

Geometrias no Início da Segunda Fase do Ensino Fundamental: Um Estudo Apoiado na Epistemologia Genética

João Debastiani Neto¹

Clélia Maria Ignatius Nogueira²

Valdeni Soliani Franco³

Resumo

A respeito da construção do espaço pela criança, incluindo como ela o percebe e o representa, a teoria de Piaget se destaca pelo esforço na investigação deste problema. Segundo Piaget e Inhelder (1993), no domínio das geometrias, a criança estabelece primeiro as relações topológicas para, posteriormente, construir as relações projetivas e euclidianas, que ocorrem simultaneamente. Contudo, de acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná, o Conteúdo Estruturante de Geometria se desdobra em: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de geometrias não-euclidianas, sendo apresentadas aos alunos na ordem descrita. Assim, o presente projeto tem como objetivo investigar se crianças com idades entre oito e doze anos estabelecem relações entre situações-problemas de estruturas geométricas com as ideias básicas envolvidas nos conteúdos das geometrias que devem ser apresentadas no Ensino Fundamental.

Palavras chave: Construção do espaço, Relações euclidianas, Conteúdo Estruturante de Geometria.

A construção da noção de espaço na criança é uma temática ampla e complexa. De acordo com Piaget a construção do espaço ocorre desde o nascimento do sujeito e é conjunta às demais construções mentais, estabelecendo-se com a própria inteligência. Esta construção se processa progressivamente, nos planos perceptivo e representativo. Com relação ao estudo da construção do conhecimento espacial, Piaget postula que:

[...] o espaço é uma propriedade pela qual se enquadram o sujeito, os objetos e seus deslocamentos possibilitados pelas ações deste, e através desta relação, é que este consegue construir o conhecimento espacial (PIAGET, 1975, *apud* YAMASHITA, KOBAYASHI, YAMADA, 2004, p.01).

¹ Mestrando - Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: netto_jnt@hotmail.com

² Doutora em Educação. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Docente da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: clelia@wnet.com.br

³ Doutor em Matemática. Instituto de Ciências Matemática e Computação. Docente da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: vsfranco@uem.br

Inicialmente a construção do espaço se prende a um espaço sensório-motor ligado à percepção e à motricidade. Este espaço sensório-motor surge dos diversos espaços orgânicos anteriores, como o postural, o bucal, o tátil, o locomotor, etc. Em seguida, a construção do espaço passa a ser representativa, coincidindo com o aparecimento da imagem e do pensamento simbólico, que ocorrem no mesmo momento do desenvolvimento da linguagem.

A representação se desenvolve, na construção do espaço, ignorando as relações métricas e projetivas já construídas no nível sensório-motor. Conforme Piaget (1993), o espaço representativo se processa como uma reconstrução, só que não mais a partir das atividades sensório-motoras, mas sim a partir das intuições elementares concernentes às relações topológicas. Deste modo, a criança reconstrói o espaço mediante a atividade representativa exercida sobre a atividade perceptiva. A última etapa da construção do espaço é operatória e, como as anteriores, se processa por meio de reconstruções sucessivas, sendo a primeira concreta e a segunda formal.

Para Piaget e Inhelder (1993, p. 474), as primeiras operações espaciais engendradas pela criança são topológicas, e a partir delas é que são estabelecidas simultaneamente as relações projetivas e euclidianas. Estas primeiras intuições geométricas nas crianças são constituídas, de acordo com Kobayashi (2001), por relações de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento, e de continuidade.

Ainda como resultado de suas investigações, Piaget (1993) afirma que por volta dos 06 e 07 anos de idade as crianças já começam a adquirir domínio das relações projetivas e euclidianas, ou seja, a partir dessa fase, sua percepção permite a constituição de geometrias que contemplam o espaço exterior ao sujeito e assim ele passa a observar as transformações das figuras através de suas várias projeções.

As relações projetivas, segundo Piaget e Inhelder (1993), são as que permitem a coordenação dos objetos entre si relativamente a pontos de vista determinados. As noções de espaço (esquerda ou direita, acima ou abaixo, frente ou trás) vão se desenvolvendo na criança progressivamente até a liberação do egocentrismo.

As relações euclidianas, para Piaget e Inhelder (IDIB), são as relações que permitem localizar objetos em um sistema de referência, levando em consideração a conservação das distâncias e das dimensões. Apesar de haver diferenças entre os espaços projetivo e euclidiano, as relações projetivas (perspectivas) não precedem as relações euclidianas (medidas, coordenadas e proporções), nem o inverso.

