Lógica Matemática e Álgebra de Boole: uma Breve Introdução

Rodrigo Costa Ferreira*

Resumo

O presente texto realizará um estudo introdutório da *lógica matemática booleana* com fulcro nos trabalhos de Boole (2008), Rasiowa (1963: 220) e Jónsson e Tarski (1951: 891-939, 1952: 127-162). Após motivações históricas e filosóficas, definiremos formalmente a *álgebra de Boole* conforme Oliveira (2004) e Burris (1981: 129-212), bem como apresentaremos alguns teoremas fundamentais dessa álgebra. Na sequência, discutiremos como é possível por intermédio da *álgebra de Boole* construir uma semântica algébrica apropriada à *lógica proposicional clássica.* Ao final, provaremos os teoremas da correção e da completude a partir da *álgebra de Lindenbaum*, uma espécie de álgebra de Boole.

Palavras-chave: Lógica Proposicional Clássica; Lógica Matemática; Álgebra de Boole.

1 Introdução

Se é verdade que os raciocínios e argumentos matemáticos utilizam alguma lógica ou regras lógicas de inferência, não é esse o aspecto mais desenvolvido daquilo que modernamente se entende por *lógica matemática.* De certo, esta lógica progressivamente vem assumindo também um caráter de disciplina matemática à qual não são estranhas, portanto, as técnicas abstratas da matemática, de forma que alguns afirmam, com certo excesso, que a lógica matemática é mais uma "matemática lógica" do que "lógica matemática". Contudo, é melhor que se entenda que esses dois aspectos completam-se e enriquecem-se a todo instante, uma vez que a matemática corrente tem evoluído de modo a se tornar cada vez mais abstrata e rigorosa, aproximando-se, por si mesma, da lógica[1].

A lógica acha-se intimamente correlacionada com a matemática. Assim, quando buscamos aproximar a lógica e a matemática, pretendemos, tão-somente

*Mestre em Lógica Matemática pela UFPB, Doutorando em Lógica Deôntica pela UFPB-UFRN-UFPE, Professor Assistente na Universidade Federal do Semi-árido (UFERSA). E-mail: rocosfer@yahoo.com.br

[1]Oliveira (2004: 203).

sublinhar que elas se acham correlacionadas entre si de maneira profunda, tanto pelos objetos como pelos seus métodos. No fundo, uma das causas da aproximação que se verificou, a contar do século XVII e seguintes, entre a lógica e a matemática, radica no uso básico que ambas fazem do método axiomático e da formalização[2].

De acordo com a tradição, a *lógica matemática* tem início nos trabalhos do filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Tendo compreendido que a lógica, com os seus termos, proposições e silogismos, guarda uma certa semelhança com a álgebra, a partir da sua *De Arte Combinatoria*, escrita em 1666, Leibniz procura aplicar à lógica o modelo de cálculo algébrico de sua época. Nessa obra introdutória, o filósofo tenta implantar a ambiciosa construção de uma *lingua philosophica* com *characteristica universalis*, uma espécie de sistema exato e universal de notação concebido para expressar de forma clara o pensamento humano. Em paralelo, propõe o desenvolvimento de um *calculus ratiocinator* (cálculo da razão), uma espécie de cálculo que permitiria inferir, quase que mecanicamente, das premissas (combinações simbólicas convenientes) representadas na *lingua philosophica*, por conclusão, todas as coisas pensadas. Apesar do programa lógico-matemático de Leibniz, na forma como foi introduzido no século XVII, não ser teoricamente exequível, o *calculus ratiocinator* constituiu um importante precursor na metodologia da lógica matemática contemporânea[3].

Passados dois séculos da proposta de Leibniz, a *lógica matemática* tem uma formulação formal mais precisa no ano de 1847 com a publicação do livro *The Mathematical Analysis of Logic* de George Boole (1815-1864). Neste trabalho inovador, Boole estabelece a *lógica matemática* como uma espécie de cálculo lógico de classes. No mesmo ano, Augustus De Morgan (1806-1871) publica o tratado *Formal Logic* no qual desenvolve importantes estudos sobre a lógica das relações. No ano de 1854, George Boole publica o artigo *An Investigation into the Laws of thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability* complementando as teorias do seu livro de 1847. Anos depois, com Ernst Schröder (1841-1902), no volumoso tratado *Vorlesungen über die Algebra der Logic* publicado no período entre 1890 e 1895, as noções lógicas booleanas recebem um refinamento notável[4].

