Problemas de Estrutura Algébrica Envolvendo Equações Polinomiais do 1º Grau com Uma Incógnita: um estudo exploratório nos livros didáticos de Matemática do 7º ano no Brasil

Jadilson Ramos de Almeida[1]

Marcelo Câmara dos Santos[2]

Resumo

Esse artigo traz um resumo da pesquisa que está sendo desenvolvida no mestrado em Educação Matemática e Tecnológica e que tem como objetivo analisar a abordagem dos problemas de estrutura algébrica envolvendo equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de Matemática do 7º ano no Brasil. A análise da nossa pesquisa está sendo realizada em dois momentos, no primeiro momento estamos classificando os problemas encontrados nos capítulos que têm como objeto de ensino as equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, tendo como categorias iniciais as classificações dos problemas de estrutura algébrica feitas por Marchand e Bednarz (1999), que classificam esses tipos de problemas em três classes: "problemas de taxa", "problemas de transformação" e "problemas de partilha", além dos "problemas aritméticos" e dos "falsos problemas". No segundo momento, temos como foco os problemas de partilha, que serão classificados de acordo com o número, a natureza e o encadeamento das relações. Nossa análise está sendo realizada nos dez livros didáticos de Matemática do 7º ano aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011. Para esse artigo trazemos os resultados obtidos em dois livros didáticos. Como resultado, destacamos que os dois livros analisados dão preferência aos problemas de partilha com encadeamento tipo fonte e com apenas uma relação, que são os considerados mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes.

Palavras chave: livro didático; problemas de estrutura algébrica; problemas de partilha.

1. Introdução

A Matemática sempre foi considerada de difícil compreensão por parte dos estudantes. Em alguns casos, a Matemática era, e talvez ainda seja, determinante no futuro escolar de algumas crianças. Avaliações externas de larga escala, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) em nível nacional, e o SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco) em nível estadual, revelam baixos índices no rendimento por parte dos estudantes no que se refere à Matemática. Com relação à álgebra, essas mesmas avaliações mostram que as dificuldades dos estudantes neste campo de conhecimento matemático são ainda maiores.

[1] Aluno do Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica – UFPE – jadilsonalmeida@hotmail.com

[2] Colégio de Aplicação da UFPE – marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Alguns autores como Lins e Gimenez (2005) argumentam que se um estudante fracassa em álgebra, provavelmente terá um fracasso escolar.

Pesquisas como as de Lochhead e Mestre (1995), André (2007), entre outras, destacam a fragilidade no processo de ensino e aprendizagem de álgebra. Quando se trata da resolução algébrica de problemas esta dificuldade é ainda maior.

Lochhead e Mestre (1995) mostram que as dificuldades na resolução algébrica de problemas matemáticos não são exclusividade de iniciantes em álgebra, revelando que essas dificuldades se estendem para pessoas de idades, nacionalidades e níveis de escolaridades diferentes. Esses autores afirmam que o passo mais difícil na resolução de problemas, talvez seja o processo de conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, esse tipo de erro ocorre, principalmente, por duas razões. Primeira, “os alunos mostram uma forte tendência a fazer uma associação com a ordem das palavras, da esquerda para direita”, e segunda, “muitas vezes confundem variáveis com rótulos”.

Seguindo essa linha de pesquisa, André (2007), buscou investigar como estudantes do 8º ano (antiga 7ª série) do Ensino Fundamental de escolas públicas realizam a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica na resolução de problemas associados a equações polinomiais do 1º grau.

Como um dos resultados de sua pesquisa, André (2007) pode constatar que os estudantes encontram muitas dificuldades na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica. Nesse sentido, a pesquisadora afirma que existe, por parte dos alunos, uma “forte tendência em associar a ordem em que as palavras aparecem no texto para representar os dados do enunciado, ou seja, os alunos usualmente fazem a leitura linear do enunciado do problema ou situação proposta” (ANDRÉ, 2007, p. 199).

O nosso objeto de investigação está relacionado com problemas cuja representação matemática se dá por uma equação polinomial do 1º grau, ou seja, problemas de estrutura algébrica. Entretanto, não estamos preocupados com as estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver esses tipos de problemas, mas, sim, com a abordagem desse tipo de problema nos livros didáticos de matemática brasileiros.

