Conjuntos Difusos: Pesquisa Qualitativa e Quantitativa na Educação Matemática

Péricles César de Araujo[1]
Sonia Barbosa Camargo Igliori[2]

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar os recursos utilizados nas metodologias de pesquisas em Educação Matemática, tendo como foco a pertinência da agregação de métodos quantitativos aos métodos considerados qualitativos. O campo da pesquisa em Educação Matemática é caracterizado por uma acentuada heterogeneidade, desta forma, faz sentido uma partição difusa deste universo, em que cada dado, informação ou indivíduo pode ser membro parcial de mais de um subconjunto desta área. Através da lógica dos conjuntos difusos e da análise empírica bayesiana, poderemos quantificar fenômenos ou problemas reais da Educação Matemática, problemas caracterizados por representações epistemológicas, histórico-epistemológicas e comportamentais. Este artigo tem como pressuposto a importância da utilização de métodos mistos computacionais em pesquisa, e por isso tomará por foco os recursos da abordagem estatística bayesiana de conjuntos difusos. Com esse propósito nos apoiaremos em princípios defendidos por alguns teóricos, como Bayes, Gillies, Kuhn, Lakatos e Popper.

Palavras - chave: Pesquisa em Educação Matemática, Agregação de Métodos Quantitativos aos Métodos Qualitativos, Conjuntos Difusos (*fuzzy)*, Método Estatístico Bayesiano.

Inicialmente destacamos que algumas áreas de conhecimento privilegiam o uso de metodologias quantitativas em suas pesquisas de conjuntos difusos, outras como aquelas ligadas às Ciências Humanas, como a Educação Matemática, por exemplo, têm ultimamente privilegiado o uso de metodologias qualitativas para analisar conjuntos de dados difusos. Conjuntos difusos são aqueles cujas fronteiras são tênues e quase imperceptíveis.

No âmbito da teoria de conjuntos difusos, temos o conceito de partição difusa, este conceito de partição permite relativizar a heterogeneidade individual, observadas em dados mistos, posicionar cada indivíduo em função de sua distância a uma estrutura de perfis e através de um mecanismo de compensação, isto é, uma maior pertença a um dos perfis

[1] Docente da Universidade Estadual de Feira de Santana e doutorando em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. E-mail: pericles@uefs.br.
[2] Docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. E-mail: sigliori@pucsp.br.

implica menor pertença aos outros. (CRESWELL, 2007). É fato, no entanto, que cada vez mais vem sendo discutida a necessidade do uso dos métodos mistos computacionais, possivelmente pelo avanço da complexidade dos conjuntos difusos a serem investigados e pela exigência do rigor nas pesquisas.

A investigação com vistas à elaboração de nossa tese de doutorado tem por pressuposto a importância da agregação de métodos quantitativos aos métodos considerados qualitativos na pesquisa em Educação Matemática, e tomará por foco os recursos da abordagem estatística bayesiana de conjuntos difusos. Quando entramos em contato com escritos de Andrew Gelman (2010) e a sua equação: Popper+Kuhn+Lakatos=Bayes, percebemos que começou a ser delineada uma base filosófica científica do nosso trabalho.

Chamamos de base filosófica científica o processo epistemológico de aproximação do discurso filosófico, numa tentativa de compreender a racionalidade da agregação de métodos quantitativos aos métodos qualitativos na Educação Matemática, em particular, a abordagem bayesiana. Isto é, estamos interessados não só no aspecto substantivo do modelo bayesiano como também no aspecto metodológico. Com esse propósito nos apoiaremos em princípios defendidos por alguns teóricos sobre o tema, como: Spagnolo, Bayes, Gillies, Kuhn, Lakatos e Popper.