Sendo assim, a organização gradativa das ideias geométricas segue uma ordem definida, iniciando-se pelas relações projetivas (vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade) de uma figura, para mais tarde, construir, de maneira simultânea as projetivas e euclidianas.

Durante o desenvolvimento da criança, é possível “enxergar” as manifestações dessas três geometrias desde o estágio sensório-motor. Por exemplo, a capacidade de distinguir um objeto de outro, que é necessária para qualquer outra construção espacial (topológica). Mais tarde, quando começa a construção do objeto permanente, o bebê aprende que uma mamadeira vista de várias perspectivas é na realidade o mesmo objeto (geometria projetiva) e ele torna-se capaz de estimar a distância necessária para pegá-la (geometria euclidiana).

No entanto, devemos ressaltar que a ordem da psicogênese das estruturas geométricas na criança, iniciando pelas relações topológicas, e posteriormente, as relações euclidianas e projetivas, de maneira simultânea, é contrária às Propostas Curriculares. Nestas, observamos que a primeira das geometrias a terem seus conteúdos expostos na Educação Básica, é a euclidiana; a topológica e a projetiva aparecem em raros momentos.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (2008, p.49) entende-se por Conteúdos Estruturantes: “os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais”.

Os Conteúdos Estruturantes propostos nessas Diretrizes Curriculares, para a Educação Básica da Rede Pública Estadual, são: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções, e Tratamento da Informação. Para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra em geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, e noções básicas de geometrias não-euclidianas.

As Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Segundo as Diretrizes Curriculares do Paraná, neste nível do ensino, o aluno deve compreender conceitos da geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, e noções de geometrias não-euclidianas.

No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. Aprofundam-se os

estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria hiperbólica e elíptica.

Nota-se então que, de acordo com estas Diretrizes Curriculares, a primeira das geometrias a ser trabalhada nas escolas é a euclidiana, contrariando a ordem genética das geometrias estabelecida por Piaget, para quem, conforme já citado anteriormente, as primeiras intuições geométricas nas crianças são as topológicas (uma das geometrias não euclidianas).

Assim, nos propusemos a investigar se situações-problema permitem a crianças entre 08 e 12 anos, que cursam o Ensino Fundamental, reconhecer e mobilizar ideias básicas envolvidas nas geometrias que são apresentadas no Ensino Médio e Superior. Acreditamos que muitos conceitos podem ser informalmente apresentados aos alunos muito antes de sua programação curricular e isto é, inclusive, recomendado, pois conforme a Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento se constrói e se desenvolve ao longo do tempo, em interação do indivíduo com as diferentes situações em que experimenta.

O comportamento cognitivo do sujeito frente a uma situação é explicado em termos de esquemas, que são a forma como o sujeito organiza seus invariantes⁴. Os esquemas explicitam os conhecimentos em ação dos sujeitos, e são os elementos cognitivos responsáveis para que a ação do sujeito seja operatória (VERGNAUD, 1990, p. 2). Ao resolver uma situação-problema sem o conhecimento das fórmulas, o sujeito utiliza os seus esquemas de ação para encontrar a solução, isso faz com que sua aprendizagem se torne mais significativa.

Considerando a importância das geometrias para a Matemática e para outras áreas, e as nossas teorias de sustentação (Piaget e Vergnaud), nossa hipótese é que ideias básicas dessas geometrias podem (e devem) ser adquiridas bem antes do momento em que são apresentadas aos alunos.

A INVESTIGAÇÃO

Os estudos realizados por Piaget (1993) mostravam que não apenas o espaço, mas todo o conhecimento é construído progressivamente. Isso tem implicações pedagógicas

⁴ Os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São explícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos (feitos pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso, eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas

além das epistemológicas, porque indica que o conhecimento não é simplesmente transmitido, é construído. Piaget constatou também que é por meio de relações estabelecidas pela criança que o espaço é percebido e representado, sendo de natureza topológica, projetiva e euclidiana, isto é, a criança pode reconhecer e representar graficamente relações de vizinhança, interior e exterior, fronteira, continuidade etc., e por volta dos seis e sete anos de idade as crianças já começam a adquirir domínio das relações projetivas e euclidianas, assim a partir dessa fase, sua percepção permite a constituição de geometrias que contemplam o espaço exterior ao sujeito.

Como observamos acima, nas propostas curriculares, estes conteúdos dispõem-se em uma ordem distinta da ordem psicogenética da criança. Entretanto, por causa da sua importância para a Matemática, e por envolver ideias básicas que são passíveis de serem construídas bem antes do nível superior, como a de interioridade ou projeção, entendemos que a ação pedagógica acerca dos conteúdos de geometrias podem ser iniciadas muito antes disso.