2. Problemas de estrutura algébrica

Para Da Rocha Falcão (1993) os problemas de estrutura algébrica são aqueles para os quais os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes. Gama (2003) fala que os problemas algébricos são aqueles que contêm relações entre seus elementos. Seguindo essa lógica, Marchand e Bednarz (1999) dizem que em um problema de estrutura algébrica se faz necessária a construção de relações entre os dados (as informações) do enunciado para construir uma equação equivalente ao problema. É essa caracterização que adotamos em nossa pesquisa como problema de estrutura algébrica.

Para Marchand e Bednarz (1999) o que diferencia um problema de estrutura algébrica de um problema aritmético é que em um problema aritmético o estudante parte de valores conhecidos para chegar ao valor desconhecido, como no exemplo a seguir:

"João tem 12 figurinhas, Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?"

Esse problema pode ser representado a partir de duas operações de multiplicação e duas de adição, conforme a estrutura abaixo:

"X = 12 + 2.12 + 3.12"

O estudante chega à resposta por ter um valor conhecido, o número de figurinhas de João, que relaciona com os outros elementos da situação.

Já em um problema de estrutura algébrica, o estudante parte de "relações para se chegar ao valor desconhecido, em um processo inverso ao problema do tipo aritmético" (CÂMARA, 2010, p. 3). Podemos verificar essa situação no problema a seguir:

"João, Paulo e Carlos têm, juntos, 72 figurinhas. Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas têm cada um?"

Em uma situação desse tipo, o estudante não pode partir de um valor conhecido, mas deve estabelecer relações entre os elementos do problema. Portanto, esse problema tem a seguinte estrutura (Figura 1).

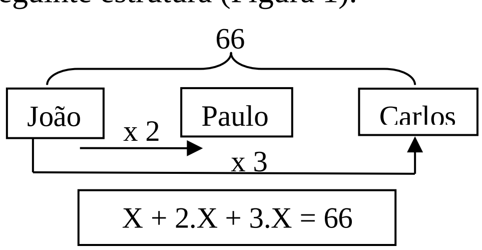


Figura 1. Esquema de problema de estrutura algébrica

Sendo assim, “os valores desconhecidos (incógnita) não mais poderiam (ou deveriam) ser obtidos por uma sequência de operações aritméticas, sendo necessário estabelecer uma equação que expresse as relações” (CÂMARA, 2010, p. 3).

Os problemas de estrutura algébrica podem ser classificados em três grandes classes, os “*problemas de transformação*” (PTr); os “*problemas de taxa*” (PTa) e os “*problemas de partilha*” (PP).

Os PTr se caracterizam pelas transformações que os valores sofrem. Nesse caso, tanto os valores iniciais como os valores finais são desconhecidos. Por exemplo,

“Ao ser perguntado sobre sua idade, Paulo respondeu: o dobro da minha idade quatro anos atrás é igual a minha idade atual mais dezoito anos. Qual a idade de Paulo?”

Nesse caso, a idade de Paulo é o valor inicial e desconhecido. Nesse valor inicial foram realizadas três transformações, sendo duas aditivas, que são representadas por “*quatro anos atrás*” e “*mais dezoito anos*” e uma multiplicativa, representada pela operação “*dobro*”.

Já os PTa são aqueles que se caracterizam por existirem relações entre grandezas não homogêneas. Como no exemplo abaixo:

Sejam duas cidades A e B. Um homem viaja de automóvel a uma velocidade média de 80 km/h na ida. Ele volta pela mesma estrada a uma velocidade média de 60 km/h. Se ele faz toda viagem de ida e volta entre A e B em 7 horas, qual a distância entre essas duas cidades?

No caso do exemplo acima é preciso estabelecer uma relação entre as grandezas (não-homogêneas) velocidade média, tempo e distância, para obter a solução.

Os PP se caracterizam por terem um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas, ou seja, nesse tipo de problema tem-se uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em outras partes desiguais e desconhecidas, como no exemplo abaixo:

“Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas têm cada um?”

Esse problema pode ser representado pelo esquema da figura 2.

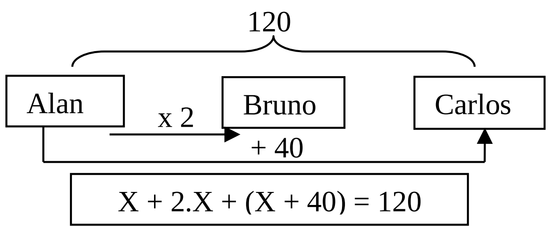


Figura 2. Esquema de um PP

Marchand e Bednarz (1999) afirmam que um PP pode ser classificado de acordo com as relações existentes entre as partes. Essa classificação leva em consideração o número de relações, a natureza das relações e o encadeamento dessas relações.

