

Uso da Fatoração na Resolução de Equações do 2º Grau

Míriam do Rocio Guadagnini¹

José Luiz Magalhães de Freitas²

RESUMO

Este artigo trata do ensino e da aprendizagem de equações do segundo grau, completas e incompletas através do uso das técnicas de fatoração e pelo método do completamento do quadrado, por alunos do nono ano do ensino fundamental, tendo como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas, modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau (1986) e referencial metodológico a Engenharia Didática, que emergiu em didática da matemática no início da década de 1980. Nossa pesquisa tem o intuito de analisar a utilização da fatoração, e particularmente do completamento do quadrado, para descobrirem soluções da equação do segundo grau e inclusive de deduzirem a fórmula geral de resolução da equação do segundo grau e depois utilizá-la quando julgar conveniente.

PALAVRAS-CHAVE: Equação do segundo grau, fatoração, situações didáticas, engenharia didática.

1- INTRODUÇÃO

Durante nossa vida como docente, um de nossos questionamentos eram referentes às dificuldades de aprendizagem dos alunos em álgebra. Ao trabalhar com o 9º ano e realizarmos algumas observações e leituras relacionadas a esse tema, começamos a nos questionar se haveria outras formas de apresentar o conteúdo equações do segundo grau, conteúdo-chave nesta série, de forma que resgatasse no aluno o conhecimento algébrico já estudado anteriormente e o ressignificasse por meio da sua aplicação na resolução de problemas envolvendo a equação do segundo grau, ou seja, nosso questionamento foi na direção de encontrar alguma alternativa de ensino que possibilitasse ao aluno a compreensão de conceitos algébricos e o seu reinvestimento na resolução de equações do segundo grau.

¹ Mestranda em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul –UFMS, e-mail: miriamguadagnini@hotmail.com

² Professor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, e-mail: joseluizufms2@gmail.com

Propomos assim desenvolver um estudo sobre as equações do segundo grau usando os métodos de fatoração e delimitamos como nosso objeto de pesquisa a resolução das equações do segundo grau completas e incompletas e a dedução da fórmula de Bháskara pelo método do completamento do quadrado.

Em nossas análises em sala de aula observamos os conhecimentos algébricos trazidos pelos alunos com relação a operações com monômios, produtos notáveis e fatoração, tentamos identificar manifestações desses conceitos de forma observando se aplicavam em outras situações. Nesse sentido, acreditamos que a Teoria das Situações Didáticas e a metodologia da Engenharia Didática contribuirão para a análise das atividades propostas de forma a esclarecer e responder nossas indagações.

2. JUSTIFICATIVA

Por que pesquisar a resolução da equação do 2º grau por meio da fatoração, se no Brasil a utilização da “Fórmula de Bháskara” parece dar bons resultados?

Ao observar a aprendizagem dos alunos se percebe que dada uma equação do 2º grau, completa e organizada de acordo com a sua forma geral, o aluno que memorizou a fórmula certamente conseguirá resolver uma equação como $x^2 - 6x + 9 = 0$. Caso contrário, por exemplo, uma equação do tipo $2x(x-4) + 5 = -x^2 + 7x - 7$, onde o aluno precisa mobilizar conhecimentos algébricos para organizar uma expressão algébrica adequada para aplicar a fórmula, ele provavelmente cometerá alguns erros, os quais indicam que o conhecimento algébrico deles não é suficiente para a realização dessas tarefas.

Nossa hipótese de de pesquisa é que é possível utilizar a fatoração para resolver equações do 2º grau e, durante esse processo, descobrir diferentes possibilidades de resolução, inclusive de deduzir a fórmula geral de resolução e depois utilizá-la quando julgar conveniente.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVOS GERAIS

Utilizar os métodos de fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa deverá focar a resolução das equações do 2º grau por meio da fatoração, no quadro algébrico. Na pesquisa será analisada a mobilização dos vários casos de fatoração: fator comum, trinômio quadrado perfeito, diferença de dois quadrados, culminando como o método de completar quadrados, ou seja, generalizar a idéia de completamento de quadrado para deduzir a fórmula para a resolução da equação do 2º grau.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O 1º objetivo específico: Fazer um estudo da mobilização dos casos de fatoração, por meio de atividades envolvendo equações do segundo grau.