Neste contexto é que surge a problemática desse projeto: Em que momento do ensino fundamental poderemos apresentar ideias básicas das geometrias que devem ser trabalhadas na grade escolar? Conteúdos das geometrias (geometrias não euclidianas), que são aprofundados no Ensino Médio, podem ter suas ideias básicas introduzidas já no Ensino Fundamental? Quais ideias básicas de geometrias do Ensino Médio podemos apresentar no Ensino Fundamental?

Entendemos que os resultados deste estudo fornecerão informações importantes sobre o desenvolvimento cognitivo da criança, e principalmente sobre o processo de ensino e aprendizagem das geometrias nos alunos do ensino fundamental e médio, além de que poderão servir de base para novas pesquisas com esta temática.

Dessa forma, estabelecemos como objetivos para nossa investigação identificar se estudantes do Ensino Fundamental reconhecem e mobilizam as ideias básicas envolvidas nos conceitos de geometrias em situações-problema. Para a consecução desse objetivo seria necessário: estabelecer algumas das ideias básicas envolvidas em conceitos essenciais de geometrias e formular situações-problema envolvendo tais idéias.

Após a análise dos dados obtidos, será possível estabelecer, entre outras coisas, se e quais conteúdos de geometria do Ensino Médio e Superior podem ser apresentados, de maneira ampla, ou seja, em sentido lato, aos estudantes do Ensino Fundamental.

No momento atual do desenvolvimento de nosso projeto, já estabelecemos o que entendemos constituir algumas das ideias básicas necessárias à construção de conceitos geométricos sejam as geometrias em questão euclidianas ou não.

As ideias básicas que estão sendo investigadas são:

- As noções de ponto e do contínuo;
- As operações de secção;
- Distâncias;
- Caminhos fechados - Ângulos e Triângulos;
- Conservação de Área.

Também já foram elaboradas as situações-problema que serão apresentados aos sujeitos colaboradores da pesquisa, assim como já realizamos a aplicação piloto. Ressaltamos que já realizamos os estudos teóricos que subsidiam nossa investigação, a saber da psicologia genética e da teoria dos campos conceituais e se não os reproduzimos neste trabalho, é em função da limitação das páginas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a consecução dos objetivos propostos e, em consonância com o referencial teórico adotado optamos pelo método clínico crítico de Piaget. Este método consiste na realização de entrevistas, nas quais o entrevistador faz perguntas a uma criança e baseado nas reações dela, observa, faz hipóteses a respeito de sua capacidade conceitual e continua a fazer mais perguntas de acordo com as hipóteses que ela formulou. O método clínico surgiu da necessidade, identificada por Piaget, de elaborar uma técnica de pesquisa que não fosse extremamente rígida como o teste padronizado e ao mesmo tempo, utilizasse os benefícios da observação, facilitando a realização de experiências, de avaliação da inteligência das crianças, que integravam seu universo de pesquisa (WADSWORTH, 1984).

Serão aplicadas cinco atividades compostas de situações-problema que se constituirão nos instrumentos de apoio para as entrevistas clínicas, realizadas com dez crianças com idade entre 08 e 12 anos, estudantes do Ensino Fundamental, de uma Escola particular do município de Maringá-PR.

Para melhor captação dos pormenores, todas as entrevistas e a aplicação dos exames piagetianos, serão filmados, com autorização dos entrevistados e seus responsáveis legais.

SUJEITOS DA PESQUISA

As crianças que participarão do nosso instrumento diagnóstico estarão nos períodos referente à inteligência representativa e ao das operações formais (8 a 12 anos), sendo aquelas que estudam no ensino fundamental de um colégio particular da cidade de Maringá – PR.

OS INSTRUMENTOS DE PESQUISA

Primeiro exame: as noções de ponto e do contínuo

Procedimentos:

1) Dado um quadrado qualquer em uma folha branca, pede-se para a criança que desenhe ao lado um quadrado tão pequeno que não seja possível fazer outro menor. A seguir pede-se para fazer o maior quadrado possível em uma folha branca e quadrada (Essas primeiras questões, sem tocar ainda no contínuo nem no ponto, apresentam a vantagem de nos orientar previamente sobre a capacidade do sujeito em seriar ou encaixar grandezas).

2) Para um segmento de reta dado, pede-se ao sujeito que desenhe a metade desse segmento, depois a metade da metade, e assim por diante. Quando ele atinge tamanhos tão pequenos, impossíveis de ultrapassar pela representação gráfica, perguntar se não poderia continuar “com o pensamento”.

3) Trata-se, pois, essencialmente, em questionar à criança se existe ou não o ultimo termo da partição e, se existe, qual a sua configuração.