No caso do exemplo mostrado acima, se tem um PP com duas relações. "*Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan"* é uma relação e "*Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan"* é outra relação. Já quanto à natureza das relações pode ser aditiva, multiplicativa ou mista. Por exemplo, no problema acima, temos uma relação de natureza multiplicativa (Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan) e outra aditiva (Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan). Portanto esse problema é de natureza diferente (uma aditiva e outra multiplicativa).

No exemplo abaixo, temos um PP de natureza mista, em que, na mesma relação, aparecem os dois tipos de natureza ao mesmo tempo (aditiva e multiplicativa), "José tem o dobro de selos de João (multiplicativa) mais 5" (aditiva). Podemos visualizar melhor a estrutura na figura 3.

"João e José têm juntos 35 selos. José tem o dobro de selos de João mais 5. Quantos selos tem cada um?"

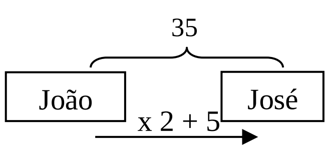


Figura 3. Estrutura do PP de natureza mista

Quanto ao encadeamento das relações, Marchand e Bednarz (1999) relatam que o PP pode ser de três tipos distintos. O encadeamento pode ser do tipo "*fonte*", "*poço*" ou "*composição*".

Em um PP que o encadeamento é tipo fonte, as grandezas são originadas em função de apenas uma grandeza, como no exemplo acima, em que "João" é a fonte, pois, para encontrar o número de selos de "José", é necessário encontrar primeiro o número de selos de "João". Oliveira e Câmara (2011) mostram em suas pesquisas que os PP com esse tipo de encadeamento são considerados mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes. Acreditamos que isso ocorra por nesse tipo de problema ter uma fonte fixa e as relações ficam mais fáceis de serem feitas, ao contrário dos PP com outro tipo de encadeamento.

Nos problemas cujo encadeamento é tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, como mostra o exemplo abaixo.

"Paulo, Roberto e Mário têm, juntos, 60 bolas de gude. Roberto tem o dobro de bolas de gude de Paulo e Mário tem 20 bolas de gude a mais que Roberto. Quantas bolas de gude têm cada um?"

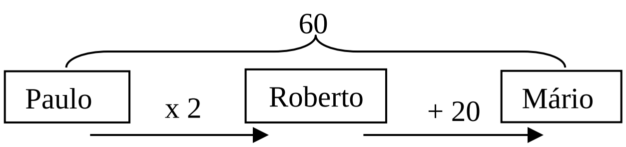


Figura 4. Estrutura de PP tipo composição

Nesse problema, as relações seguem uma sequência, "Roberto tem o dobro de Paulo" e "Mário tem 20 a mais que Roberto".

No encadeamento tipo poço, as relações convergem para um dos termos do problema. O exemplo abaixo mostra um problema com esse tipo de encadeamento.

"Paulo, Roberto e Mário vão repartir entre eles 34 bolas de gude de modo que Paulo receba 6 bolas de gude a mais que Roberto e o dobro de bolas de gude de Mário. Quantas bolas de gude cada um vai receber?"

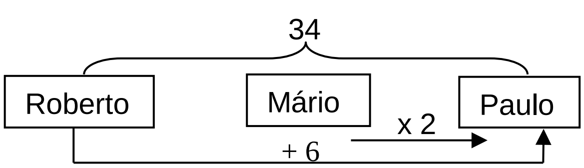


Figura 5. Estrutura do PP tipo poço

No caso desse problema, as relações convergem para Paulo.

Pesquisas como as de Oliveira e Câmara (2011) mostram que os estudantes encontram maiores dificuldades em resolver os PP com encadeamento tipo poço, tendo em vista que, para resolver esse tipo de problema, é necessário considerar as operações inversas às que estão colocadas no enunciado. É o caso do exemplo acima, que tem no enunciado as sentenças "de modo que Paulo receba 6 bolas de gude a mais que Roberto e o dobro de bolas de gude de Mário" ou seja, uma adição e uma multiplicação, e na equação equivalente ao enunciado aparece uma subtração e uma divisão. $X – 6X + X/2 = 34$.