Para atingir o objetivo geral deste trabalho observar o desempenho dos alunos diante de atividades envolvendo os casos de fatoração já vistos no 8º ano: fator comum, trinômio quadrado perfeito, diferença de dois quadrados e o método do completamento do quadrado.

Por exemplo, o caso de fatoração *fator comum em evidência* para resolver equações como como $x^2 + 5x = 0$, equivalente a $x(x + 5) = 0$, que tem raízes 0 e -5, ou envolvendo o *trinômio quadrado perfeito* para resolver equações do tipo $x^2 + 4x + 4 = 0$, reescrevendo-a como $(x + 2)^2 = 0$ para encontrar a raiz -2. De modo análogo para o *produto da soma pela diferença*, para resolver equações do tipo $x^2 - 9 = 0$, onde teremos $(x+3).(x-3) = 0$ e, a partir da análise de cada fator, encontrar as raízes +3 e -3 ou usar o método da transposição da incógnita para obter o resultado. Também nessa etapa será investigado o desempenho deles diante da necessidade do *completamento do quadrado*, por exemplo, numa equação como $x^2 + 6x - 7 = 0$, ao observar que não é um quadrado perfeito e a necessidade de que o termo c deva ser igual a 9. Então, a partir de diálogos e questionamentos deverão construir a equação equivalente $x^2 + 6x + 9 = + 7 + 9$, e fatorá-la para obter teremos $(x + 3)^2 = 16$, perceber que é possível extrair a raiz quadrada de 16, e concluir que $(x + 3)$ deve ser igual a $+ 4$ ou $- 4$, e que neste caso há duas soluções $x' = 1$ e $x'' = -7$.

O 2º objetivo específico: Resolver e verificar as soluções das equações do 2º grau, completas e incompletas por meio da fatoração.

Analisar dificuldades que os alunos apresentarão nos processos de fatoração, diante atividades que os desafiem a encontrar soluções de equações do 2º grau completas e

incompletas. Eles deverão identificar os casos onde não há solução no conjunto dos números reais, onde há somente uma solução e os casos onde há duas soluções. Também serão analisadas possibilidades de generalizar a ideia de completamento do quadrado para resolver praticamente todas as equações e verificar o processo através da substituição das raízes encontradas.

O **3º objetivo específico**: Deduzir a fórmula geral de resolução da equação do segundo grau por meio de completamento do quadrado.

A intenção da pesquisa não é dar ênfase à técnica de resolução da equação do 2º grau por meio da fórmula de “Bhaskara”. Então, ao final do trabalho, usando a ideia de completamento do quadrado, espera-se que eles possam deduzir a fórmula geral de resolução da equação do 2º grau, bem como utilizá-la quando julgarem adequado.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

De acordo com Freitas, (2010, p.77), “a teoria das situações didáticas é um modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau (1986) e trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem matemática.”

Essa teoria é de fundamental importância, pois ela representa o interesse crescente por pesquisadores e professores analisar situações didáticas sobre como se dá o ensino e a aprendizagem de matemática em sala de aula. Ela teve início a partir de estudos críticos sobre a teoria da epistemologia genética de Piaget.

Brousseau desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios. Observa-se que sua teoria se apresenta como uma contraposição à forma didática clássica, centrada no ensino com ênfase na divulgação de conteúdos sistematizados, incluindo a forma axiomática. (FREITAS, 2010, p. 78)

Essa teoria tem embasamento no tripé: professor, aluno e saber matemático, valorizando todas as partes envolvidas por igual: atribui ao professor o papel de criar situações que despertem o interesse pela aprendizagem, permite ao aluno construir seu saber e possa se apropriar de um determinado conteúdo matemático.

O contrato didático e o meio se constituem em fortes influências para a análise de situações didáticas, com a análise é possível investigar a problemática da aprendizagem matemática e compreender características na resolução e elaboração de conceitos pelos alunos. É pelo meio que se pode provocar ações para desestabilizar o sistema didático, daí o interesse de analisar possibilidades de mudanças neste meio.

Segundo Silva, (2010, p. 49) “O contrato didático é o conjunto das cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os alunos mantêm com o saber”, o meio é onde ocorrem as mudanças, equilíbrio e desequilíbrio diante situações propostas e a possibilidade de ocorrer a aprendizagem de um novo conceito ou rever conceitos errôneos e equivocados.

