

Conceito de Limite de Função: análise dos Elementos que Compõem sua Imagem e Definição Conceitual

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias¹

João Cláudio Brandemberg²

Resumo

Este trabalho apresenta a descrição de uma pesquisa de mestrado, cujo objetivo é investigar – sob a ótica da teoria de Tall e Vinner (1981) – os elementos que compõem a *Imagem Conceitual e Definição Conceitual* de estudantes concluintes de licenciatura em matemática no que concerne ao conceito de limite de função. Além disso, é nossa intenção realizar uma pesquisa histórica acerca da construção desse conceito para subsidiar tanto na elaboração dos protocolos de pesquisa que serão aplicados quanto nas intervenções realizadas com os sujeitos investigados. A escolha da temática deu-se em virtude das significativas dificuldades presentes na aprendizagem em *Cálculo*, principalmente naquelas à apreensão dos conceitos envolvidos, como é o caso de limite de função. A pesquisa está estruturada em etapas, a saber: levantamento bibliográfico, aprofundamento teórico, levantamento histórico, formulação dos protocolos de pesquisa, coleta dos dados (aplicação do instrumento e intervenções), sistematização e análise dos resultados obtidos.

Palavras – chave: Limite de Função, Imagem Conceitual, Definição Conceitual.

1. INTRODUÇÃO

As dificuldades em matemática no ensino superior - especificamente em *Cálculo* – tem sido objeto de estudo de diversas pesquisas no âmbito nacional e internacional em educação matemática. Isso porque muitos indivíduos apresentam significativas dificuldades que se fazem presentes, principalmente, na apreensão dos conceitos envolvidos, em detrimento das tarefas que enfocam aspectos operatórios (MEYER, 2003). Sabe-se que muitas dessas dificuldades de aprendizagem estão estritamente relacionadas com o entendimento da noção de limite. Frente a essas constatações, pretendemos direcionar a temática dessa pesquisa de mestrado para o âmbito do Cálculo e a partir daí, investigar a problemática da apreensão do conceito de limite de função com estudantes universitários do curso de Licenciatura em Matemática.

¹ Mestranda do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas Universidade Federal do Pará (IEMCI/UFPA)

² Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) – área de atuação: educação matemática – Professor Adjunto da Universidade Federal do Pará (ICEN/UFPA), credenciado ao programa de pós – graduação em Ensino de Ciências e Matemáticas (IEMCI/UFPA).

Com a realização dessa pesquisa intenciona-se verificar os fatores que influenciam no processo de apreensão do conceito de Limite de função mediante uma investigação tomando-se como referência as noções teóricas de *imagem conceitual* e *definição conceitual* de Tall e Vinner (1981), na tentativa de levantar aspectos sobre a *imagem conceitual* dos sujeitos investigados acerca do conceito formal de limite de função, haja vista que a “inferência de aspectos da *imagem conceitual* é necessária para enfrentar dificuldades de aprendizagem” (MEYER, 2003, p. 1).

2. JUSTIFICATIVA

Em 2008, foi realizada uma pesquisa diagnóstica, cujo intuito fora investigar as dificuldades apresentadas por concluintes do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública no estado do Pará na aprendizagem de limite de função de uma variável. Mediante os resultados obtidos, evidenciaram-se alguns conflitos apresentados pelos sujeitos investigados, principalmente aqueles relacionados à compreensão desse conceito matemático. Diante dessa situação, percebemos a necessidade de realizar um trabalho de pesquisa para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de função e, conseqüentemente, favorecer uma base de conhecimentos mais sólida no que concerne aos tópicos de Cálculo.

Sendo assim, tornou-se necessária a realização de um levantamento bibliográfico para verificar alguns dos estudos realizados nesse âmbito. Dentre os quais, destacamos os trabalhos Barto (2003), Gélis e Lenne (2003), Zuchi (2005), Olimpio (2007), Rodríguez (2009) e Ochoviet, Olave & Testa (2009) que foram tomados como suporte teórico inicial para a elaboração do projeto pesquisa submetido ao programa de pós – graduação. A descrição dessas pesquisas encontra-se a seguir.