Popper (2003) assegura que a observação é sempre seletiva, requer um objeto determinado, uma tarefa definida, um interesse, um ponto de vista, um problema. Afirma, também, que os objetos podem ser classificados, tornados semelhantes e dessemelhantes, relacionados de acordo com as necessidades e os interesses teóricos do problema a investigar, das conjecturas e antecipações, das teorias aceitas como pano de fundo, do seu quadro de referências e do seu horizonte de expectativas.

A tradição da atitude científica é necessariamente crítica porque quando se transmite suas teorias, também, se transmite a atitude crítica em relação a elas. A atitude livre de discussão das teorias tem como objetivo descobrir seus pontos fracos no sentido de aperfeiçoá-las, e esses pontos só podem ser encontrados nas consequências lógicas mais remotas que delas se possam derivar.

O método de ensaio e erro ou da conjectura e refutação é um procedimento racional da tarefa de testar as teorias. Outro autor que será referência em nosso trabalho é Spagnolo (2005), segundo o qual numa perspectiva semiótica a análise do conhecimento disciplinar permite a gestão de conteúdos em relação às dificuldades e equívocos de comunicação do referido conteúdo. Essa posição não é muito original no que diz respeito às Ciências Humanas, porém, representa uma verdadeira inovação para as disciplinas técnicas e científicas. Em qualquer caso, uma situação didática constitui um problema para o aluno resolver, como um problema tradicional (ou seja, no quadro científico ou matemático) ou uma estratégia para organizar melhor o conhecimento para se adaptar a uma situação.

A Figura I representa um esquema de pesquisa em Educação Matemática, apresentado por Spagnolo (2005, p. 5) e adaptado por Araújo e Igliori (2010), como um exemplo de agregação do Teste Wilcoxon, teste não-paramétrico, isto é, uma agregação de um aspecto quantitativo na Engenharia Didática, transformando-a dessa forma em método misto de pesquisa. Ou seja, a Figura ilustra um resumo dessas ideias:

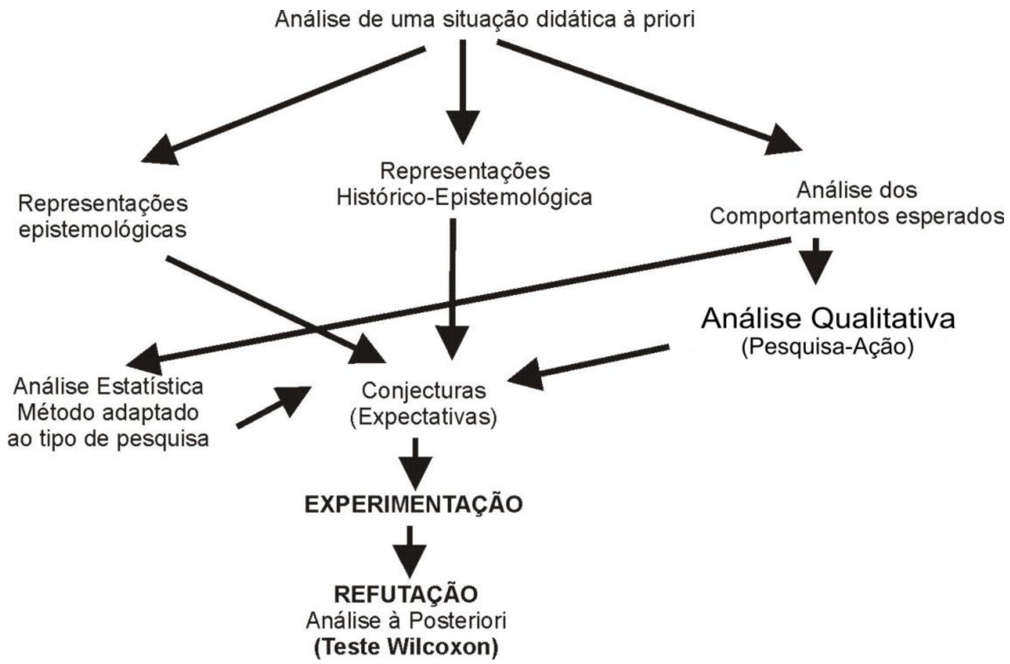


Figura I - Spagnolo (2005, p.5)