Marchand e Bednarz (1999) encontraram, em sua pesquisa realizada no Québec, um tipo de problema que classificaram como "falsos problemas", que são, segundo essas pesquisadoras, os problemas que fazem uma leitura direta de uma equação, sem ser necessário estabelecer relações entre os dados, como no exemplo abaixo.

"O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?"

3. Método

Nesse estudo estamos realizando a análise nos dez livros didáticos (LD) de matemática do 7º ano aprovados no PNLD/2011 (Programa Nacional do Livro Didático). Escolhemos os LD do 7º ano por ser neste ano que se inicia o ensino de equações polinomiais do 1º grau e, consequentemente, o de problemas envolvendo esse tipo de equações, que é o foco do nosso estudo. Nossa análise está sendo feita nos capítulos dos LD que têm como objeto o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita.

Nossa análise está sendo realizada em dois momentos. No primeiro momento estamos classificando todos os problemas encontrados no capítulo dos LD, tendo como categorias de classificação pré-definidas as propostas por Marchand e Bednarz (1999), ou seja, nossa análise tem no primeiro momento as seguintes categorias: "problemas de transformação"; "problemas de taxa"; "problemas de partilha"; "falsos problemas" e "problemas aritméticos".

No segundo momento temos como foco de análise os problemas de partilha, que serão analisados levando em consideração a quantidade, a natureza e o encadeamento das relações.

Estamos trazendo, nesse artigo, a análise realizada em dois dos dez livros que serão analisados. A escolha desses dois livros foi feita de maneira aleatória, sem nenhum critério específico. Os LD analisados nesse artigo estão no quadro abaixo.

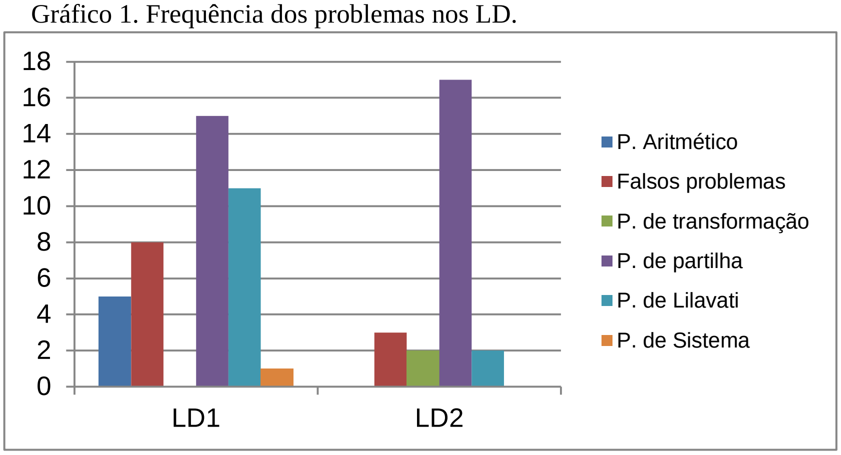
Quadro 1. Livros didáticos analisados.

Livro	Título	Autores	Editora
LD1	A Conquista da Matemática – Edição renovada – 7º ano	José Ruy Giovane Jr & Benedicto Castrucci	FTD
LD2	Matemática – 7º ano	Edwaldo Bianchini	Moderna

4. Resultados preliminares

Em relação à quantidade de problemas apresentados no capítulo referente ao trabalho com equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, podemos perceber que ambos os livros dão preferência aos problemas de partilha, como mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 1. Frequência dos problemas nos LD.



A partir do gráfico 1 observamos que os dois livros dão preferência aos problemas classificados por Marchand e Bednarz (1999) como problemas de partilha. Mesmo a análise sendo feita no capítulo que tem como objeto de ensino as equações polinomiais do 1º grau, encontramos, no LD1, cinco problemas de estrutura aritmética, que são os problemas que facilmente podem ser resolvidos por operações aritméticas, sem a necessidade de utilizar os recursos algébricos, ou seja, problemas que não facilitam o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica. Também foi encontrado no LD1 um problema que é geralmente resolvido por meio de um sistema de duas equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, como no exemplo a seguir.