Uma abordagem simbólica moderna à *lógica matemática* é encontrada nos trabalhos do alemão Gottlob Frege (1848-1925), em particular no *Begriffsschrift* de 1879 e no *Grundgesetze der Arithmetik* publicado no período entre 1879 e 1903, e nas pesquisas de Giuseppe Peano (1858-1932) com o extenso *Formulaire de Mathématiques* publicado a partir de 1894. Em suma, o trabalho de Peano almeja expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico, ao passo que o trabalho de Frege deriva da necessidade de uma fundamentação mais sólida à matemática.

Os trabalhos iniciados por Frege e Peano impulsionam a construção da monumental obra *Principia Mathematica* publicada entre os anos de 1910 e 1913 por Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell (1872-1970). A identificação de grande parte da matemática com a lógica é a idéia básica dessa obra. Nessa abordagem, os conceitos e teoremas matemáticos são desenvolvidos a partir de idéias lógicas, começando com o cálculo das proposições, passando pela teoria das classes e teoria das relações. No período entre 1934 e 1939 aparece o abrangente

[2]Para mais detalhes: Newton C. A. da Costa (1994: 19-21).

[3]Eves (2004: 669).; Mortari (2001: 33).; e D'Ottaviano (2008).

[4]Para mais detalhes: Kneale (1980: 325-350).

Grundlagen der Mathematik de David Hilbert (1862-1943) e Paul Bernays (1888-1977). O ambicioso programa formalista de Hilbert e Bernays tinha como objetivo fundamentar toda a matemática mediante a aplicação de sistemas formais fundamentados no método axiomático.

Os anos que se sucederam às pesquisas de Bernays e Hilbert são seguidos por inúmeros outros importantes trabalhos em lógica matemática, entre os quais, para citar alguns, o artigo *Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme I* (1931) do matemático Kurt Gödel (1906-1978)[5] e os trabalhos *On Some Fundamental Concepts of Metamathematics* (1930), *The Concept of Truth in Formalized Languages* (1935), *Boolean Algebras with Operators* (1952), entre outros, do lógico polonês Alfred Tarski (1901-1983)[6].

Assim, em particular, de modo introdutório o presente artigo pretende esboçar alguns aspectos formais da lógica matemática de Boole. Num primeiro momento (seção 2), apresentaremos algumas fundamentações filosóficas à construção da álgebra de Boole. Em seguida, em termos formais (seção 3), definiremos a estrutura da *álgebra de Boole* e exporemos alguns dos seus teoremas. Num segundo momento (subseção 4.1), enunciaremos uma *linguagem proposicional* $\mathcal{L}$, sendo-lhe fixada os símbolos primitivos, as regras de formação, esquemas de axiomas, a regra de inferência *modus ponens* e a consequência sintática: definição de teorema, conceito de demonstração, teorema da dedução. Define-se, na seqüência, a *semântica proposicional clássica*. Ao final, por intermédio da *álgebra de Lindenbaum* o *cálculo proposicional* apresentado será algebrizado, bem como provaremos o teorema da correção e o teorema da completude.

2 Motivações Filosóficas à Lógica de Boole

A lógica algébrica de Boole tem como fundamento a concepção intuitiva de "*classes de objetos*". Por exemplo, nesta lógica um dado produto xy denota uma classe de objetos que pertencem a classe x e a classe y, por outras palavras, se x, por ora, representa a classe dos objetos "brancos" e y a classe dos "ursos", então xy representa a classe dos "ursos brancos". Percebe-se, claramente, e de modo interessante, que a lei comutativa $xy = yx$ permanece válida mesmo quando aplicada a classes de objetos. Mas será que deste pequeno fato podemos afirmar existir uma íntima relação entre as leis da lógica e da álgebra? Vejamos.

Na lógica algébrica booleana, nascida da analogia das leis da álgebra com as leis relativas às classes de objetos, a lei $xx = x$ é verdadeira para quaisquer valores de x, uma vez que a classe formada com objetos que pertencem a classe x é a própria classe x. Todavia, na álgebra essa lei não é totalmente válida. A equação $x^2 = x$ tem apenas duas soluções, a saber, $x = 0$ ou $x = 1$. Tomando esse fato em conta, Boole concluiu que na lógica algébrica são válidas as leis da álgebra matemática quando os valores se limitam a 0 e 1. A lógica booleana interpretou os símbolos "1" e "0" como classes especiais, de modo que 1 representa a classe de todos os objetos (o universo) e 0 representa a classe a que nenhum objeto pertença (a classe vazia). Assim, considerando $x - y$ uma classe formada com dois objetos da classe x,

[5]Para mais detalhes sobre o *metateorema da completude semântica de Gödel* e algumas de suas conseqüências: Kneale (1980: 721-733).