A agregação dos Métodos Estatísticos Bayesianos e a Lógica Difusa (*Fuzzy*) aos métodos qualitativos trazem à pesquisa em Educação Matemática possibilidade de transferência de experiências bem sucedidas em outras áreas. Não obstante, é necessária uma profunda reflexão teórica a fim de que o uso desses modelos possa resultar em benefício. É imprescindível um estudo amplo que considere as diversas abordagens estatísticas, para a obtenção de resultados confiáveis.

A Pesquisa em Didática coloca essa disciplina com um objetivo paradigmático em relação a outros paradigmas de pesquisa em Ciências da Educação, na qual são usados o paradigma da disciplina, objeto da análise e o paradigma das ciências experimentais. A Pesquisa em Didática pode ser considerada uma espécie de Epistemologia Experimental. A fundamental ferramenta é a análise *a priori* de uma situação didática, que significa a análise das representações epistemológicas, histórico-epistemológicas e das expectativas comportamentais. (SPAGNOLO, 2005, p. 2-3).

Segundo Spagnolo (2005), uma pesquisa didática nos leva a coletar informações elementares, que, em geral, revelam o comportamento de um aluno em uma situação. Dessa forma os dados estatísticos são constituídos por aluno, situação e comportamento, refere-se às diferenças do uso estatístico pelo professor e pelo pesquisador. Para ele o professor tem que tomar muitas decisões e de forma rápida de modo a poder corrigi-las caso as mesmas não sejam adequadas. Considera também que professor não pode esperar resultado do tratamento estatístico de todas as suas perguntas. O pesquisador, segundo Spagnolo, segue um processo inverso, pois deve procurar entender que hipóteses correspondem às questões que interessam; que dados devem ser coletados; quais os tratamentos devem ser utilizados e quais são as conclusões.

O que Popper (2003) propõe é que testemos nossas teorias para que possamos aprender com nossos erros e conhecer melhor os nossos objetos de estudo e considera, também, que nós como cientistas, não procuramos teorias altamente prováveis, mas sim explicações. Popper propôs, também, tratar o problema da indução em termos de probabilidade. Podemos considerar t como uma teoria, e como uma experiência e podemos propor uma probabilidade condicional $P(t,e)$ ou $P(t/e)$, a probabilidade de t dado e.

Temos assim, a idealização de um cálculo de probabilidade que determina a probabilidade de uma teoria t relativamente a uma prova empírica e. Então, o valor de $P(t,e)$ aumentará com a acumulação de provas corroborantes. Popper afirma que esta forma de tratar o problema como uma probabilidade condicional está errada porque há diferença, segundo ele, entre probabilidade e grau de corroboração, isto é, o grau de corroboração não satisfaz os axiomas do cálculo de probabilidades.

Para aplicar probabilidade no problema de indução, precisamos definir probabilidade, ou melhor, interpretar a probabilidade. As interpretações diferentes e significados de probabilidade têm grande importância na aplicação operacional no problema de indução e, desta maneira, Popper (2003 e 1993) sumariza as interpretações de probabilidade em dois conjuntos disjuntos: Teorias Objetivas e Teorias Subjetivas.

As Teorias Objetivas de Probabilidade são definidas como verdades correspondentes com os fatos, frequências relativas, propensão, inerentes à situação e estatisticamente testável. As Teorias Subjetivas estabelecem o grau de crença racional baseado em todo nosso conhecimento.

As aplicações operacionais das Teorias Objetivas estão associadas à Estatística Clássica, enquanto as Teorias Subjetivas têm aplicações operacionais nos Métodos Estatísticos Bayesianos. (PAULINO, 2003). A Estatística Clássica é caracterizada, no âmbito, das Ciências Sociais como um procedimento expresso por fórmulas matemáticas e dados observados, isto é, uma coleção de ferramentas misteriosas.