Em um estacionamento há carros e motos que, no total, somam 38 veículos e 136 rodas. Quantas motos e quantos carros há nesse estacionamento?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci, 2009, p. 147.

Também encontramos, nos dois livros analisados, os falsos problemas, que são os problemas que fazem uma leitura direta de uma equação, como no exemplo abaixo, retirado do LD1.

5. Ao triplo de um número adicionamos 90. O resultado é igual ao quíntuplo do mesmo número. Qual é esse número? 45

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci, 2009, p. 137.

Esse tipo de problema não leva os estudantes a estabelecer relações entre os dados do problema, relações que são necessárias na caracterização de um problema de estrutura algébrica.

Também encontramos, em nosso trabalho, um tipo de problema que não se enquadra em nenhuma categorização feita por Marchand e Bednarz (1999). Em nossa investigação, chamamos essa categoria de “problemas de Lilavati”, por serem inspirados no famoso problema dessa personagem ou por terem estruturas próximas a esses problemas. Temos abaixo um exemplo desse tipo de problema.

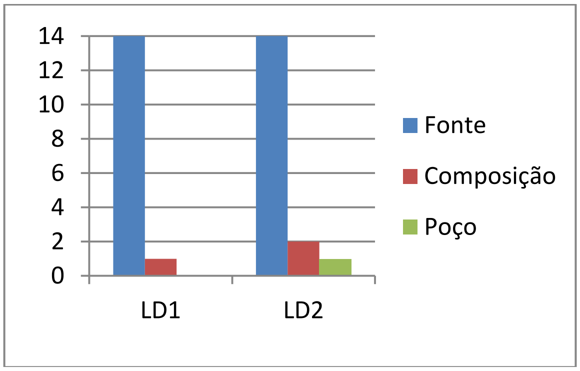
... o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caíram no chão, um quinto foram para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar.

Fonte: Bianchini, 2006, pg. 95.

Por enquanto não temos nenhum resultado de pesquisa que mostre a importância desse tipo de problema no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica.

No segundo momento da análise realizamos a classificação dos problemas de partilha quanto ao número, à natureza e o encadeamento das relações. No gráfico abaixo temos a classificação dos problemas de partilha quanto ao encadeamento.

Gráfico 2. Classificação dos PP quanto ao encadeamento



Quanto ao encadeamento dos problemas de partilha, observamos que, nos dois livros analisados, os autores dão preferência aos problemas do tipo fonte, que são os problemas em que as grandezas são originadas de uma fonte fixa. Esse tipo de PP é considerado pelos estudantes os mais fáceis de serem resolvidos, segundo pesquisas realizadas por Oliveira e Câmara (2011). Também foi observado que os autores pouco exploram os PP com encadeamento tipo composição e poço. No caso dos problemas com encadeamento tipo poço, só os encontramos em um dos LD, e em quantidade muito pequena (apenas 1 problema). Esse tipo de problema, tipo poço, coincidentemente, é considerado pelos estudantes como o mais difícil de ser resolvido, tendo em vista que é preciso levar em consideração as operações inversas às que estão no enunciado do problema, (OLIVEIRA e CÂMARA, 2011).

Para finalizar nossa análise temos nos dois gráficos abaixo a classificação dos PP levando em consideração o número e a natureza das relações.

Gráfico 3. Classificação dos PP do LD1 quanto o número e a natureza das relações

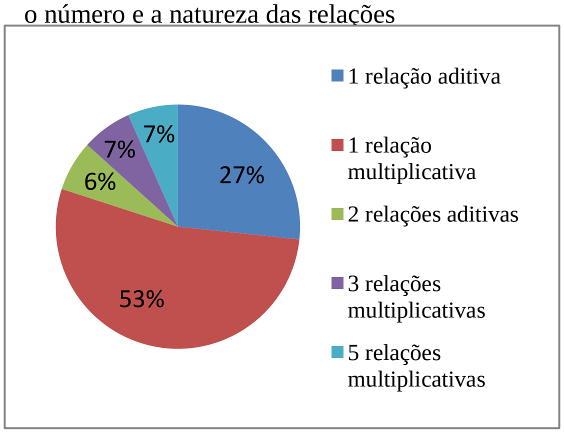
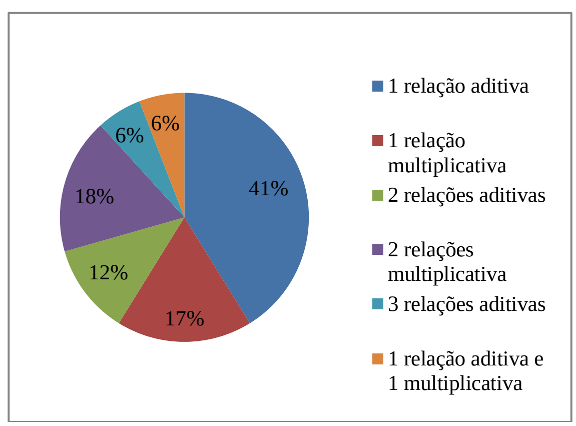