[6]Para mais detalhes: Tarski (1956); e Jónsson e Tarski (1951: 891-939, 1952: 127-162).

retirado os objetos da classe y, então, pela notação, $1 - x$ seria a classe construída por todos objetos (do universo) que não fazem parte da classe x. Se de $xx = x$, por exemplo, subtraírmos de cada membro desta equação x, teríamos $x - xx = xx - x$, ou seja, $x(1 - x) = 0$ uma legítima inferência; pois se, por exemplo, x é a classe dos "homens", então $1-x$ é a classe dos objetos que "não são homens". Certamente, esse *produto* deve ser a classe vazia, posto que não se pode, ao menos na lógica clássica, exisitr um objeto que seja simultaneamente "homem" e "não-homem" (*princípio da não contradição*)[7].

3 Álgebra de Boole

Nesta seção, definiremos formalmente a *álgebra de Boole* e apresentaremos alguns dos seus teoremas.

DEFINIÇÃO 1 *Uma Álgebra de Boole $\mathcal{B}$ é uma sêxtupla ordenada $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{B},\ \sqcup,\ \sqcap,\ -,\ 0,\ 1 \rangle$ que compreende*[8]*:*

(1) *um conjunto não-vazio: $\boldsymbol{B}$;*

(2) *duas operações binárias sobre $\boldsymbol{B}$: $\sqcup, \sqcap$;*

(3) *um operador unário sobre $\boldsymbol{B}$: $-$;*

(4) *dois elementos distintos de $\boldsymbol{B}$: 0 e 1;*

Ademais, para quaisquer $\{x, y, z\} \in \boldsymbol{B}$, vale o seguinte:

($Ax_{\mathcal{B}}$ **1)** ***Comutatividade***. *Para todo $\{x, y\} \in \boldsymbol{B}$, temos*

$$x \sqcap y = y \sqcap x;$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **2)** ***Comutatividade***. *Para todo $\{x, y\} \in \boldsymbol{B}$, temos*

$$x \sqcup y = y \sqcup x;$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **3)** ***Distributividade***. *Para todo $\{x, y, z\} \in \boldsymbol{B}$, temos*

$$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z);$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **4)** ***Distributividade***. *Para todo $\{x, y, z\} \in \boldsymbol{B}$, temos*

$$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z);$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **5)** ***Identidade***. *Para todo $\{x, 0\} \in \boldsymbol{B}$, temos*

$$x \sqcup 0 = 0 \sqcup x = x;$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **6)** ***Identidade***. *Para todo $\{x, 1\} \in \boldsymbol{B}$, temos*

---

[7]Para mais detalhes: Boole (2008); Anderson (1962: 260-277); e Burris (1981: 129-212).

[8]Para mais detalhes: Boole (2008). Textos consultados: Anderson (1962: 260-277); e Burris (1981: 129-212).

$$x \sqcap 1 = 1 \sqcap x = x;$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **7**) ***Complementariedade***. *Para todo* $x \in \boldsymbol{B}$, *temos*

$$x \sqcup -x = 1;$$

($Ax_{\mathcal{B}}$ **8**) ***Complementariedade***. *Para todo* $x \in \boldsymbol{B}$, *temos*

$$x \sqcap -x = 0.$$

Uma álgebra de Boole é dita degenerada quando os elemento neutros para as operações $\sqcap$ e $\sqcup$ são iguais, isto é, $0 = 1$. Consideremos, aqui, apenas álgebras não degeneradas ($0 \neq 1$).

São teoremas da Álgebra de Boole:

(T1) ***Princípio da Dualidade***. Todo resultado dedutível dos axiomas da álgebra de Boole permanece válido se nele trocamos $\sqcup$ por $\sqcap$ e 0 por 1, e vice-versa.

(T2) ***Indempotência***. Para todo x em **B**, $x \sqcap x = x$ e $x \sqcup x = x$;

(T3) ***Identidade***. Para todo x em **B**, $x \sqcap 0 = 0$ e $x \sqcup 1 = 1$;

(T4) ***Absorção***. Para todo x, y e z em **B**, $(x \sqcap y) \sqcup x = x$ e $(x \sqcup y) \sqcap x = x$;

(T5) ***Associatividade***. Para todo x, y e z em **B**, $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ e $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$;

(T6) ***Maximum***. Para todo x em **B**, $x \leq 1$;

(T7) ***Minimum***. Para todo x em **B**, $x \geq 0$;

(T8) ***Duplo Complemento***. Para todo x em **B**, $-(-x) = x$;

(T9) ***Leis de De Morgan***. Para todo x e y em **B**, $-(x \sqcup y) = -x \sqcap -y$ e $-(x \sqcap y) = -x \sqcup -y$.