A análise estatística, presente nos manuais utilizados por profissionais das áreas humanas, fica limitada ao teste de hipóteses de Neyman por meio de tabelas de distribuição de probabilidades ou de algum programa estatístico que calcula o p-valor de Fischer, com um único objetivo de verificar se os dados confirmam ou não a uma particular hipótese teórica, previamente definida.

Métodos Estatísticos Bayesianos são fundamentados no Teorema de Bayes que revisa as estimativas de probabilidades iniciais. Segundo, Lakatos (1999, p. 99), o Método Bayesiano é revolucionário. As revisões de probabilidades iniciais, produzidas pelo Teorema de Bayes, seguem, implicitamente, os critérios metodológicos de revisão de Thomas Kuhn (1962). Portanto, os Métodos Estatísticos Bayesianos preservam aspectos de falseacionismo sofisticado ou metodológico, segundo Popper e Lakatos; e revisão de probabilidades, segundo Bayes e Kunh.

Os problemas encontrados, no âmbito das Ciências Humanas e em particular na Educação Matemática, são de natureza interdisciplinar, portanto, adequados aos Métodos Bayesianos, cada vez mais utilizados nas soluções de problemas com tais caracterizações, possibilitando, assim, responder à questão de relevância científica nas análises, como proposto por Popper, e não tornar a análise estatística somente uma coleção de ferramentas.

Por outro lado, de uma forma mais ampla à sumarização de Popper, Gillies afirma que há quatro principais correntes de interpretações de probabilidades que são as seguintes: Teoria Lógica, Teoria Subjetiva, Teoria Frequencial, Teoria da Propensão e Teoria Intersubjetiva. A Teoria Intersubjetiva, definida por Gillies, é uma interação social do grupo seguindo o ponto de vista de Kuhn (1962), isto é, um alto grau de consenso numa particular comunidade de pesquisadores que apresentam uma estimativa de probabilidade.

A Teoria Intersubjetiva, também, soluciona o problema da incomensurabilidade como está definido em Mendonça e Videira (2007), o conceito fundamental da teoria de Kuhn, por meio da estimativa da probabilidade intersubjetiva.

A Teoria Intersubjetiva e as outras interpretações apresentadas, para ter validade computacional, necessitam atender aos axiomas de Kolmogorov. Para tanto consideremos: S um espaço amostral, conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento, A e B eventos de S ou subconjuntos de S, e P(A) a probabilidade de ocorrer o evento A. Então valem: a) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A de S. b) $P(\varnothing) = 0$, onde Ø representa o evento impossível. c) $P(S) = 1$. d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para $A \cap B = \varnothing$. O Teorema de Bayes ou Regra de Bayes de probabilidade condicional do parâmetro da a informação dos dados, também, atende aos axiomas de Kolmogorov é definida por:

$$P(\theta|y) = \frac{P(\theta,y)}{P(y)} = \frac{P(y|\theta) \times P(\theta)}{P(y)}$$

Em que:

- $P(\theta)$ expressa a incerteza sobre θ *antes* de observarmos os dados **y** que dependem dele *a priori*.
- $P(\mathbf{y}|\theta)$ é a função de verossimilhança.
- $P(\theta|\mathbf{y})$ expressa a incerteza sobre θ *depois* de observarmos os dados **y** que dependem dele *a posteriori*.

A Teoria Frequencial de Probabilidade atende aos axiomas de Kolomogorov que, como já foi observado, esta teoria é o suporte da Estatística Clássica. No âmbito do pensamento popperiano a Estatística Clássica é vista como um método científico de testabilidade de conteúdo empírico. A

Estatística Clássica é usada para analisar dados não difusos ou rígidos. Na Educação Matemática os dados observados em pesquisas e as variáveis investigadas pertencem a conjuntos difusos, assim sendo, pressupomos que a Estatística Bayesiana que tem fundamentos na Teoria Subjetiva de Probabilidade e também atende aos axiomas de Kolomogorov, deve ser uma metodologia mais adequada para analisar tais conjuntos.