A forma como é apresentado um conteúdo matemático possivelmente poderá determinar sua aprendizagem ou não, cabe ao professor estruturar as atividades de forma que haja o envolvimento ativo do aluno e proporcionar-lhes atividades que contribua para essa aprendizagem, permitindo aos alunos momentos de investigação e reflexão acerca do objeto matemático. Segundo Freitas, (2010, p. 80): “Existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizado uma intenção, do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo”.

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição(...)” (Brousseau, 1986, p.8)

De acordo com a noção de situação didática o professor não transmite o conteúdo, mas transfere ao aluno a responsabilidade da aprendizagem, de forma inteligente, imperceptível, lançando problemas que o aluno toma como seu e tenta fazer uma devolução ao professor, nesse momento tem início o processo de aprendizagem.

O aluno aprende adaptando-se a um ‘meio’ que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios,...) Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de novas respostas, que são por sua vez provas da aprendizagem. (BROUSSEAU, 1986, p.42)

Brousseau caracterizou um tipo particular de aprendizagem dando-lhe o nome de aprendizagem por adaptação, onde o aluno tenta adequar seu conhecimento a uma nova situação proposta, esta ideia de aprendizagem por adaptação, se confronta com a aprendizagem formal, na qual o aluno memoriza as definições, e tenta aplicar na resoluções de alguma situação. Entre o início do processo de aprendizagem e a aprendizagem há influencia de diversas variáveis, entre elas a de situação didática.

Uma situação didática caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do

professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. (FREITAS, 2010, p. 84).

As situações adidáticas são momentos impar à aprendizagem, pois significa que o aluno concebeu a compreensão sobre um objeto matemático por si só. Elas podem ser de ação, formulação e de validação. De ação quando o aluno apresenta uma resolução para um determinado problema. De formulação quando utiliza um conhecimento teórico para proceder a resolução e uma linguagem matemática mais formal. De validação quando o aluno é capaz de utilizar os dispositivos da prova numa “atividade que tem por finalidade assegurar a validade de uma proposição matemática”. (FREITAS, p. 98, 2010).

5. REFERENCIAL METODOLÓGICO

Em nossa pesquisa utilizáramos a Engenharia Didática, ~~segundo~~ conforme descrição feita por M. Artigue (1996, p. 196)

é uma metodologia de investigação, caracterizada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino.

A engenharia didática também se caracteriza pelo registro, e pelas formas de validação. Devido a esta maneira de proceder tal metodologia é singular.

Para sua efetiva realização é preciso seguir as seguintes etapas: análise preliminar; concepção e análise a priori; experimentação e, por fim, análise a posteriori e validação.

A primeira etapa, denominada **análise preliminar**, é feita observando os objetivos da pesquisa e deve conter uma análise epistemológica do conteúdo, uma análise do ensino atual deste conteúdo e seus efeitos, das concepções e dificuldades dos alunos, dos entraves na dimensão didática e cognitiva. A segunda fase é chamada de **concepção e análise a priori**. Nesta fase é feita uma descrição e previsão em que o pesquisador escolhe as variáveis que considera pertinentes para o problema estudado, analisa o desafio dado aos alunos, descreve o comportamento esperado dos alunos, seus significados e suas expectativas, isto para cada sessão da sequência. É fase da construção da sequência didática, que terá como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas.

A terceira fase é a da **experimentação**, é preciso explicitar aos alunos os objetivos e as condições da sua realização e estabelecer o contrato didático que terá vigor na sala de aula, haja visto que tem forte influencia na aprendizagem matemática. O registro do

desenvolvimento da sequência didática deve ser feito em material escrito, áudio ou vídeo. Em seguida, a cada sessão procede-se a análise dos dados coletados, com o objetivo de verificar e descrever se houve algum elemento novo, que deve ser considerado nas próximas sessões, caso necessário, retoma-se a análise a priori da sessão seguinte.

A quarta e última fase é a **análise a posteriori**, onde faz-se o fechamento do trabalho. O pesquisador deve analisar os dados coletados e confrontar com a análise *a priori* para validar ou refutar as hipóteses levantadas. A engenharia diferencia-se de outras metodologias pelo tipo de registro das ações e pela validação. Em geral, outras metodologias realizam uma validação externa (confrontação/comparação entre grupos experimentais e grupos testemunhas). A engenharia didática faz estudo de caso e possui uma validação interna que se apóia na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori.

