UMA INTERPRETAÇÃO COMBINATORIAL PARA O ENSINO DO BINÔMIO DE NEWTON NA PERSPECTIVA DE UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A COMBINATORIAL INTERPRETATION FOR THE TEACHING OF NEWTON´S BINOMIAL FROM THE PERSPECTIVE OF A MEANINGFUL LEARNING

ANNY GABRIELLY GOMES DA SILVA
MARIA APARECIDA DA SILVA RUFINO
JOSÉ ROBERTO DA SILVA

RESUMO
A Combinatória é fundamental para a contagem de subconjuntos de conjuntos finitos, visto que analisa determinadas particularidades para agrupar seus elementos. Entretanto, embora detenha muita relevância, os objetos do campo em pauta têm sido ensinados de forma mecanizada, através da memorização. Posto isso, o presente artigo considerou a abordagem do Binômio de Newton durante o Ensino Médio e suas contribuições no estudo de outros temas da Combinatória e dos demais campos da Matemática. Nessa perspectiva, esse trabalho visa propor uma forma de elaborar uma sequência didática mediante um material potencialmente significativo para uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Para tanto, em termos metodológicos, este estudo é classificado como uma análise teórica de abordagem qualitativa. Assim, almeja-se resgatar os conhecimentos prévios em conteúdos ensinados anteriormente e utilizar os processos cognitivos ausubelianos da diferenciação progressiva e reconciliação integradora no ensino do Binômio de Newton.
Palavras-chave: Binômio de Newton; Combinatória; Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT
Combinatorics is fundamental for counting subsets of finite sets, as it analyzes certain particularities to group their elements. However, although it’s very relevant, the objects in the field in question have been taught in a mechanized way, through memorization. Having said that, this article considered the approach of Newton's Binomial during High School and its contributions to the study of other themes in Combinatorics and other fields of Mathematics. From this perspective, this work aims to propose a way of developing a didactic sequence using potentially meaningful material for a 2nd year high school class. Therefore, in methodological terms, this study is classified as a theoretical analysis with a qualitative approach. Thus, the aim is to recover prior knowledge in previously taught content and use the Ausubelian cognitive processes of progressive differentiation and integrative reconciliation in teaching Newton's Binomial.
Key-words: Newton's binomial; Combinatorial; Meaningful Learning.

1. INTRODUÇÃO

É imprescindível, durante o processo de ensino, a abordagem dos conteúdos de forma que permita ao aluno potencializar seu significado. A escola contemporânea, apesar de muito se falar em construtivismo, cognitivismo, humanismo e outras filosofias importantes para esse processo, ainda não cumpre isso na prática, pois segue favorecendo mais a memorização ao invés do significado dos conteúdos.

Sobre esse ponto de vista, Masini e Moreira (2017), assinalam que o ensino que predomina na escola contemporânea é o “ensino para testagem” (teaching for testing), cujo foco é treinar os alunos para darem respostas corretas em avaliações externas, uma vez que as “melhores escolas” são as que mais alunos aprovam nessas provas. No ensino de matemática, a ausência de um aporte teórico de aprendizagem, que defenda e fundamente ações que favoreçam a aquisição de significados, estruturando o fazer docente dos professores, pode deixar déficits na aprendizagem.

Ademais, pouco tem sido exploradas as relações entre os seus conteúdos, mesmo quando esses estão dentro de um mesmo campo de conhecimento. No entanto, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), por exemplo, preconiza o desenvolvimento de competências de forma a que se deve compreender as relações entre conceitos e procedimentos entre os campos da Matemática e de outras áreas de conhecimento. Isso fará com que os campos e seus objetos não sejam vistos isolados, favorecendo a construção de novos significados.

De forma particular, na Combinatória, apesar de existirem estreitas relações com os objetos da probabilidade, tais conteúdos não são ensinados de forma articulada. Conforme Borba (2017), a compreensão e o levantamento do espaço amostral de dada situação, possibilita a resolução de problemas probabilísticos por meio do raciocínio combinatório.