A Teoria dos Conjuntos difusos, ou *fuzzy*, é uma ramificação da teoria clássica dos conjuntos. Abar (2010) afirma que o conceito difuso, ou *fuzzy*, pode ser entendido como uma situação onde não podemos responder simplesmente "Sim" ou "Não". Mesmo conhecendo as informações necessárias sobre a situação, dizer algo entre "sim" e "não" como, por exemplo, "talvez", "quase", torna-se mais apropriado.

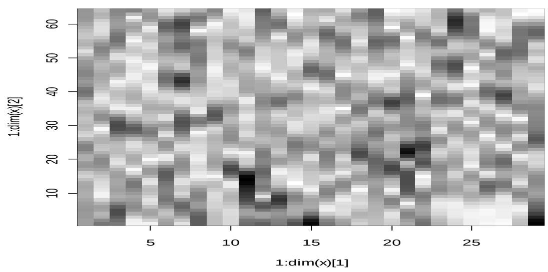
A natureza é indiferente aos esforços em modelar matematicamente seus processos e que é possível a um operador humano, manejar variáveis de entrada neste processo sem compreender a matemática envolvida. Desta forma, a Lógica Clássica que perpassa toda a Matemática é um obstáculo epistemológico, como está definido em Igliori (2008), para modelagem matemática da natureza.

No âmbito da Educação Matemática, Bassanezi (2004) define, a Modelagem Matemática como uma atitude de se pensar e fazer matemática por meio de um enfoque cognitivo, também, é um método científico que tem como objetivo melhorar o entendimento da realidade. Para viabilizar de forma mais eficiente uma modelagem matemática da natureza, necessitamos de uma perspectiva da complementaridade, definida por Bohr (1995), da Teoria dos Conjuntos difusos e da Lógica Clássica presente na Matemática.

Os conjuntos difusos são conjuntos cujos elementos têm graus de associativismo. Nos conjuntos não difusos a relação de pertinência de elementos a um conjunto é binária, isto é, o elemento pertence ou não ao conjunto, enquanto que na teoria de conjuntos difusos há uma avaliação gradual da pertinência do elemento ao conjunto.

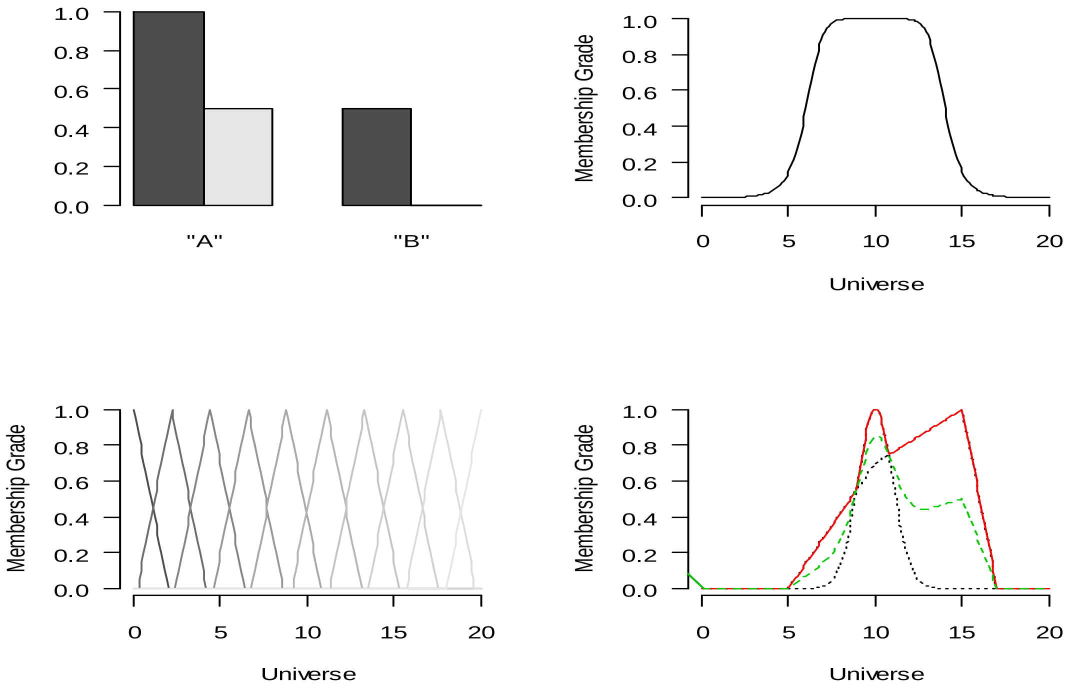
A Lógica de Conjunto Difuso, ou simplesmente Lógica Difusa, tem como objetivo representar o pensamento humano, ou seja, uma representação mais aproximada, ou melhor, ligar a linguística e a inteligência humana, porque muitos conceitos são melhores definidos por palavras ou como Zadeh (1995) definiu, variáveis linguísticas.