4 Cálculo Proposicional Clássico e a Álgebra de Boole

4.1 Sintaxe da Lógica Proposicional

4.1.1 Linguagem e Axiomática

DEFINIÇÃO 2 ***Linguagem do cálculo proposicional clássico***. *A linguagem proposicional do Cálculo Proposicional Clássico (CPC) será denotada por $\mathcal{L}$. Os símbolos primitivo de $\mathcal{L}$ são os seguintes:*

(1) *Variáveis proposicionais:* $A, B, C, ...;$

(2) *Conectivos lógicos:* $\neg$, $\supset$;

(3) *Símbolos de pontuação:* (,).

DEFINIÇÃO 3 ***Regras de formação.*** *Dada uma linguagem proposicional $\mathcal{L}$, dizemos que CPC:*

(1) *uma variável proposicional é uma fórmula bem formada (fbf);*

(2) *se A é uma fbf, então $\neg A$ também o é;*

(3) *se A e B são fórmulas bem formadas (fbfs), então $(A \supset B)$ é uma fbf;*

(4) *somente as fórmulas construídas segundo os itens acima são fbfs.*

Podemos acrescentar outros conectivos lógicos mediante definição; assim

($\wedge$) $A \wedge B =_{def} \neg(A \supset \neg B)$;

($\vee$) $A \vee B =_{def} (\neg A \supset B)$.

Nós usaremos a convenção padrão de escrever as fórmulas sem os parênteses mais exteriores e onde não houver ambiguidade, como se encontra em qualquer livro texto de lógica.

O conjunto de todas as fórmulas proposicionais no $\mathbb{FOR}$; subconjuntos de fórmulas serão denotados por Γ e Δ.

DEFINIÇÃO 4 ***Axiomas***. *Dentre as fbfs, são esquemas de axiomas do CPC:*

(Ax **1**) $A \supset (B \supset A)$;

(Ax **2**) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

(Ax **3**) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.

DEFINIÇÃO 5 ***Regra de inferência: Modus Ponens (MP)***. *Admite-se para o CPC a regra: A, $A \supset B$ / B.*

4.1.2 Consequência Sintática

DEFINIÇÃO 6 ***Demonstração***. *Uma demonstração de A no CPD é uma sequência finita de fbfs na linguagem $\mathcal{L}$, do tipo $A_1, ..., A_i, ..., A_n$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$:*

(1) *A_i é axioma, ou;*

(2) *A_i é uma consequência imediata de fbfs precedentes, pela regra de inferência MP;*

(3) $A_n = A$.

DEFINIÇÃO 7 ***Teorema***. *A é um teorema no CPC se, e somente se, existir uma demonstração de A no CPC; escreve-se $\vdash A$. Se A não é um teorema no CPD, escreve-se $\nvdash A$.*

DEFINIÇÃO 8 ***Dedução a partir de*** Γ. *Uma dedução de A a partir de Γ é uma seqüência finita de fórmulas bem formadas na linguagem $\mathcal{L}$, do tipo $A_1, ..., A_i, ..., A_n$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, em que cada A_i satisfaz uma das seguintes condições:*

(1) *A_i é um axioma, ou;*

(2) *A_i pertence a Γ, ou;*

(3) *A_i é obtida de fbfs anteriores na seqüência, pela regra de inferência MP;*

(4) *$A_n = A$.*

DEFINIÇÃO 9 ***Dedução a partir de*** Γ. *Uma dedução de A a partir de Γ é uma sequência finita de fbfs na linguagem $\mathcal{L}$, do tipo $A_1, ..., A_i, ..., A_n$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, em que cada A_i satisfaz uma das seguintes condições:*

(1) *A_i é um axioma, ou;*

(2) *A_i pertence a Γ, ou;*

(3) *A_i é obtida de fbfs anteriores na sequência, pela regra de inferência MP;*

(4) *$A_n = A$.*

DEFINIÇÃO 10 ***Consequência sintática***. *A é uma consequência sintática de Γ se, e somente se, A é uma fbf numa dedução a partir de Γ. Escreve-se $\Gamma \vdash A$. Sendo Γ vazio, em lugar da notação $\emptyset \vdash A$, escreve-se $\vdash A$.*

TEOREMA 1 ***Teorema da dedução***. *Se $\Gamma,\ A \vdash B$, então $\Gamma \vdash A \supset B$.*

Prova. Mendelson (1997: 37-40).