No caso do Binômio de Newton, objeto matemático de interesse desse estudo, Santos (2019) menciona que pouco se trata sobre suas diversas contribuições em outros objetos. Ademais, Silva (2013) esclarece a necessidade de haver o conhecimento prévio da Combinatória para estudar-se o desenvolvimento binomial, uma vez que seus coeficientes são obtidos pela fórmula que fornece o número de combinações de n objetos tomados p a p. Isso evitaria a memorização do habitual passo a passo da fórmula.

Mediante esse contexto, o presente estudo apresenta a seguinte questão-foco: De que maneira é possível elaborar uma sequência didática estruturada em pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), que explore uma interpretação combinatorial para o Binômio de Newton?

Como objetivo geral, pretende-se elaborar uma proposta didática com características de um material potencialmente significativo sobre o desenvolvimento do Binômio de Newton para turmas de 2º ano do Ensino Médio. Mais especificamente, nessa pesquisa, almeja-se interpretar o Binômio de Newton segundo o campo da Combinatória, apresentando suas relações do ponto de vista da contagem, bem como explorar os processos cognitivos ausubelianos da diferenciação progressiva e a reconciliação integradora como princípios programáticos do material de ensino no formato de uma proposta didática.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA (TAS)

De uma forma geral, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel defende que durante o processo de ensino se faz necessário acionar ideias já conhecidas por quem aprende, as quais detenham relevância para a aquisição da nova informação. Assim, Ausubel define aprendizagem significativa como sendo um processo onde uma nova informação se relaciona de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo, denominado como “subsunçor” (Moreira, 2006).

De outra parte, Moreira (2011) destaca a dinamicidade da estrutura cognitiva, principalmente por conta da ocorrência dos processos da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora. Na diferenciação progressiva, há atribuição progressiva de novos significados a um dado subsunçor, tendo em vista que este diferencia-se e adquire novos significados no decorrer de sucessivas interações. Simultaneamente, acontece a reconciliação integradora, a qual "consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações".

Ausubel (2002) pontua que existem condições indispensáveis para ocorrer a aprendizagem significativa: o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender.

Outro conceito importante da TAS são os organizadores prévios, que devem ser utilizados na ausência dos subsunçores necessários. Segundo Moreira (2011), estes são materiais introdutórios formados de acordo com os conhecimentos que os alunos possuem com o intuito de servir como ponte cognitiva inicial entre estes conhecimentos e os necessários para que o material seja potencialmente significativo.

Sobre a aprendizagem mecânica, Ausubel aponta que ela está ligada a associação dos conteúdos sem interação com ideias já conhecidas. Embora seja natural o esquecimento das informações quando não são frequentemente acionadas, Moreira (2011) destaca que o mesmo é total na aprendizagem mecânica, enquanto ainda permanecem resíduos na aprendizagem significativa. Posto os pontos supracitados, infere-se que há inúmeras razões pelas quais se deve investir na aprendizagem significativa no processo de ensino.

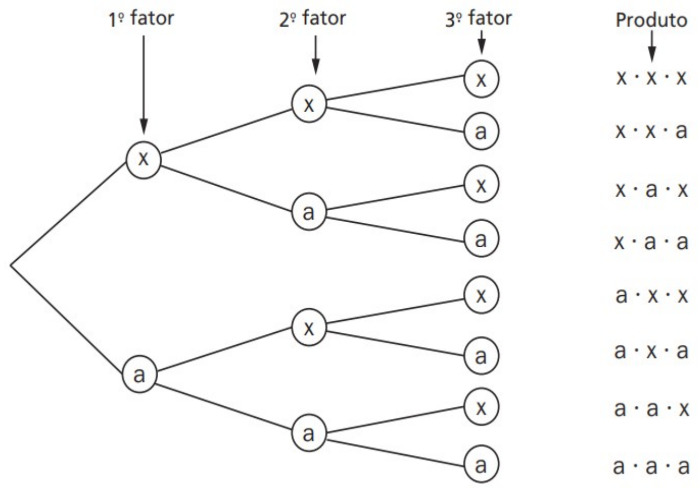
2.2 BINÔMIO DE NEWTON

Chama-se binômio a qualquer expressão formada pela soma de dois termos distintos. Se estivermos interessados no cálculo dos coeficientes das expansões de potências, cujos bases são binômios iguais, ou seja, de $(x+a)^n$ com $n \in N$ e $x, a \in R$, conhecidas como Binômios de Newton, isso pode ser obtido por meio da propriedade distributiva, uma vez que $(x+a)^n=(x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+a)$, N vezes para todo n inteiro positivo.

