Imagem de Conceito, Definição de Conceito e os Três Mundos da Matemática – Um Diagnóstico com o Conceito de Proporcionalidade

Mestranda Ana Maria Pereira Pinto Poggio[1]

Profª Drª Vera Helena Giusti de Souza[2]

Resumo

Este trabalho traz nosso projeto de pesquisa para obter o título de Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN). Baseamo-nos nas ideias de Tall e Vinner (1981) e de Tall (2004) para elaborar um questionário diagnóstico, com o objetivo de identificar quais são as definições de conceito e as imagens de conceito que alunos do Ensino Médio e professores de Matemática apresentam sobre proporcionalidade direta e inversa. Também pretendemos verificar quais são as características dos Três Mundos da Matemática que esses sujeitos utilizam para resolver as questões propostas por nós no questionário diagnóstico.

Palavras-chave: Proporcionalidade Direta, Proporcionalidade Inversa, Definição de Conceito, Imagem de conceito, Três Mundos da Matemática

INTRODUÇÃO

Este trabalho de pesquisa está sendo desenvolvido junto à linha Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN). Nosso objetivo principal é identificar ideias que alunos do Ensino Médio e professores de Matemática apresentam sobre proporcionalidade direta e inversa.

A princípio, escolhemos trabalhar com o conceito de proporcionalidade, entre tantos conteúdos do currículo de Matemática da Educação Básica, por pura curiosidade. Será que o conceito de proporcionalidade, direta ou inversa, tem sido entendido por alunos ou mesmo por professores de Matemática, apesar de ser considerado um conceito simples? De que forma? Junto com estas questões veio uma preocupação, pois, apesar dessa simplicidade, julgamos que este conceito em si é fundamental, dentro e fora da

[1] Mestranda em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo
E-mail: anapoggio@gmail.com, autora.
[2] Professora Doutora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNIBAN – SP, orientadora.

Matemática, pois é útil na interpretação de fenômenos do mundo real e rege vários aspectos do nosso cotidiano.

Sabemos que tal conceito é introduzido no Ensino Fundamental, por exemplo, no estudo de fração, de semelhança, de regra de três, de porcentagem, de grandezas direta e inversamente proporcionais e vai ser exigido novamente no Ensino Médio, em problemas que envolvem razões e proporções, ou ainda na representação gráfica de uma função que relaciona grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Também está presente na Física (nos movimentos com velocidade ou aceleração constantes), na Química (no balanceamento de equações) e no cotidiano das pessoas (problemas de juros simples ou mesmo de receitas caseiras).

Assim, entendemos que a aprendizagem da noção de proporcionalidade deve ser vista como um objetivo obrigatório do ensino de Matemática pois, como vimos, não só é amplamente abordado na Matemática elementar, como dá sustentação para muitos tópicos da Matemática, da Física e de outras áreas nos anos seguintes.

JUSTIFICATIVA

Encontramos eco dessas nossas preocupações na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), que propõe que a ideia de proporcionalidade, direta ou inversa, explorada inicialmente no Ensino Fundamental seja, no Ensino Médio, estendida a outros tipos de relações entre grandezas, abrindo um leque de possibilidades de conexões, como por exemplo com a geometria analítica, por meio da análise e da interpretação do gráfico de uma função, ou ainda de investigações sobre a ideia de taxa de variação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental apontam como desafio identificar quais conhecimentos são socialmente relevantes e em que medida os mesmos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno. Nessa identificação, a noção de proporcionalidade aparece em destaque, pois este conceito "*está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções*" (BRASIL, 1997, 1998). O objetivo do ensino deste conceito no Ensino Fundamental deve visar ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, explorando situações para o aluno do 3º ciclo "*observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir* *estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade"* (BRASIL, 1998, p. 65*)*. No 4º ciclo, o aluno deve ser capaz de identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressar a relação existente entre elas por meio de uma sentença algébrica e representar essa relação no plano cartesiano. Além disso, deve também saber resolver problemas de escala, porcentagem e juros simples, que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.

À medida que fomos nos aprofundando no contato com a ideia matemática de proporcionalidade, pela leitura de trabalhos acadêmicos, como por exemplo Bisognin, Fioreze e Cury (2005), descobrimos que alguns alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, justificando a proporcionalidade direta com frases do tipo "se uma grandeza cresce a outra também cresce" e a proporcionalidade inversa com frases como "quando uma variável cresce, a outra decresce".