4) Recomposição do todo a partir de seus elementos: Questiona-se a criança se pode imaginar uma linha como constituída por um conjunto de pontos. Para esse fim é necessário, além do questionamento, pedir ao sujeito que intercale um ponto entre dois pontos, procurando saber se isso constituirá uma linha.

Objetivos:

- Identificar quais as noções que a criança tem sobre o ponto e o contínuo;
- Compreender o modo como a criança concebe o seccionamento de uma figura ou de uma linha até seus contornos últimos;
- Identificar quais são os procedimentos das crianças, referentes à representação da composição e recomposição de figuras geométricas.

Segundo Exame: As operações de secção

Procedimentos:

Apresentamos à criança um cilindro em massa de modelar (ou um prisma) e uma faca grande e, antes de cortá-lo transversalmente, isto é, segundo um plano paralelo á base, pedimos ao sujeito para desenhar em uma folha de sulfite a forma que tomará a superfície de cada secção: para tanto, encostamos a lâmina da faca na massa, sem cortá-la, mas indicando com precisão o lugar em que se fará a secção além da direção desta.

Não imediatamente após, mas durante o interrogatório, colocamos os mesmos problemas para uma secção longitudinal (paralela aos lados do cilindro, prisma, etc.)

Entre os sólidos geométricos de massa de modelar que serão apresentados às crianças teremos:

- 1) Um cilindro;
- 2) Um prisma;
- 3) Uma esfera;
- 4) Um anel formado por um cordão cilíndrico de massa de modelar, mas fechando-se em si mesmo;
- 5) Uma estrela de quatro pontas com secção, seja de uma das pontas, seja da extremidade de uma ponta à extremidade da ponta oposta;

Objetivo: Identificar como a criança estabelece propriedades de um determinado sólido geométrico a partir de um ponto de vista afastado, isto é, estando situada em uma posição da qual considera os sólidos geométricos tais como eles parecem deste ponto de vista determinado.

Terceiro Exame: Distâncias

Como intentamos extrapolar os limites da geometria euclidiana, utilizaremos neste exame uma pseudoesfera, que é pertinente à geometria hiperbólica. Pseudoesfera é uma superfície gerada pela revolução de uma curva conhecida como tractriz, em torno de uma linha horizontal (sua assíntota). Esta será utilizada em duas provas: a primeira (P1) referente à distância e a segunda (P2), à soma dos ângulos internos de um triângulo.

Procedimentos:

Prova 1:

Marque dois pontos na pseudoesfera e utilize fita crepe para ligá-los. Em seguida é questionado ao aluno qual é a figura obtida?

Você pode medir o comprimento da fita utilizada?

Coloque a pseudoesfera sobre uma superfície plana. Se você pudesse furar a pseudoesfera e marcar os pontos na superfície plana que está embaixo dela, e unir esses pontos com a fita crepe. Você usaria a mesma quantidade de fita?

Prova 2:

Com um triângulo construído na superfície da pseudoesfera é questionado à criança:

Quais as diferenças entre o triângulo que você acabou de construir, com os triângulos que são feitos no plano?

Você poderia dizer qual deles possui região interna maior? Por quê?

Com base no que foi dito, é possível afirmar algo com relação aos ângulos internos deste triângulo? Justifique.

Objetivos:

- Investigar se a criança identifica a existência de diferentes formas de representar a ideia de distância, dependendo do modelo adotado.
- Investigar se a criança estabelece a equivalência (do ponto de vista funcional) entre a figura obtida na pseudoesfera (geometria hiperbólica) com um segmento de reta do plano (geometria euclidiana).

- Investigar se os alunos compreendem que a soma dos ângulos internos do triângulo não será igual a 180° , como ocorre na geometria euclidiana, mas sim um valor inferior.

Quarto Exame: Ângulos e Triângulos (curvas fechadas)

Procedimentos:

É apresentada para a criança a seguinte história:

“Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 quilômetros ao sul. Depois virou a oeste e caminhou mais 100 quilômetros. Então virou novamente e caminhou por mais 100 quilômetros ao norte. Qual não foi a sua surpresa quando descobriu que voltara novamente a sua casa.”

Após é entregue folhas sulfite, e uma esfera de isopor juntamente de uma caneta esferográfica e solicitado a criança que esboce na folha de papel sulfite e na esfera de isopor o percurso do urso.

Em qual superfície é possível o urso chegar ao mesmo lugar de partida de acordo com o enunciado do problema? Por que você acha que isto acontece?