Barto (2003) investigou a produção de significados para continuidade de funções de uma variável por alunos de pós-graduação em Educação Matemática na PUC/ São Paulo. Diante do desempenho dos estudantes a autora percebeu que para eles, calcular o limite de uma função era fazer uma investigação numérica à direita e à esquerda de um ponto dado. Eles não questionavam a unicidade dos resultados obtidos e calculavam limites laterais, considerando-os satisfatórios. A autora verificou ainda que alguns dos sujeitos investigados consideravam o formalismo algébrico como sinônimo de perfeição, sendo que os mesmos mencionaram pontos, intervalos, épsilon e delta sem, entretanto, conseguir

explicá-los. Além disso, o estudo permitiu que a autora observasse e entendesse como os alunos utilizam suas experiências cotidianas para produzir significados para conceitos abstratos da matemática.

Gélis e Lenne (2003) defendem a utilização de um ambiente de aprendizagem baseado no Sistema de Cálculo Formal MuPad. Ao aplicarem atividades para alunos de uma escola secundária francesa, verificaram que essa abordagem permite que os estudantes se libertem das limitações do ambiente lápis e papel. Os autores destacam que o software oferece ainda a possibilidade de aplicar os teoremas conhecidos pelos estudantes para calcular limites, além de disponibilizar ferramentas numéricas e gráficas que facilitam a construção de conjecturas e provas. Além disso, acreditam que os estudantes podem se apropriar mais pertinentemente de diferentes técnicas para calcular indeterminações, prová-las e identificar os contextos adequados para utilizá-las.

Zuchi (2005) realizou um estudo sobre as dificuldades no processo de ensino – aprendizagem do conceito de limite de uma função e em seguida, propôs alternativas que pudessem minimizá-las. Para isso, integrou a didática da matemática e inteligência artificial à luz da teoria das situações de Brousseau. Ao introduzir o conceito de limite mediante situações-problema para estudantes dos cursos de engenharia mecânica, engenharia elétrica e licenciatura em física, percebeu que dentre as dificuldades de compreensão apresentadas pelos alunos, destaca-se aquela concernente à relação entre ϵ e δ . Isso porque os estudantes não conseguem relacionar seu aspecto intuitivo – ponto de vista cinemático – e sua definição formal sob o ponto de vista de aproximação. Segundo a autora:

(...) geralmente a definição de limite é exposta após uma introdução do conceito pelo ponto de vista cinemático, e após vários exemplos resolvidos, é dada essa definição utilizando o ponto de vista de aproximação sem um amadurecimento da correlação entre ambas (p. 89).

Olimpio (2007) destaca que a dificuldade na apreensão do conceito de função é fator primordial para a compreensão de conceitos posteriores, como o de limite, por exemplo, e sobre este último destaca que:

(...) calcular o limite de uma função num ponto a , nos casos mais “interessantes” resumir-se-á em descobrir uma maneira de “substituir o a em $f(x)$ ” sem que um tal procedimento implique na emergência de irritantes quocientes com denominador nulo. Em outras palavras, a idéia de aplicar truques adequados de manipulação algébrica que permitirão “eliminar” tais inconveniências. A questão

da existência do limite, ou mesmo do que ele significa, ficarão ainda nebulosas (...) (p. 44).

Em seu trabalho, Rodríguez (2009) destaca que desenvolve uma pesquisa na qual está estabelecendo tipologias que caracterizam diferentes usos da língua natural e da língua simbólica simultaneamente, dado que é comum que haja uma grande distância entre a utilização de ambas, bem como a dificuldade em correlacioná-las. Em se tratando da noção de limite, a autora menciona que:

O docente explica que uma função f tem limite L quando x tende a a se a distância entre as imagens da função e L pode ser arbitrariamente pequena, sendo os valores de x muito próximos de a . Depois que se comunica oralmente esta frase, relativamente compreensível, escreve-se a definição com épsilon e delta (...) e poucos são os indivíduos que complementam o que fora escrito no quadro com as explicações dadas. (tradução minha, p. 97)

Ochoviet, Olave e Testa (2009) realizaram uma pesquisa diagnóstica com 13 estudantes do 2º ano e 25 do 3º ano de licenciatura em matemática na Argentina. Para isso, elaboraram um questionário contendo três questões que, segundo os autores, não apresentava limites explícitos para os estudantes calcularem.