A engenharia didática possui instrumentos que potencializam a análise antes, durante e depois da realização da sequência didática, maximizando a compreensão da aprendizagem matemática, de desafios e suas soluções e conseqüentemente a produção de conhecimento.

6. ATIVIDADES DE VERIFICAÇÃO

Quando pensamos em ensinar a equação do segundo grau usando a fatoração, a primeira preocupação foi analisar os conhecimentos que os alunos traziam da série anterior, haja visto que as primeiras noções de álgebra são inseridas no 8º ano do ensino fundamental e os conteúdos referentes a produtos notáveis e fatoração também o são.

Para isso preparamos um pré teste com auxílio de exemplos –dizendo apenas o nome de um conteúdo o aluno não se lembra, mas exemplificando a possibilidade de se lembrar aumenta-; para que o aluno pudesse observar, analisar, relembrar conceitos já apreendidos e possivelmente responder as questões propostas. Para o professor pesquisador estas questões teriam a finalidade de apurar se havia algum conhecimento, se era possível que o aluno pudesse resolver estas questões elementares e se estes conseguissem resolver, quais eram os possíveis erros.

Segue exemplos de algumas das principais atividades que realizamos como pré-teste:

| |
|---|
| <p>3- Resolva: Exemplo: $(x + 5)^2 = (x + 5) \cdot (x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$</p> <p>a) $(x + 2)^2 =$</p> <p>b) $(x - 4)^2 =$</p> <p>c) $(x - 3)(x + 3) =$</p> <p>4- Fatore: Exemplo: $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 25 = (x + 5)^2$</p> <p>a) $x^2 + 6x + 9 =$</p> <p>b) $4x^2 - 16x + 4 =$</p> <p>5- Fatore: colocando o termo comum em evidencia: Exemplo: $3x + 3y = 3(x + y)$</p> <p>a) $2x + 4 =$</p> <p>b) $b)x^2 + 5x =$</p> <p>6- Fatore: agrupando os termos comuns: Ex: $3x + 3y + tx + ty = 3(x + y) + t(x + y) = (3 + t)(x + y)$</p> <p>a) $2x + 2y + 4a + 4b$</p> <p>b) $b) mb + md + 5b + 5d$</p> <p>7- Fatore: Qual o termo que completo o trinômio quadrado perfeito?</p> <p>a) $x^2 + 10x + ?$</p> <p>b) $? + 6x + 9$</p> |
|---|

Em seguida passamos para uma breve descrição dos acertos e erros, manifestados pelos alunos diante dessas atividades.

| | |
|---------------------------------------|-----------|
| Total de alunos nas turmas 9º B e 9ºC | 61 alunos |
| Total de alunos pesquisados | 48 alunos |

Tabela representativa de acertos e erros.

| Questões | Total de acerto | Total de erro | Não realizou a atividade |
|----------|-----------------|---------------|--------------------------|
| 3 | 2 | 37 | 4 |
| 4 | 1 | 30 | 7 |
| 5 | Zero | 28 | 12 |
| 6 | 11 | 18 | 10 |
| 7 | 8 | 18 | 12 |

Observando esta tabela concluímos que é importante iniciarmos um processo de retomada dos conteúdos de operações com monômios, produtos notáveis e fatoração, pois acreditamos que assim a possibilidade de obtermos êxito em nossos questionamentos iniciais poderá ser ampliado.

O nosso desafio foi elaborar atividades visando preencher algumas lacunas de aprendizagem, identificadas pelo professor pesquisador, para serem exploradas em sala de aula.

No momento estamos terminando a aplicação dessas atividades e elaborando uma sequência didática para que em seguida possamos aplicá-la com os alunos de nossa pesquisa.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. 8º Ano. São Paulo: FTD, 2000

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. 9º Ano. São Paulo: FTD, 2000

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 8º Ano. São Paulo – Ática, 2009.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 9º Ano. São Paulo – Ática, 2009.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, Silvia D. A. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: Educ, 2010.

SILVA, Benedito Antônio da. Contrato didático. In: MACHADO, Silvia D. A. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: Educ, 2010.

RIBEIRO, Jackson da Silva. **Projeto radix: matemática**. 8º ano. São Paulo: Scipione, 2009.

RIBEIRO, Jackson da Silva. **Projeto radix: matemática**. 9º ano. São Paulo: Scipione, 2009.