A titulo de ilustração, apresentamos a seguir um exemplo de conjunto difuso gerado no ambiente do programa R, VERZANI (2010):



Esse exemplo apresenta uma caracteristica fundamental dos conjuntos difusos que é a não definição clara do limite do conjunto, ou de outra maneira, um conjunto difuso apresenta limites incertos.

Sejam X um espaço de pontos (objetos) e x um elemento genérico de X. Então X = $\{x\}$. Um conjunto difuso (*fuzzy*) A em X é um conjunto caracterizado por uma função de associatividade μ_A que associa a cada ponto x em X um número real μ_A (x) pertencente ao intervalo [0,1]. O valor de μ_A (x) é o "grau de associatividade" de x em A. Esse grau de associatividade μ_A.(x) é tal que: μ_A.(x) = 1 se x $\in$A, μ_A (x) = 0 se x$\notin$ A, e se 0< μ_A (x) < 1, diz-se que x pertence não totalmente ao conjunto. Quanto mais próximo de 1 for o valor de μ_A (x) maior será o grau de associativismo de x com A. (ZADEH, 1965, p.339). Apresentamos abaixo alguns exemplos de funções de associativismo geradas no programa R.



A partir dessa noção Zadeh vai estender o conceito de probabilidade para um evento difuso (*fuzzy*). Ele diz que nas experiências do dia a dia com frequência encontram-se situações para as quais um "evento" é antes difuso do que um conjunto de pontos bem delimitados. E exemplifica com os eventos em que há imprecisão nos significados das palavras e, portanto, difusos: "É um dia quente" "x é aproximadamente igual a 5", "em vinte jogadas de uma moeda há mais caras que coroas" (ZADEH, 1968, p.421).

Para Zadeh a extensão dos conceitos de evento e probabilidade para os conjuntos difusos alarga o campo de aplicações da teoria das probabilidades. Para definir probabilidade de eventos difusos Zadeh vai considerar, por simplicidade, o espaço amostral Ω como um subespaço do espaço Euclidiano R^n.

Assim sendo, o espaço de probabilidades é definido como a terna (R^n, Σ, P) onde Σ é uma σ- álgebra de Borel em R^n, e P uma medida de probabilidade sobre R^n. Indicando-se um ponto de R^n por x, A um elemento de Σ, e observando que μ_A a função característica de A ($\mu_A(x) = 0$ ou 1), isto é, x é plenamente incluído ou membro rígido de um conjunto difuso. A função característica é generalizada por meio do conceito de conjuntos difusos. Como Zadeh (168, p. 422) determinou, o conjunto A em R^n é definido por uma função característica $\mu_A : R^n \to [0, 1]$ a qual associa para cada x em R^n seu “grau de pertinência” de μ_A, em A. Então, a probabilidade de A pode ser expressa como:

$$P(A) = \int_A dP$$

Ou equivalentemente para um evento difuso de A

$$P(A) = \int_{R^n} \mu_A(x) dP = E(\mu_A)$$

Sendo $E(\mu_A)$ a esperança de μ_A.

