resultados sobre a existência e unicidade de soluções, reescrevemos o sistema (3)-(4) em um problema de Cauchy equivalente e utilizamos a teoria clássica de semigrupos não lineares proposta por Chueshov e Lasiecka (2002). Graças a boa colocação do problema, podemos definir o semigrupo solução $(\mathcal{H}, S(t))$. No estudo do comportamento assintótico do sistema, primeiro estabelecemos uma desigualdade bastante técnica, usualmente chamada de desigualdade de estabilidade que desempenha papel importante para provar a existência de atratores globais e suas propriedades. Essa desigualdade é dada no lema a seguir.

 ISSN: 2446-8339

Lema. Suponhamos que as hipóteses (a-e) sejam satisfeitas, $B \subset \mathcal{H}$ é um conjunto limitado positivamente invariante e que $S(t)U^j = (z^j, u^j, z_t{}^j, u_t{}^j, \theta^j)$ sejam as soluções do sistema (3)-(4) com condições iniciais $U^j \in B$, $j = 1, 2$. Então existem constantes $\mu_0, \gamma_0, C_B' > 0$ tais que:

$$E(t) \leq \gamma_0 e^{-\mu_0 t} E(0) + C_B' \int_0^t e^{-\mu_0 (t-s)} \left(\|z(s)\|_{2p}^2 + \|u(s)\|_{2p}^2\right) ds,$$

onde $z = z^1 - z^2$ e $u = u^1 - u^2$.

Essa desigualdade implica a quase-estabilidade do sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$. Em seguida, provamos que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é gradiente e que o conjunto de seus pontos estacionários é limitado. Portanto a existência de atrator global e suas propriedades é garatida por resultados abstratos no trabalho de Chueshov e Lasiecka (2010) .

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O problema (3)-(4) define um sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$, onde $\mathcal{H}$ é o espaço de Hilbert definido por:

$$\mathcal{H} = H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L),$$

e $S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o semigrupo fortemente contínuo dado por:

$$S(t)U_0 = \left(z(t), u(t), z_t(t), u_t(t), \theta(t)\right), \quad t \geq 0.$$

Onde o lado direito é a única solução fraca do problema (3)-(4). O principal resultado do nosso trabalho é dado no seguinte teorema:

Teorema. O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui atrator global $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{H}$, com dimensão fractal finita. Além disso, **A** é caracterizado por

$$A = M_+^u(\mathcal{N}) = \{h \in \mathcal{H} : \text{existe uma solução global e limitada } U(t),$$

$$\text{tal que } U(0) = h \text{ e } \lim_{t \to -\infty} d(U(t), \mathcal{N}) = 0\},$$

onde $\mathcal{N}$ é o conjunto dos pontos estacionários de $(\mathcal{H}, S(t))$, isto é,

$$\mathcal{N} := \{h \in \mathcal{H};\ S(t)h = h,\ \forall t \geq 0\}.$$

Comentário da prova: Como mencionado anteriormente, a prova é baseada nos métodos de quase-estabilidade e Lyapunov. Primeiro, provamos uma desigualdade chamada de desigualdade de estabilidade donde concluímos a quase-estabilidade do sistema dinâmico. Em seguida provamos que o sistema dinâmico é gradiente com um fucional de Lyapunov equivalente a norma do espaço de fase. Além disso, provamos que o conjunto de seus pontos estácionários é limitado no espaço de fase. Finalmente, aplicamos os resultados abstratos de Chueshov e Lasiecka para concluir a prova do teorema.

É importante ressaltar que os resultados contidos no teorema acima são novos e originais. Portando o presente trabalho contribui para um avanço significativo sobre dinâmica não linear de sistemas de misturas de sólidos com lei de Fourier.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, caracterizamos o comportamento assintótico por meio de atratores globais compactos de um sistema de mistura de sólidos com damping não linear e lei de Fourier pela primeira vez na literatura. Em vez de mostrar a existência de um conjunto absorvente, provamos que o sistema é gradiente e assintóticamente compacto, e assim obtemos a existência de um atrator global, que se caracteriza como uma variedade instável do conjunto de soluções estacionárias. Observe que a compacidade assintótica para o problema de mistura (3)-(4) com apenas uma dissipação (mesmo para o caso linear) leva a uma classe de problema significativamente mais difícil e isso nunca foi considerado na literatura. Usamos a recente teoria de quase-estabilidade desenvolvida por Chueshov e Lasiecka (2010) e Chueshov (2015) diretamente em um conjunto positivamente invariante e limitado. Esta nova e potente teoria implica ao mesmo tempo a suavidade e a dimensão fractal finita do atrator, bem como a existência de atratores exponenciais.

AGRADECIMENTOS

À Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PROPESP) pelo apoio financeiro,
Ao Dr. Mirelson Martins Freitas pela orientação,
Aos Drs. Anderson de Jesus A. Ramos, Dilberto S. Almeida Júnior e Pedro Tupã P. Aum pela colaboração no trabalho.

REFERÊNCIAS

BOWEN, Ray M. "**Incompressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures**". *International Journal of Engineering Science*, vol. 18, nº 9, janeiro de 1980, p. 1129–48. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1016/0020-7225(80)90114-7.

CHUESHOV, I. ***Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems***. Springer International Publishing, 2015. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1007/978-3-319-22903-4.

CHUESHOV, I. LASIECKA, I. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation, **Comm. Partial Differential Equations** 27 (2002) 1901–1951.

CHUESHOV, I. LASIECKA, I. **Von Karman Evolution Equations. Well-posedness and Long Time Dynamics**, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.
CONTIERI, A. W. "**Presence and Distribution of Reducing Substances in Nerve Substance**. (Atti Accad. Lincei, Vol. Xxii, Pp. 359–65, 1935.) Mitolo, M." *Journal of Mental Science*, vol. 83, nº 342, janeiro de 1937, p. 104–104. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1192/bjp.83.342.104-b.

ERINGEN, CEMAL, A. "**A Continuum Theory of Swelling Porous Elastic Soils**". *International Journal of Engineering Science*, vol. 32, nº 8, agosto de 1994, p. 1337–49. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1016/0020-7225(94)90042-6.

FLÜGGE, SIEGFRIED. ***Handbuch Der PhysiknBand*** *3,1,*. 1960.

FREITAS, M., et al. "**Existence and Upper-Semicontinuity of Global Attractors for Binary Mixtures Solids with Fractional Damping**". *Applied Mathematics & Optimization*, junho de 2019. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1007/s00245-019-09590-1.

MA, TO FU, MONTEIRO, R. "**Singular Limit and Long-Time Dynamics of Bresse Systems**". *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 49, nº 4, janeiro de 2017, p. 2468–95. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1137/15M1039894.

QUINTANILLA, R. "**Exponential Stability for One-Dimensional Problem of Swelling Porous Elastic Soils with Fluid Saturation**". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 145, nº 2, agosto de 2002, p. 525–33. *DOI.org (Crossref)*, doi:10.1016/S0377-0427(02)00442-9.

RAMOS, A. J. A., et al. "**Stabilization of Swelling Porous Elastic Soils with Fluid Saturation and Delay Time Terms**". Journal of Mathematical Physics, vol. 62, no 2, fevereiro de 2021, p. 021507. DOI.org (Crossref), doi:10.1063/5.0018795.

SANTOS, L, FREITAS, M. **Global attractors for a mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping and sources terms**. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 2019, 18 (4) : 1869-1890. doi: 10.3934/cpaa.2019087