Por outro lado, a aplicação dessa propriedade pode ser entendida mediante o Princípio Fundamental da Contagem, considerando a ideia de que "se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy" (MORGADO *et al*., 2006, p. 18).

Nessa direção, Hazzan (2013) explica que para resolver um binômio se faz necessário selecionar um termo de cada fator $(x+a)$ e multiplica-los entre si, assim como no Princípio Fundamental da Contagem, até esgotar todas as seleções possíveis de um termo de cada fator. Feito isso, somar os termos obtidos, reduzindo aqueles que são semelhantes, conforme ilustra-se no diagrama de árvore para o produto de $(x+a)^3$, na Figura 01.

Figura 01 – Diagrama 1 das possíveis escolhas de termos para $n=3$



Fonte: Hazzan (2013, p. 59)

Nota-se a composição de oito termos, $x^3+x^2a+x^2a+xa^2+xa^2+x^2a+xa^2+a^3$, que por apresentarem semelhanças podem ser reduzir a expressão: $x^3+3x^2a+3a^2x+a^3$.

Utilizando-se do mesmo processo, Santos, Mello e Murari (2007), tomam um produto de três binômios de fatores distintos: $(a+b)\cdot(c+d)\cdot(e+f)=ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf$. De forma análoga ao produto anterior, observa-se a composição também de oito termos distintos, com três letras, cada uma tomada de um dos binômios.

Mediante o Princípio Multiplicativo, é possível concluir que para compor cada termo tem-se sempre três decisões a tomar, cada uma com duas possibilidades: tomar uma letra ou outra em cada binômio, $\underbrace{(a+b)}_{2}\underbrace{(c+d)}_{2}\underbrace{(e+f)}_{2}$. Dessa maneira, pode-se sempre calcular o número total de termos desse produto, $2.2.2=2^3=8$termos.

Como Santos, Mello e Murari (2007) esclarecem, se a letra $x$for escolhida nos 4 primeiros fatores e a for nos outros 2, o produto seráx^4a^2. Entretanto, esse termo vai aparecer toda vez que forem escolhidas 4 letras a e 2 letras a independente da ordem dessa seleção e isto pode ser feito de C_2^4 maneiras distintas. Portanto, x^4a^2 é igual a C_2^4. Assim, como todos os termos consistem no produto de 6 letras escolhidas, então pode-se considerar $x^j a^i$, cujo $i+j=6$ como termo geral, onde cada termo é da forma $x^i a^{6-i}$. Logo, como o termo aparece C_6^n vezes, a expansão supracitada é dada por: $(x+a)^6=\sum_{i=0}^{6} C_6^n x^i a^{6-1}$

$$\Rightarrow (x+a)^6 = C_6^0 x^0 a^6 + C_6^1 x^1 a^5 + C_6^2 x^2 a^4 + C_6^3 x^3 a^3 + C_6^4 x^4 a^2 + C_6^5 x^5 a^1 + C_6^6 x^6 a^0$$

$$\Rightarrow (x+a)^6 = a^6 + 6xa^5 + 15x^2a^4 + 20x^3a^3 + 15x^4a^2 + 6x^5a + x^6$$

METODOLOGIA

A caracterização metodológica desse trabalho remete a um estudo de análise teórica, nos termos elencados por Tachizawa e Mendes (2012), no nível de uma análise crítica ou comparativa de um modelo já existente, estudado a partir de um esquema conceitual definido. Baffi (2002) destaca a importância nas pesquisas de caráter teórico, pois embora não intervenha imediatamente na realidade, pode criar condições para uma futura intervenção.