Além disso, a leitura de Sierpinska (1992) trouxe à tona outra dificuldade que está associada ao entendimento da idéia de proporcionalidade e que, segundo ela, constitui-se em um obstáculo epistemológico: "*(Um esquema inconsciente de pensamento) Proporção é uma forma privilegiada de relação"*[3] (SIERPINSKA, 1992, p. 43, tradução nossa). Por esta razão, interpretamos que todos os sujeitos enfrentam tal dificuldade, o que poderia explicar as frases acima, isto é, quando ambas as variáveis aumentam, tem proporcionalidade e é direta; quando uma variável aumenta e a outra diminui, tem proporcionalidade e é inversa.

Em Meu Professor de Matemática, Lima, E.L. (1997), no capítulo intitulado Grandezas Proporcionais, discorre sobre o livro Aritmética Progressiva, de Antônio Trajano (1ª edição em 1880). Segundo ele, a definição de grandezas proporcionais, dada por Trajano, é clara, simples e elementar, como acreditamos; entretanto, acrescenta

> Infelizmente, mais de 100 anos depois da primeira edição de Trajano, vários autores contemporâneos de livros usados em nossas escolas ainda fazem

---

[3]"(An unconscious scheme of thought) Proportion is a privileged kind of relationship" (SIERPINSKA, 1992, p. 43.)

> confusão acerca de grandezas direta ou inversamente proporcionais, especialmente quando uma grandeza depende de várias outras. (LIMA, E.L.,1997, p.125).

Este comentário veio reforçar nossa vontade de saber *se* e *como* estes conceitos de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa estão presentes em alunos do Ensino Médio e professores de Matemática.

As várias leituras que realizamos no Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN-SP, dentro da linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações, puseram-nos em contato com a Teoria dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004), uma teoria que está preocupada em entender o desenvolvimento cognitivo, em Matemática, do ser humano, desde a infância até a idade adulta. Decidimos utilizar esta teoria, principalmente ao conhecer suas ideias subjacentes de *imagem de conceito*, de *definição de conceito* (TALL; VINNER, 1981), de *já-encontrado* e de *a-encontrar* (TALL, 2004), (LIMA, R.N. de, 2007), em nossa pesquisa.

Assim, colocamos como objetivo de nossa dissertação de Mestrado diagnosticar, entre professores de Matemática e alunos do Ensino Médio, *se* estes conceitos estão presentes, por meio das definições de conceito e das imagens de conceito sobre proporcionalidade; e *como* estão presentes, pela análise das características dos Três Mundos da Matemática com que estes sujeitos trabalham as noções de proporcionalidade direta e inversa. Esperamos também conseguir identificar *já-encontrados* e *a-encontrar* nos trabalhos desses dois grupos.

Com esse objetivo em mente, elaboramos nossas questões de pesquisa.

1. Qual a definição de conceito e qual a imagem de conceito que alunos do Ensino Médio e professores de Matemática possuem sobre a noção de proporcionalidade direta?
2. Qual a definição de conceito e qual a imagem de conceito que alunos do Ensino Médio e professores de Matemática possuem sobre a noção de proporcionalidade inversa?
3. Com que características dos Três Mundos da Matemática (formais, simbólicas, corporificadas) esses grupos trabalham problemas relacionados à idéia de proporcionalidade direta e inversa?

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Imagem de conceito e definição de conceito

Segundo Tall e Vinner (1981), o desenvolvimento cognitivo de um sujeito, associado a um conceito matemático, advém da soma de todas as experiências, associadas a esse conceito, que tal sujeito acumula. Segundo eles, um conceito matemático não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como única referência pedagógica sua definição formal. É necessária uma gama de ideias, todas associadas a ele, para que se forme o que chamam de *imagem de conceito*.

> Usaremos o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece[4] (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

O conjunto de palavras utilizadas por um indivíduo para definir um conceito é o que Tall e Vinner (1981) denominam *definição de conceito*. Esta definição pode ter sido decorada ou compreendida e estar relacionada em maior ou menor grau ao conceito. Deste modo, uma *definição de conceito* (que é, portanto, individual) pode diferir de uma definição de conceito formal, como a que é aceita pela comunidade matemática (TALL; VINNER, 1981).

Os Três Mundos da Matemática

No quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, Tall (2004) identifica três diferentes mundos para o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático do ser humano, mundos estes que não são nem hierárquicos nem obrigatórios e diferentes indivíduos podem percorrer diferentes caminhos entre eles.