Objetivo: Investigar se crianças percebem que em uma superfície plana não é possível o retorno ao ponto de partida após caminhar x metros em direção ao sul; x metros na direção oeste e mais x metros na direção norte enquanto que na superfície esférica isto é possível.

Quinto Exame: Conservação da área

Procedimentos:

Duas figuras representando retângulos que possam simbolizar campos com grama, casinhas e vacas de miniatura, de forma que estes objetos possam dar ideia de um campo, com casas e algumas vacas pastando.

Inicialmente coloca-se uma vaca em cada campo, e pergunta-se para a criança, qual dos dois pastos tem mais grama para a vaca comer. (questiona-se a criança sobre suas respostas); em seguida, conta-se uma história dizendo que tal campo foi sendo povoado, e algumas casas foram construídas. Contudo a disposição com que as casas foram construídas é distinta Pergunta-se novamente, onde possui mais grama para a vaca comer? E por quê?

Objetivo: Investigar em que momento as crianças percebem que há conservação da área, isto é, independentemente da disposição das “casas”, a quantidade de grama existente nos dois pastos será a mesma.

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Com a elaboração das situações-problema, iniciamos nossa pesquisa de campo com uma aplicação-piloto que foi realizada com uma criança de 10 anos de idade que cursava a quinta série (sexto ano) de uma escola da rede pública do município de Maringá. Os fatores que levaram a escolha desta criança para a aplicação-piloto foram que, além desta ser próxima de um dos pesquisadores deste artigo, ela apresenta um bom rendimento escolar em geometria, e ainda não teve nenhum contato com noções básicas de geometrias não euclidianas. A entrevista realizada neste estudo-piloto foi filmada e apresentada para discussão entre os pesquisadores, visando identificar se os procedimentos, questões formuladas e até mesmo gestos ou expressões que utilizamos durante a entrevista estavam adequadas.

Por meio das gravações, registramos algumas menções que asseguram que as noções de ponto e do contínuo, operações de secção, e de conservação de área, são possíveis já neste momento da infância. Não estamos aqui afirmando que tais conteúdos devem ser tratados de forma aprofundada nesta etapa, mas sim, que ideias básicas podem ser apresentadas já no Ensino Fundamental. Novamente conjecturamos tal fato, pois mesmo que as estruturas cognitivas das crianças ainda não estejam em estádios finais piagetianos, relativos as noções geométricas básicas mencionadas anteriormente, muitas destas estruturas estão sendo construídas gradativamente, isto é, por meio do piloto pudemos “enxergar” que as crianças possuem noções de ponto, operações de secção, e conservação de área, mas estas não estão concluídas. Outros fatores foram observados, no entanto, não aprofundaremos nossa discussão sobre tal aspecto, visto que, extrapolaria o limite de páginas para este trabalho.

Assim, acreditamos que muitas destes conceitos podem ser informalmente apresentados aos alunos muito antes de sua programação curricular. No entanto temos de ressaltar que neste momento, estruturas cognitivas relativas as ideias básicas de geometrias não euclidianas ainda não se formaram, indicando assim que até os doze anos de idade, tais conceitos ainda não devem ser informalmente apresentados aos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretoria de Tecnologias Educacionais. **As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná: Matemática**. Curitiba. PR, 2008.

DEBASTIANI, João N., NOGUEIRA, Clélia M.I., FRANCO, Valdeni S.. **Qual a geometria das crianças de 03 a 10 anos?** Maringá. PR, 2009.

JAPIASSU, Hilton F. **Introdução ao pensamento epistemológico**. 4ª ed.. Rio de Janeiro. RJ: Editora: F. Alves, 1986.

KOBAYASHI, Maria C.M. **A construção da geometria pela criança**. Bauru. SP: Editora EDUSC, 2001.

MOREIRA, M. A. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área**. 2007. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre. RS: Editora Artes Médicas, 1993.

PIAGET, Jean. **A construção do real na criança**. 3ª. ed.. Rio de Janeiro. RJ: Editora Zahar, 1979.

PIAGET, Jean. **Epistemologia Genética**, 3ª ed.. São Paulo. SP: Editora Martins Fontes, 2007.

PIAGET, Jean. **Psicologia e Epistemologia: Por uma Teoria do Conhecimento**. Rio de Janeiro. RJ: Forense Universitária, 1973.

PIAGET, J; GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Publicações Dom Quixote. Lisboa, 1987.

PIAGET, Jean; INHELDER, Barbel; SZEMINSKA, Alina. **The child's conception of geometry**. New York: Editora Harper Torchbook, 1960.

WADSWORTH, Barry J. **Piaget para o professor da pré-escola e 1º grau**. São Paulo. SP: Pioneira, 1984.