Gráfico 4. Classificação dos PP do LD2 quanto o número e a natureza das relações



Observando os gráficos 3 e 4 percebemos que os dois LD analisados dão preferência aos PP com apenas uma relação, (80% no LD1 e 58% no LD2). No LD1 a preferência é para os problemas com uma relação multiplicativa e no LD2 é para os problemas com uma relação aditiva.

Os problemas de partilha com apenas uma relação é considerado os mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes. Marchand e Bednarz (1999 e 2000) dizem que esse tipo de problema pode ser resolvido aritmeticamente sem muitas dificuldades, tendo em vista que o número de relação que os estudantes têm que realizar entre os dados do enunciado é apenas uma. Trazemos a seguir um exemplo desse tipo de problema.

Uma batedeira e um liquidificador custam, juntos, 151 reais. A batedeira custa 21 reais a mais que o liquidificador. Qual é o preço da batedeira? Responda em seu caderno.

Fonte: Bianchini, 2006, p. 114.

Marchand e Berdnarz (1999 e 2000) acreditam que um problema, como o do exemplo acima, não possibilitando ao estudante a transição da aritmética à álgebra.

5. Considerações preliminares

Os resultados da análise nos dois LD mostraram que os problemas abordados nos capítulos voltados para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nem sempre têm relação com esse saber matemático, como os problemas aritméticos encontrados no LD1.

Quanto aos problemas de estrutura algébrica, a preferência dos autores é para os problemas de partilha. Quando realizamos a classificação dos PP, observamos que nos dois livros didáticos, a maior parte desses problemas tem encadeamento tipo fonte. Uma de nossas hipóteses é que isso acontece pelo fato de os problemas tipo fonte serem considerados mais fáceis de serem resolvidos (OLIVEIRA e CÂMARA, 2011). Já os problemas considerados mais difíceis, com encadeamento tipo poço, raramente aparecem nos LD.

Quanto ao número de relações, os livros analisados dão preferência a problemas que têm apenas uma relação. Novamente, acreditamos que isso ocorra pelo fato de esses problemas serem mais fáceis de serem resolvidos do que aqueles que têm duas ou mais relações.

Portanto, apesar de termos identificados problemas de diversos tipos, observamos que nem sempre os problemas abordados nos capítulos que tem como objeto de ensino as equações polinomiais do 1º grau têm relações com esse saber matemático.

6. Referências

ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica**. Dissertação de Mestrado em Educação. UFPE, 2007.

BIANCHINI, E. **Matemática. 7º Ano**. São Paulo: Moderna, 2006.

CÂMARA, M. Estratégias Utilizadas por Alunos de 6º Ano na Resolução de Problemas de Estrutura Algébrica. In: **Anais do X ENEM**. Salvador, 2010.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A.D., CARRAHER, D.W., SPINILLO, A.G., MEIRA, L.L. & DA ROCHA FALCÃO, J.T. **Estudos em psicologia da educação matemática**. Recife, Editora Universitária UFPE, 1993.

GIOVANNI JUNIOR, J. R. & Castrucci. **A Conquista da Matemática. 7º Ano**. São Paulo: FTD, 2009.

LINS, R. C. & GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 5ª Edição. Campinas: Papirus, 2005.

LOCHHEAD, J. & MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; (Org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

MARCHAND, P. & BEDNARZ, N. L’enseignement de l’algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. In: **Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

MARCHAND, P. & BEDNARZ, N. Développement de l’algèbre dans un context de resolution de problems. **In Bulletin AMQ**, Vol. XL, N°4. Québec: AMQ, 2000.

OLIVEIRA, I. & CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: **Anais do XIII CIAEM**. Recife, 2011.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; (Org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.