Um deles é o *mundo conceitual corporificado*, ou somente *mundo corporificado*. Nele observamos e descrevemos as propriedades que conseguimos perceber e sentir de um

---

[4] We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. (TALL; VINNER, 1981, p. 152.)

objeto. O *mundo corporificado* cresce a partir não só de nossas percepções dos objetos reais, mas também de nossas concepções envolvendo imagens. Por exemplo, para pensar numa função afim, podemos corporificar, mesmo que mentalmente, o gráfico de uma reta crescente ou de uma reta decrescente.

Um outro mundo é o *mundo simbólico proceptual* ou apenas *mundo simbólico*, onde os símbolos são usados não só para representar e efetuar ações, tal como apontar e contar, mas também para representar o produto que é resultado dessas ações. Segundo Tall (2004) o *mundo simbólico* é composto por símbolos matemáticos que representam ações e percepções do mundo.

E temos também o *mundo axiomático formal* ou apenas *mundo* formal, que é o mundo das definições, teoremas, axiomas e demonstrações, que constituem o sistema axiomático da Matemática.

A presença simultânea desses três mundos, quais sejam o formal, o simbólico e o corporificado, é que garantirá uma imagem de conceito suficientemente rica para que possamos afirmar que houve aprendizagem (TALL, 2004).

Os já-encontrados e os a-encontrar

Segundo Tall (2004), à medida que um indivíduo "viaja" pelos mundos, por um caminho individualizado, ocorrem dificuldades, que exigem experiências anteriores para serem superadas. Cada indivíduo lida com estas dificuldades de maneiras diferentes, de acordo com experiências que teve anteriormente e que, por sua vez, podem afetar o aprendizado atual, tanto de maneira positiva quanto negativa. Estas experiências anteriores são os *já-encontrados*, tradução adotada por Lima, R.N. de (2007) para o termo inglês *met-before*, utilizado por Tall (2004) e que estão presentes na imagem de conceito do indivíduo.

> Uma definição prática de um 'já-encontrado' é 'uma estrutura que temos em nosso cérebro *agora* como resultado de experiências que tivemos antes'. Um já-encontrado pode ajudar numa nova situação, ou pode ser problemático.[5] (TALL, Glossário, tradução nossa.)

[5] A working definition of a 'met-before' is 'a structure we have in our brains *now* as a result of experiences we have met before'. A met-before can be supportive in a new situation, or it can be problematic. (TALL, Glossário, disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/glossary.html#inconsistencies, acesso em 01_07_2011)

> Para ajudar numa tarefa não familiar, diferentes já-encontrados podem ser reunidos.[6] (TALL, 2008; LIMA, R.N.de ; TALL, 2008, tradução nossa.)

O termo *a-encontrar*, tradução adotada por Lima, R.N.de (2007) para o termo inglês *met-after*, proposto por Tall (2004), é utilizado para designar "uma experiência que se tem no presente e que afeta a memória de conhecimentos prévios" (LIMA, R.N. de; TALL, 2008). Assim, não só experiências anteriores podem interferir no aprendizado de novas ideias, como também novas experiências podem interferir no aprendizado anterior.

CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Estamos desenvolvendo uma pesquisa de caráter investigativo, ligada à linha de Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações, do programa de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN – SP. Estamos propondo um estudo diagnóstico, com análise qualitativa dos protocolos gerados pela aplicação de um questionário, com questões abertas e semiabertas, envolvendo as ideias de proporcionalidade direta e inversa. Tais questões já foram elaboradas, com base nas ideias de definição de conceito, de imagem de conceito e dos Três Mundos da Matemática. Seguimos também sugestão dada por Lima,E.L. (1997) e consideramos apenas quantidades ou grandezas positivas. Além de resolver problemas, é solicitado a cada participante que responda as questões de modo a expressar seu entendimento sobre proporcionalidade direta e inversa, de forma a manifestar diferentes características dos Três Mundos, presentes nas respectivas imagens de conceito.

O questionário tem 20 questões, das quais fizemos uma análise didática, ou *a priori*, com os objetivos de cada questão e respostas esperadas, certas ou erradas, baseadas nos Três Mundos da Matemática.

Temos como público-alvo alunos de 2ª série do Ensino Médio e professores de Matemática e pretendemos realizar um encontro com cada grupo, para a coleta de dados. No caso de surgir alguma dúvida no entendimento de alguns dos textos escritos, poderemos organizar entrevistas semiestruturadas, com o objetivo de permitir aos sujeitos entrevistados que exponham suas ideias e raciocínios sobre o tema em estudo.