4.1.3 Semântica Proposicional Clássica

DEFINIÇÃO 11 *Dada uma linguagem proposicional $\mathcal{L}$ para o CPC, a valoração $\overline{v}$ é uma aplicação do conjunto de todas as fórmulas proposicionais $\mathbb{FOR}$ no conjunto dos valores lógicos $\bot$, $\top$, isto é, $\overline{v}$ é uma função do tipo $\overline{v} : \mathbb{FOR} \longmapsto 2$, conhecida como "função-verdade", que atribui a cada fórmula proposicional um valor de verdade $\bot$ (falso) ou $\top$ (verdadeiro), calculado em decorrência da matriz lógica de cada conectivo. Nestes termos, $\overline{v}$ satisfaz as seguintes condições:*

$(\neg)$ $\overline{v}\ (\neg A) = \top$ *se, e somente se,* $\overline{v}\ (A) = \bot$;

$(\vee)$ $\overline{v}\ (A \vee B) = \top$ *se, e somente se,* $\overline{v}\ (A) = \top$ *ou* $\overline{v}\ (B) = \top$;

$(\wedge)$ $\overline{v}\ (A \wedge B) = \top$ *se, e somente se,* $\overline{v}\ (A) = \overline{v}\ (B) = \top$;

$(\supset)$ $\overline{v}\ (A \supset B) = \top$ *se, e somente se,* $\overline{v}\ (A) = \bot$ *ou* $\overline{v}\ (B) = \top$;

Nós dizemos que uma fórmula A é *válida*, ou *tautologia*, se, e somente se, para toda valoração $\overline{v}$, $\overline{v}(A) = \top$.

Mediante tabelas de verdade, pode-se verificar se uma determinada fórmula do CPC é válida ou não.

Um modo muito interessante de prover outra semântica para o CPC é mediante o uso de ferramentas algébricas. Isso é feito na próxima subseção.

4.2 Semântica Algébrica Booleana

Um modo muito interessante de prover uma semântica para o Cálculo Proposicional Clássico (CPC) é mediante o uso de ferramentas algébricas. É possível, sob dadas circunstâncias (RASIOWA, 1963: 220), determinar um homomorfismo entre a "álgebra das fórmulas proposicionais" do CPC ($\langle \mathbb{FOR}, \vee, \wedge, \neg, \top, \bot \rangle$) e a *álgebra de Lindenbaum* ($\left\langle \mathbb{FOR}_{/\equiv}, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1 \right\rangle$, com um conjunto quociente de todas as fbfs proposicionais munido de duas operações binárias ($\sqcup$ e $\sqcap$) associativas e comutativas, um operador unário ($-$), dois elementos distinguidos (0 e 1) e determinadas condições axiomáticas), isto é, verifica-se a correspondência entre as *leis da lógica proposicional clássica* e as *leis da álgebra de Boole*. Vejamos.

Para $\mathbb{FOR}$ define-se a seguinte relação de equivalência $\equiv$:

$$A \equiv B \text{ se, e somente se, } \vdash A \supset B \text{ e } \vdash B \supset A.$$

Dada relação de equivalência definida acima, podemos agora realizar a partição de $\mathbb{FOR}$, de modo a construir um conjunto quociente deste.

O conjunto quociente de $\mathbb{FOR}$ é dado como

$$\mathbb{FOR}_{/\equiv} = \{[A] \mid A \in \mathbb{FOR}\},$$

no qual a classe de equivalência de A é $[A]$, isto é,

$$[A] = \{B \in \mathbb{FOR} \mid A \equiv B\}\ .$$

Forma-se, assim, uma partição disjunta de $\mathbb{FOR}$ em classes de equivalências. Em $\mathbb{FOR}_{/\equiv}$ é possível definir a seguinte relação:

$$[A] \leq [B] \text{ se, e somente se, } A \vdash B,$$

em $\mathbb{FOR}$. Como definida, $\leq$ é uma "ordem parcial" em $\mathbb{FOR}_{/\equiv}$:

(1) $\leq$ é reflexiva: $[A] \leq [A]$; isto é, $A \vdash A$;

(2) $\leq$ é simétrica: se $[A] \leq [B]$ e $[B] \leq [A]$, então, por definição, $A \vdash B$ e $B \vdash A$; segue-se que $A \equiv B$ e, assim, $[A] = [B]$;

(3) $\leq$ é transitiva: se $[A] \leq [B]$ e $[B] \leq [C]$, então, por definição, $A \vdash B$ e $B \vdash C$, segue-se que $A \vdash C$; logo, $[A] \leq [C]$.