A compexidade, a incerteza e a imprecisão podem estar presente no mesmo problema de pesquisa em Educação Matemática, para Zadeh(1995), a solução desse problema é usar a probabilidade em conjunto com a lógica difusa de forma complementar, porque a teoria da probabilidade, por si só não é suficiente para lidar com a complexidade, a incerteza e a imprecisão da pesquisa em Educação Matemática, para melhorar sua eficácia, a teoria da probabilidade precisa de uma infusão de conceitos e técnicas provenientes da lógica difusa (*fuzzy)*, principalente da complexidade do conceito de variável linguística.

A complementaridade, como está definida em Bohr (1995), que a natureza humana é dotada de duas imagens, assim como a onda e a partícula são consideradas como aspectos complementares da matéria, isto é, a complementaridade, como interpretada por Otte (2003) no âmbito da Educação Matemática, a complementaridade faz referência a símbolos e conceitos, em um duplo sentido, que se reajustam reciprocamente e que se integram para capturar os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico do conhecimento científico e conceitos matemáticos.

E ainda levamos em conta o princípio da incerteza de Heisenberg, encontramos em Moraes e Torre (2004) a seguinte afirmação:

> Associando o princípio da incerteza às descobertas relacionadas ao princípio da complementaridade onda/partícula formulado por Niels Bohr, que explicou a natureza complementar da matéria e a existência de superposição de estados quânticos, a física quântica reforçou ainda mais a impossibilidade de se determinar como uma situação experimental se apresentará até o momento da interferência do observador. Descobriu-se que o cientista já não podia distanciar-se do objeto para descrever os mecanismos da natureza e que não era possível se eliminar o observador, mas sim reintegrá-lo em sua intersubjetividade e restabelecer o seu diálogo com a natureza. (MORAES e TORRE, p. 27, 2004)

A perspectiva da complementaridade está presente, também, na combinação linear da função de probabilidade com a respectiva intensidade de pertinência, desta maneira podemos fazer uma modelagem matemática da natureza com mais eficiência.

O universo de pesquisa em Educação Matemática é caracterizado por uma acentuada heterogeneidade, desta forma, faz sentido uma partição difusa deste universo, em que cada dado, informação ou indivíduo pode ser membro parcial de mais de um subconjunto deste universo. (SULEMAN, 2009). Observamos, também, que a função associativismo assume valores no intervalo [0;1], grau de pertinência, não é uma probabilidade, representa sim, uma medida matemática da proporção da intensidade de pertinência.

Por outro lado, a probabilidade de pertinência é diferente da função associativismo, porque mede o grau de incerteza de tal pertinência. Como afirma Ragin (2000) a idéia básica por trás da lógica *fuzzy* é a de permitir o dimensionamento dos escores de adesão e isto permite parcial ou difusa adesão.

Um escore de adesão de 1 indica a plena adesão de um conjunto; pontuação próxima de 1 (por exemplo, 0,8 ou 0,9) indicam a associação forte, mas parcial em um conjunto; pontuação inferior a 0,5 mas superior a 0 (por exemplo, 0,2 e 0,3) indicam que os objetos são mais "fora" do que "em" um conjunto, mas ainda membros mais fracos do conjunto; uma pontuação de 0 indica uma não associação ao conjunto. Assim, a lógica *fuzzy* combinam qualitativa e avaliação quantitativa: 1 e 0 são atribuições qualitativa ("plenamente"e "totalmente fora", respectivamente); valores entre 0 e 1 (não inclusivo) indicam grau de adesão.