Em seus resultados, evidenciaram que a maioria dos sujeitos investigados atribui o valor do limite ao valor da função no ponto e que isso se deve à metodologia utilizada em sala de aula – na qual são apresentadas funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas em que sempre existe um limite que coincide com a imagem – sendo essa prática reforçada pelas atividades repetitivas em sala de aula. Além disso, verificaram que os estudantes obtêm melhores resultados em meio à representação gráfica, pois os “saltos” presentes no gráfico permitiram-lhes evocar a não existência do limite. Eles acreditam ainda que para melhorar o desempenho dos estudantes, é necessária a apresentação de atividades que transcendam o mero cálculo dos limites, caracterizadas por diferentes registros que possam gerar conflitos que, diante da intervenção do professor, contribuam com a formação do indivíduo. Para isso, devemos ser cuidadosos na escolha da função, haja vista que funções contínuas reforçam a idéia de substituir a variável pelo real em questão no momento de calcular o limite.

É interessante destacar que as pesquisas descritas elucidam, principalmente, as dificuldades concernentes à compreensão da noção de limite de uma função e não somente aquelas relacionadas às técnicas e manipulações algébricas necessárias para resolvê-lo,

reforçando mais uma vez a necessidade de desenvolver um trabalho, cujo foco principal fosse os aspectos relacionados à apreensão do *conceito* de limite de função.

3. PROBLEMÁTICA DA PESQUISA À LUZ DE UM REFERENCIAL TEÓRICO

3.1. A teoria sobre *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual*

A teoria sobre *Imagem Conceitual* (*Concept Image*) e *Definição Conceitual* (*Concept definition*) de Tall e Vinner (1981) foi desenvolvida com o objetivo de estudar a estrutura cognitiva do indivíduo, sendo a *Imagem Conceitual* caracterizada por toda estrutura cognitiva associada a um conceito por meio de representação visual, figura mental ou experiências vivenciadas pelo indivíduo. Por sua vez, a *Definição Conceitual*, constituído também na estrutura cognitiva do indivíduo, representa a forma, em palavras, utilizada para especificar um conceito.

Sobre essas duas noções apresentadas por Tall e Vinner (1981), Meyer (2003) destaca que elas:

(...) pontuam a diferença existente entre os conceitos matemáticos quando formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos, ou seja, é estabelecida uma distinção entre a matemática como uma atividade mental e a matemática como um sistema formal (p. 6)

Ainda sobre a teoria de Tall e Vinner (1981), Costa (2004) aponta que:

(...) de acordo com a forma de ensino a que o estudante seja submetido, pode-se ensinar o mesmo a responder uma questão com a definição formal do conceito, tendo o mesmo um *conceito imagem* inapropriado daquele conceito. Tal fato pode acontecer quando determinado conceito é definido pelo professor de maneira formal, não sendo trabalhado em seus aspectos mais amplos. Nesta situação, o *conceito imagem* se desenvolve dentro de noções mais restritas, permanecendo o *conceito definição* inativo na estrutura cognitiva dos estudantes (p. 30).

Tomando por base a teoria de Tall e Vinner (1981) e direcionando a problemática da pesquisa às dificuldades na aprendizagem do conceito de limite de função, indicadas tanto em pesquisas anteriores quanto por professores que ministram cursos de Cálculo, intenciona-se buscar a identificação de **elementos da imagem conceitual e definição conceitual, no que concerne ao conceito de limite de função, que possam ser mobilizados por estudantes universitários quando resolvem tarefas envolvendo este conceito.**

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa encontra-se organizada acordo com as seguintes etapas:

Levantamento Bibliográfico: Realizado com o objetivo de aprofundar os estudos acerca do processo de apreensão do conceito de limite de função;