PROPOSIÇÃO 1 ***Álgebra de Lindenbaum**. A partir da algebrização do CPC*

$$\mathcal{B} = \langle \mathbb{FOR},\ \vee,\ \wedge,\ \supset,\ \neg,\ \bot,\ \top \rangle$$

é possível definir a estrutura

$$A(\mathcal{B}) = \left\langle \mathbb{FOR}_{/\equiv},\ \sqcup,\ \sqcap,\ -,\ 0,\ 1 \right\rangle\ ,$$

chamada de "álgebra de Lindenbaum" para a lógica proposicional clássica. $A(\mathcal{B})$ é uma álgebra de Boole que admite as seguintes operações de classes:

(1) ***Complemento de classes**. $-[A] = [\neg A]$;*

(2) ***Reunião de classes.*** *$[A] \sqcup [B] = [A \vee B]$;*

(3) ***Interseção de classes.*** *$[A] \sqcap [B] = [A \wedge B]$;*

(4) ***Classes das contradições.*** *$0 = [A \wedge \neg A]$;*

(5) ***Classes das tautologias.*** *$1 = [A \vee \neg A]$;*

Prova. As *proposições* (1) – (6) são justificadas como segue-se:

(1) : $[A] \leq [B]$ se, e somente se, $[A] \sqcup [B] = [B]$ (I). Por outro lado, $A \leq B$ se, e somente se, $A \vee B \equiv B$ (II). A equação (II) pode ser redefinida em $\mathbb{FOR}_{/\equiv}$ como $[A \vee B] = [B]$ (III). Logo, aplicando (III) em (I), temos $[A] \sqcup [B] = [A \vee B]$;

(2) : Dual a (1);

(3) : $[A] \leq -[A]$ se, e somente se, $[A] \sqcup -[A] = -[A]$ em $\mathbb{FOR}_{/\equiv}$. Se $-[A] = [\neg A]$, então de $[A] \sqcup [\neg A] = -[A]$ temos $[A \vee \neg A] = -[A]$ pela proposição (1). Como em $\mathbb{FOR}$ ocorre $A \leq \neg A$ se, e somente se, $A \vee \neg A \equiv \neg A$, logo $-[A] = [\neg A]$;

(4) :

1. $A \wedge \neg A \equiv A \wedge \neg A$	em $\mathbb{FOR}$
2. $[A \wedge \neg A] = [A \wedge \neg A]$	em $\mathbb{FOR}_{/\equiv}$
3. $[A \wedge \neg A] = [A] \sqcap [\neg A]$	pela proposição (2)
4. $[A \wedge \neg A] = [A] \sqcap -[A]$	pela proposição (3)
5. $[A \wedge \neg A] = 0$	pelo $Ax_{\mathcal{B}}$ 8

(5) : Dual a (4). □

TEOREMA 2 $[A] = 1$ *se, e somente se,* $\vdash A$.

Prova[9]. Se [A] é a classe de uma fórmula numa álgebra $A(\mathcal{B})$, uma álgebra de Boole, que é equivalente à classe da unidade 1 de $A(\mathcal{B})$, então A é um teorema do cálculo proposicional. Assim, $[A] = 1$ se, e somente se, $\vdash A$. Ou seja, temos $\vdash A$, desde que $A(\mathcal{B})$ tenha identificado o elemento 1, isto é, $[A] = 1$. Como

1. A	Hipótese
2. $A \supset (B \supset A)$	Ax 1
3. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$	substituição em 2
4. $(A \supset A) \supset A$	MP em 1 e 3,

então $\vdash (A \supset A) \supset A$ e $[A \supset A] \leq [A]$. Em lógica clássica temos a seguinte equivalência $A \supset A \equiv \neg A \vee A$. Logo, a expressão $[A \supset A] \leq [A]$ pode ser redefinida como $[A \vee \neg A] \leq [A]$, ou seja, pela **Proposição 83 (5)**, temos $[A] \leq 1$.