[6] In order to cope with an unfamiliar task, different met-befores may be blended together. (LIMA, R. N. de; TALL, 2008.)

Na análise dos protocolos, o referencial teórico escolhido dará sustentabilidade para diagnosticar as imagens de conceito e as definições de conceito (TALL; VINNER, 1981), sobre proporcionalidade, dos sujeitos pesquisados e que características - entre simbólicas, formais e corporificadas (TALL, 2004) – utilizam ao resolver problemas relacionados à proporcionalidade direta ou inversa.

O QUESTIONÁRIO

As questões elaboradas por nós, para o diagnóstico, utilizam conteúdos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e com elas pretendemos entender como reconhecem situações de proporcionalidade direta ou proporcionalidade inversa, sujeitos que, em princípio, já tomaram contato com esses conceitos. Além de diagnosticar *se* estes conceitos estão presentes, por meio das definições de conceito sobre proporcionalidade, pretendemos também identificar *como* esses conceitos estão presentes, por meio das imagens de conceito e pela análise das características dos Três Mundos da Matemática com que estes sujeitos trabalham as noções de proporcionalidade direta e inversa. Esperamos também conseguir identificar já-encontrados e a-encontrar nos trabalhos desses dois grupos.

Optamos por apresentar aqui, por razões de economia de texto, apenas a questão 1 do questionário, que tem o seguinte enunciado: **Escreva com suas palavras o que você entende por proporcionalidade direta.**

Colocamos esta questão com o objetivo de identificar a *definição de conceito* (TALL; VINNER, 1981) de cada participante da pesquisa, relativa ao conceito de proporcionalidade direta. O modo como ele se expressa propiciará também verificar com que características dos Três Mundos ele define tal conceito.

Podem surgir características do *mundo corporificado*, como por exemplo um gráfico, exemplos numéricos, tabelas, ou um texto na língua materna, com características não formais.

Características do *mundo simbólico* também podem aparecer, por exemplo, se o sujeito utilizar expressões do tipo: $f(x) = kx$; $y = kx$; ou $f(x) = 2x$.

Ou ainda, o sujeito pode expressar sua definição de proporcionalidade direta com características do *mundo formal*, como por exemplo apresentar, na sua definição do conceito de proporcionalidade direta, alguma definição do tipo: “Seja a grandeza y uma função da grandeza x, isto é, y=f(x). Diz-se que y é diretamente proporcional a x quando: y é uma função crescente de x e, se x for multiplicado por um número natural n, y também será multiplicado por n, logo: $f(nx)=nf(x)$, $\forall x \in IR$ e $\forall n \in IN$ ”.

A presença simultânea desses três mundos, quais sejam o formal, o simbólico e o corporificado, é que garantirá uma imagem de conceito suficientemente rica para que possamos afirmar que houve aprendizagem, pois a partir desta “viagem” é possível chegar ao pensamento matemático avançado que se dá, de acordo com TALL (2004), no mundo axiomático formal.

REFERÊNCIAS

BISOGNIN, E. ; FIOREZE, L. A.; CURY, H. N. **Análise de Erros e Proporcionalidade: Uma Experiência com alunos de Graduação e Pós-Graduação.** Vidya, Santa Maria: RS, v. 25, n. 2, p. 31-40, jul/dez, 2007.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Ensino de primeira à quarta série. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 20 out. 2010.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Ensino de quinta a oitava séries. Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 out. 2010.

BRASIL. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias** / Secretaria de Educação Básica. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2) – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2011.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 1997. 214p. ISBN 8585818-06-9.

LIMA, R. N. de. **Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática**. 358p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). - São Paulo: PUC, 2007.

LIMA, R. N. de; TALL, D. O. (2008). **Procedural embodiment and magic in linear equations.** ***Educational Studies in Mathematics,*** *67* (1), 3-18. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2008a-lima-linear-equations.pdf>. Acesso em: 29 mai. 2011.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática** - São Paulo: SEE, 2008. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf>. Acesso em: 28 out. 2010.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics**,** Netherlands, v. 12, n. 2, 158-161, 1981. ISSN: 0013-1954.

TALL, D. O. **Thinking Through Three Worlds Of Mathematics.** *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 4, 281–288, 2004d.
Disponível em:< http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/proof.html>. Acesso em: 24 abr. 2011.