Aprofundamento teórico: Aprofundar os estudos acerca dos aspectos referentes à Teoria sobre *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* de Tall e Vinner (1981);

Levantamento Histórico: Intenciona-se pesquisar os ruídos históricos relacionados com o desenvolvimento do conceito de limite de função, para que a partir de sua construção histórica, possamos elaborar o protocolo de pesquisa baseados em tais aspectos;

Elaboração do Protocolo de Pesquisa: Mediante o estudo realizado acerca da teoria de Tall e Vinner (1981), bem como sobre a construção histórica do conceito de limite de função, será elaborado um protocolo de pesquisa contendo questões abertas a serem respondidas e justificadas por estudantes concluintes do curso de licenciatura em matemática, objetivando-se levantar aspectos referentes à *imagem conceitual* e *definição conceitual* levantadas por eles ao resolverem questões sobre o assunto.

Realização de intervenções: Os sujeitos participantes da pesquisa serão entrevistados individualmente ou em duplas, a fim de coletar dados adicionais para a elaboração de um diagnóstico sobre aspectos específicos da *imagem conceitual* e *definição conceitual* relativas ao conceito de limite de função;

Análise dos Resultados: Intenciona-se levantar os elementos que compõem a *imagem conceitual* e *definição conceitual* dos sujeitos investigados, as interpretações dadas ao conceito de limite, bem como os procedimentos associados e mobilizados para a formulação das respostas analisadas durante a resolução do protocolo de pesquisa e da entrevista;

A dissertação a ser elaborada ao final da pesquisa contemplará as etapas anteriormente apresentadas.

5. CONSIDERAÇÕES

A pesquisa descrita encontra-se atualmente em aprofundamento teórico e levantamento histórico. Pretendemos formular o instrumento de coleta de dados e aplica-lo no 2º semestre de 2011. Acreditamos ser relevante a temática escolhida, pois ao aliarmos a história da matemática e a teoria de Tall e Vinner (1981), relacionando-as com os processos cognitivos de apreensão do conceito de limite de função estaremos contribuindo de alguma maneira para pesquisas futuras nesse âmbito, no sentido de desenvolver metodologias de ensino que possam viabilizar a aprendizagem desse conceito e, conseqüentemente, proporcionar uma base de conhecimentos mais sólida aos estudantes no que se refere aos estudos dos tópicos de *Cálculo*, mais especificamente, do conceito de limite de função.

6. REFERÊNCIAS

BARTO, Maria Cecília. *Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: A produção de significados para a continuidade*. Dissertação de mestrado (educação matemática). PUC, São Paulo, 2003.

COSTA, A. C. *Conhecimento de estudantes universitários sobre o conceito de função*. Dissertação de mestrado (educação matemática). PUC, São Paulo, 2004.

GÉLIS, Jean – Michel; LENNE, Dominique. Une approche de la notion de limite dans un environnement basé sur un système de calcul formel. *In: Environnements informatiques pour l'apprentissage humain*. Strasbourg, p.485 – 492, 2003.

MEYER, C. *Derivada/Reta tangente: Imagem conceitual e Definição conceitual*. Dissertação de mestrado (educação matemática). PUC, São Paulo, 2003.

OCHOVIET, Cristina; OLAVE, Mónica; TESTA, Yacir. Sobre El aprendizaje del concepto de límite en la formación de profesores de matemática. *In: Memorias Del 10º Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy – Buenos Aires – Argentina, p. 678 – 691, 2009.

OLIMPIO, Antonio Junior. Primeiro ano num curso de matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de cálculo. *In: Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro (SP), Ano 20, n.28, pp. 39 a 67.

RODRÍGUEZ, Mabel. Consideraciones didácticas para la enseñanza del límite funcional. *In: Memorias Del 10º Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy – Buenos Aires – Argentina, p. 92 – 98, 2009.

TALL, David; VINNER, Shlomo. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*. In: *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 151 – 169, 1981.

ZUCHI, Ivanete. *A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional*. Tese de Doutorado (Engenharia de produção). UFSC, 2005.