Dado também que

1. $A \supset (B \supset A)$	Ax 1
2. $A \supset (A \supset A)$	substituição em 1

então $\vdash A \supset (A \supset A)$ e $[A] \leq [A \supset A]$. Como em lógica clássica temos a seguinte equivalência $A \supset A \equiv \neg A \vee A$, podemos representar a expressão $[A] \leq [A \supset A]$ como $[A] \leq [A \vee \neg A]$, ou seja, pela **Proposição 1 (5)**, temos $1 \leq [A]$.

[9] O presente resultado está relacionado diretamente com a semântica de valorações, tomando-se $\top = 1$ e $\perp = 0$. Este teorema diz que uma fórmula é demonstrável se sua classe de equivalência for idêntica à classe 1 numa álgebra de Boole. Como veremos adiante, o resultado geral é que uma fórmula é demonstrável se, e somente se, for tautologia (ou válida).

Temos, ao final, dado o exposto, $[A] = 1$. □

Como vimos, com a *álgebra de Lindenbaum* podemos estabelecer uma relação entre a *álgebra de Boole* ($\mathcal{B}$) e a lógica proposicional clássica. Para tanto, associamos, por exemplo, a cada fórmula bem formada atômica A do *cálculo proposicional clássico* uma classe de equivalência $[A]$ que, por sua vez, corresponde a um membro da álgebra booleana $A(\mathcal{B})$. Operações numa álgebra booleana podem ser usadas para generalizar a semântica da lógica proposicional clássica de forma que $[A] = \overline{v}\ (A)$, isto é, escrito de outra forma, $x = [A] = \overline{v}\ (A)$, na qual x é um membro de uma *álgebra de Boole.*

DEFINIÇÃO 12 *Uma fbf A do cálculo proposicional clássico é válida numa álgebra de Boole se, e somente se, para toda valoração* $\overline{v}$, *temos* $\overline{v}\ ([A]) = 1$, *noutras palavras, se, e somente se, para toda* $\overline{v}\ (A) = \top$.

Portanto, à luz do exposto, é possível construir uma semântica algébrica para a lógica proposicional clássica por intermédio da *álgebra de Boole*, desde que para uma dada linguagem proposicional do CPC à valoração $\bar{v}$ de fórmulas proposicionais bem formadas, compostas por A e B, por exemplo, seja associada elementos do tipo [A] e [B] de **B** da álgebra $\mathcal{B}$, de forma que $\overline{v}$ satisfaça as seguintes condições:

($\neg$) $\overline{v}\ (\neg A) = -[A]$;

($\vee$) $\overline{v}\ (A \vee B) = [A] \sqcup [B]$;

($\wedge$) $\overline{v}\ (A \wedge B) = [A] \sqcap [B]$;

($\supset$) $\overline{v}\ (A \supset B) = -[A] \sqcup [B]$.

A seguir, mostraremos que o cálculo proposicional é correto, ou seja, que todos os seus teoremas são válidos na semântica algébrica sugerida.

TEOREMA 3 ***Teorema da correção***. *Se* $\vdash A$, *então* $\mathcal{B} \models A$.

Prova. Para demonstrarmos o *teorema da correção*, é necessário mostrarmos que todos os esquemas de axiomas da lógica proposicional (i) – (iii) são válidos, e que a regra *modus ponens* (iv) preserva a validade na semântica proposta. Neste sentido, teremos:

(i) (***Ax* 1**) $A \supset (B \supset A)$

Prova (i).

1. $-x \sqcup (-y \sqcup x)$	por Def.
2. $-x \sqcup (x \sqcup -y)$	$Ax_{\mathcal{B}}$ 2
3. $(-x \sqcup x) \sqcup -y$	$Ax_{\mathcal{B}}$ 5
4. $1 \sqcup \neg y$	$Ax_{\mathcal{B}}$ 9
5. 1	T2

(ii) (***Ax* 2**) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

Prova (ii).

1. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [-(-x \sqcup y) \sqcup (-x \sqcup z)]$	por Def.
2. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [(x \sqcap -y) \sqcup (-x \sqcup z)]$	$T5$ e $T4$

3. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [(x \sqcup (-x \sqcup z)) \sqcap (-y \sqcup (-x \sqcup z))]$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 4
4. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [((x \sqcup -x) \sqcup z) \sqcap ((-y \sqcup -x) \sqcup z))]$ — $T3$
5. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [(1 \sqcup z) \sqcap ((-y \sqcup -x) \sqcup z))]$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 9 e $Ax_{\mathcal{B}}$ 2
6. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [1 \sqcap ((-x \sqcup (-y \sqcup z))]$ — $T2$ e $T3$
7. $-[-x \sqcup (-x \sqcup z)] \sqcup [-x \sqcup (-y \sqcup z)]$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 8
8. 1 — $Ax_{\mathcal{B}}$ 9

(iii) (***Ax* 3**) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.