Portanto, a lógica dos conjuntos difusos e da análise empírica bayesiana podem agregar aspectos quantitativos aos métodos qualitativos que são utilizados na pesquisa dos fenômenos ou problemas reais da Educação Matemática, problemas caracterizados por representações epistemológicas, histórico-epistemológica e comportamentais. Por conseguinte, o Método Estatístico Bayesiano é uma boa prática estatística que tem interseção com as idéias de Popper, Kuhn e Lakatos.

Referências Bibliográficas

ABAR, Celina. **O conceito Fuzzy.** Disponível em: http://www.pucsp.br/~logica/Fuzzy.htm. Acesso em 22/10/2010.

ARAÚJO, P. C.; IGLIORI, S. B. C. **Engenharia Didática como uma Estatística Não-Paramétrica.** Caderno de Física da UEFS. 2010 (Artigo aceito para publicação.)

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 2ª ed., São Paulo-SP: Contexto, 2004.

BOHR, Niels. **Física atômica e conhecimento humano: ensaios 1932-1957.** Rio de Janeiro, Contraponto Editora LTDA, 1995.

CRESWELL, J. W. **Projetos de pesquisa. Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Artmed Editora. SA. Porto Alegre. RS. 2007.

GELMAN, Andrew**. La philosophie et l'experience de la statistique bayesienne.** (Presented at the Paris Diderot Philmath seminar, Paris, 2010). Disponível em: http://www.stat.columbia.edu/~gelman/presentations/philosophytalk.pdf. Acesso em 22/10/2010.

GILLIES, D. **Philosophical Theories of Probability.** New York, Routledge, 2009.

IGLIORI, S. B. C. **A noção de ‘‘obstáculo epistemológico’’ e a educação matemática.** Educação matemática, Uma(nova) introdução, pp. 113-142, São Paulo, Editora PUC-SP, 2008.

KUHN, T. S. **The Structure of Scientific Revolutions**. University of Chicago Press, Chicago, 1962.

LAKATOS, I. **The methodology of scientific research programmes.** Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press, Paperback edition, Cambridge, 1999.

MENDONÇA, A. L. O. e VIDEIRA, A. A. P. **Progresso Científico e incomensurabilidade em Thomas Kuhn.** Scientiæ Zudia, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 169-83, 2007.

MORAES, M. C.; TORRE, S. **Sentipensar: Fundamentos e estratégias para reencantar a educação.** Editora Vozes, Petrópolis, RJ, 2004.

OTTE, M. **Complementarity, Set and Numbres. Educational Studies in Mathematics**. 53: 203-228, Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 2003.

PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**, F. Calouste Gulbenkian, 2003.

POPPER, K. **A Lógica da Pesquisa Científica**, editora Cultrix, São Paulo-SP, 1993.

__________. **Conjecturas e Refutações.** Tradução de Benedita Bettencourt. Coimbra: Livraria Almedina, 2003.

RAGIN, C. C. **Fuzzy-set social science**. Chicago: University of Chicago Press, 2000.

SPAGNOLO, F**. L'Analisi Statistica Implicativa: uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche.** Troisième Rencontre Internazionale A. S. I. (Analyse Statistique Implicative), Octobre, Palermo, Itália, 2005.

SULEMAN, A**. Abordagem Estatística de Conjuntos Difusos.** Edições Sílabo, Lisboa, 2009.

VERZANI, John. **Simple R.** contributed em www.r-project.org, acesso em 15/09/2010.

ZADEH, L. A. **Fuzzy sets**. Inf Control, 8:338-53, 1965.

____________. Probability measures and fuzzy events. J. Math. Anal Appl, 23:421-7, 1968.

____________. **Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic Are Complementary Rather Than Competitive**. Technometrics, 37, 271–276, 1995.