A proposta a ser apresentada, enquadra-se no formato de uma sequência didática que, segundo Barderas (2000), trata-se de um recurso que permite ao professor intervir em sala de aula através de métodos didáticos e perceber suas reflexões na aprendizagem dos alunos.

Nessa direção, a sequência será dividida em quatro etapas. A primeira dá conta de uma atividade diagnóstica com o intuito de fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes para reconhecer os possíveis subsunçores sobre o objeto matemático que se deseja ensinar através de um questionário. As perguntas contidas nele devem abordar os conceitos gerais da combinatória, o Binômio de Newton e as suas relações.

O segundo passo é analisar e reparar as defasagens percebidas na diagnose através da revisão com enfoque nas mais frequentes. Posto isso, essa etapa se divide em dois momentos. No primeiro, os conceitos abordados no questionário devem ser explorados com para que se relacione o que havia sido perguntado com as ideias apresentadas em seu decorrer.

Nesse momento, será utilizado um Organizador Prévio comparativo que, conforme Moreira (2006), auxilia na integração ideias de conceitos de um assunto relativamente familiar. Vale considerar ainda os processos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora, os quais Moreira (2011) considera necessários à construção cognitiva. Em seguida, o segundo momento é reservado para a prática dos conceitos abordados, por meio da resolução de uma lista de exercícios.

Também composta por dois momentos, a terceira etapa enfocará o ensino do Binômio de Newton, em uma interpretação combinatorial, onde os assuntos debatidos anteriormente e os conhecimentos prévios dos discentes serão utilizados para o entendimento do objeto matemático em foco. Para tanto, cabe revisitar Produtos Notáveis, propriedade distributiva da multiplicação, conceito algébrico de Binômio e Princípio Fundamental da Contagem.

No primeiro momento, o Binômio de Newton será introduzido, por meio da visualização e contagem das possibilidades no diagrama de árvore. Os alunos devem agrupar suas decisões e reduzir a soma de termos encontrada ao máximo. A partir disso, no segundo momento, os conceitos envolvidos devem ser formalizados e seus exemplos, discutidos em conjunto.

A quarta e última etapa consiste em uma atividade avaliativa em forma de questionário sobre o Binômio de Newton, composta por questões semelhantes às da diagnose. Através dela, será possível verificar o que foi aprendido de forma significativa no decorrer das aulas e observar dificuldades que ainda podem persistir.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho visou apresentar uma proposta que possibilite uma aprendizagem significativa do Binômo de Newton na perspectiva da Combinatória. Desse modo, a fim de cumprir com seus objetivos, explorou as ideias que constituem esse tema e se apoiou nos conhecimentos prévios que os alunos devem ter segundo os documentos oficiais de educação.

A partir da revisão da literatura, observou-se que no ensino do Binômio de Newton, assim como nos objetos do campo da Combinatória, ainda se utiliza muito da automatização ao invés dos significados que o sustentam. Além disso, embora os documentos oficiais ressaltem a importância de se relacionar os objetos e campos matemáticos, nem sempre se tem cumprido isso nas práticas de ensino.

Em decorrência disso, percebeu-se que o entendimento dos alunos tende a ficar limitado a passos realizados mecanicamente em exercícios, por meio da substituição de componentes em fórmulas preestabelecidas. Ademais, as ligações existentes e contribuições dos objetos passam despercebidas em seu cognitivo. Portanto, considera-se que esse estudo expõe uma alternativa que deve auxiliar professores a compreender e ensinar o Binômio de Newton de forma significativa, por meio da perspectiva do campo da combinatória.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção do conhecimento: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Paralelo Editora, 2002.

BARDERAS. S. V. **Didáctica de La Matemática: El libro de los recursos**. Colección Aula Abierta. Madrid: Editorial La Muralla S.A., 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf> Acesso em 08 ago. 2022.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MORGADO, A. C. O. *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** 4.ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

TACHIZAWA, T.; MENDES, G. **Como Fazer Monografia na Prática**. 12. ed. Rio de Janeiro: Editora FDV, 2012.