Prova (iii).

1. $-(--y \sqcup -x) \sqcup -(--y \sqcup x) \sqcup y$ — por Def.
2. $-(y \sqcup -x) \sqcup -(y \sqcup x) \sqcup y$ — $T4$
3. $-(y \sqcup -x) \sqcup (-y \sqcup -x) \sqcup y$ — $T5$
4. $-(y \sqcup -x) \sqcup (-y \sqcup y) \sqcap (y \sqcup -x)$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 2 e $Ax_{\mathcal{B}}$ 4
5. $-(y \sqcup -x) \sqcup 1 \sqcap (y \sqcup -x)$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 9
6. $-(y \sqcup -x) \sqcup (y \sqcup -x)$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 8
7. 1 — $Ax_{\mathcal{B}}$ 9

(iv) **Regra de inferência modus ponens**. $A, A \supset B \vdash B$.

Prova (iv). Seja $\overline{v}$ uma valoração tal que $\overline{v}\ (A) = x = 1$ e $\overline{v}\ (A \supset B) = 1$, devemos provar que $\overline{v}\ (B) = 1$.

1. $-x \sqcup y = 1$ — por Def.
2. $-1 \sqcup y = 1$ — subs. x por 1
3. $0 \sqcup y = 1$ — $T6$
4. $y = 1$ — $Ax_{\mathcal{B}}$ 5

□

Provada a correção do cálculo proposicional, passaremos à completude deste, provando que toda fórmula válida, segundo a semântica algébrica proposta, é um teorema do cálculo proposicional clássico.

TEOREMA 4 ***Teorema da completude***. *Se $\mathcal{B} \models A$, então $\vdash A$.*

Prova. Pelo **Teorema 2**, provamos que $[A] = 1$ se, e somente se, $\vdash A$. A expressão $[A] = 1$ pode ser redefinida como $[A] = [A \vee \neg A]$, pela **Proposição 1 (5)**. A expressão anterior pode ser escrita, ainda, como $[A] = [A] \sqcup -[A]$, segundo a **Proposição 1 (1)-(3)**. Valorando ambos os membros, temos $\overline{v}\ ([A]) = \overline{v}\ ([A] \sqcup -[A])$, isto é, $\overline{v}\ (A) = \top$. Por conseguinte, $\overline{v}\ (A) = \top$ se, e somente se $\vdash A$, ou seja, de modo particular, se $\mathcal{B} \models A$, então $\vdash A$. □

Referências

1. Anderson, John M.; Johnstone, Henry W. **Natural deduction: the logic basis of Axiom Systems**. Clifornia: Wadsworth, 1962.

2. BOOLE, George. **The mathematical Analysis of logic: being an essay toward a calculus of deductive reasoning**. Disponível em: < http://www.archive.org/details/mathematicalanal00booluoft.> Acesso em: 10 de março de 2008.

3. BURRIS, S; SANKPPANAVAR, H. P. **A course in universal algebra**. New York: Springer-Verlag, 1981.

4. DA COSTA, N. C. A. **Ensaios sobre os fundamentos da lógica**. São Paulo: Hucitec, 1994.

5. DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. São Paulo: Atlas, 1994.

6. D'OTTAVIANO, L. M. Ítala e FEITOSA, A. Hércules. **Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas**. Disponível em: < ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf >. Acesso em: 30 de junho de 2008.

7. EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Higyno H. Domingues. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

8. KNEALE, W. e KNEALE, M. **O Desenvolvimento da Lógica**. Trad. M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980.

9. MENDELSON, E. **Introduction to Mathematical Logic**. New Jersey: Van Nostrand Company, 1997.

10. JÓNSSON, B. e TARSKI, A. *Boolean algebras with operators in* **American Journal of Mathematics**, I - II, 73, 74, 1951: 891-939, 1952: 127-162.

11. MORTARI, Cezar A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Unesp, 2001.

12. OLIVEIRA, A.J.F. **Lógica e aritmética**. Brasília: Unb, 2004.

13. RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. **The mathematics of metamathematics**. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Polish Scientific, 1963.

14. TARSKI, A. **Logic, semantics, metamathematics**. Trad. J. H. Woodger. Oxford: Clarendon Press, 19656.