DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITAGORAS NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Marconi Coelho dos SANTOS[1] Fernando Luiz Tavares da SILVA[1] Abigail Fregni LINS[1]

[1] Departamento de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, Campus I, Campina Grande-PB. E-mail: marconicoelho@hotmail.com. Telefone: (83)3362 2256.

RESUMO

O presente artigo é resultado de um estudo bibliográfico e de uma pesquisa realizada através de um questionário aplicado com professores do Ensino Fundamental de escolas públicas e particulares na cidade de Areia, Paraíba, sobre Pitágoras, seu Teorema, e as várias maneiras de demonstrações do seu Teorema. Inicialmente é apresentado um breve histórico sobre a vida de Pitágoras e de seu Teorema. Para isto foi utilizada referências de vários autores que escrevem sobre História da Matemática. Através do questionário observamos que o livro didático adotado pela maioria dos professores aborda o Teorema de Pitágoras, trazendo aspectos históricos, contextualização e demonstração sobre este Teorema. Porém, a metade destes professores conhece apenas a demonstração tradicional, encontrada nos livros didáticos a qual é baseada na semelhança de triângulo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pitagoras. Teorema. Demonstração.

1. Introdução

O Teorema de Pitágoras é considerado por vários estudiosos da Matemática como um dos mais importantes da História. Vários resultados importantes em Geometria Teórica, bem como na solução de problemas práticos relacionados à medidas foram descobertos através desse teorema, ou deles se utilizam. O fato é que o Teorema de Pitágoras é um dos mais famosos e úteis na Geometria Elementar e já foi demonstrado por várias civilizações no decorrer da História, tornando-se assim um excelente tema a ser aprofundado durante as aulas de Matemática no Ensino Fundamental (GASPAR, 2003).

Para uma melhor formalização ou uma melhor fixação do Teorema de Pitágoras em um contexto geral, seria interessante que o professor de Matemática trabalhasse com os alunos algumas demonstrações desse teorema. De acordo com Barbosa (1993), é de grande importância que o professor de Matemática tenha conhecimento de algumas das demosntrações, para que ele possa utilizar aquelas que são compatíveis com os seus e se possível fazer utilização das demonstrações que permitam a participação do aluno. Um referencial teórico que possibilita o professor ter acesso a um grande número de demonstrações do Teorema de Pitágoras é o livro do professor de Matemática Elisha Scott Loomis do Estado de Ohio, Estados Unidos, publicado em 1927. O livro reúne 230 demonstrações do teorema num livro. Em sua segunda edição, em 1940, ampliou esse número para 370 (BARBOSA, 1993).

2 Pitágoras – Breve Histórico

Pitágoras foi um matemático grego que teve sua história envolta em lendas fantasiosas e mitos uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida. Pitágoras viveu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, por volta de 572 a.C. Eves (2004) afirma que segundos relatos, Pitágoras fugiu para Metaponto onde morreu, talvez assassinado, com uma idade avançada entre setenta e cinco e oitenta anos. Já Barbosa (1993) cita que Pitágoras, se possivelmente existiu, foi exilado de Crotona, tendo morrido em Tarento. Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales devido à proximidade das regiões onde nasceram. Para Eves (2004), Pitágoras era 50 anos mais novo que Tales e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Segundo Boyer (2010), Pitágoras era um místico, um profeta e algumas semelhanças em seus interesses devem-se ao fato de que Pitágoras também viajou pelo Egito e Babilônia. Pitágoras foi praticamente um contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tse.

São várias as definições que os autores têm para Pitágoras. Para Boyer (2010), é difícil separar história e lenda no que se refere ao homem Pitágoras, pois ele era visto como um filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico e charlatão. Segundo Russell (apud Strathern, 1998, p. 8), Pitágoras era "intelectualmente, um dos homens mais importantes que já existiram, tanto quando era sábio, como quando não o era". Já Strathern (1998, p. 7) define Pitágoras como:

> O primeiro matemático, o primeiro filósofo e o primeiro a praticar a metempsicose. E isso, não por ter sido a primeira pessoa a usar números, a primeira a buscar uma explicação racional para o mundo ou a primeira a acreditar que numa vida anterior sua alma havia habitado uma planta, um faraó ou algo do gênero. Foi ele quem inventou, ou usou pela primeira vez as palavras; matemático, filósofo e metempsicose nos sentidos hoje aceitos e logo aplicou a si mesmo. Também inventou a palavra cosmos, que aplicava ao mundo. Em grego, Kosmo significa *ordem* e Pitágoras usou o termo para designar o mundo por causa de sua perfeita harmonia e ordenação.

Kahn (1993), diz que Pitágoras não é apenas o nome mais famoso na História da Filosofia, anterior a Sócrates e Platão. Ele é também uma das figuras mais fascinantes e misteriosas da antiguidade. Pitágoras foi celebrado nas tradições antigas como matemático e filósofo da Matemática e seu nome continua associado a um importante teorema da Geometria Plana. Mesmo com várias indagações, atribuições e questionamentos, Pitágoras é considerado o pai da Matemática. Suas contribuições para a História, principalmente o teorema que lhe é atribuído e considerado como uma medida de ouro, desperta o interesse de muitos estudiosos e matemáticos.

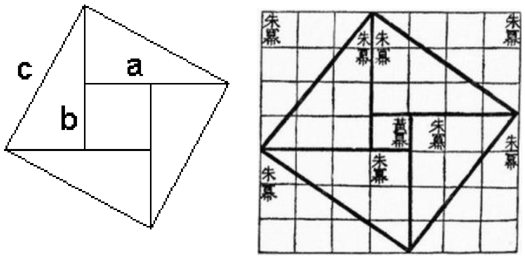
3. Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Na Matemática para verificar a veracidade de uma proposição se faz necessário uma prova que seja válida para todos os casos. Essa é uma particularidade da Matemática. Então, para que a proposição referente ao teorema de Pitágoras seja válida, se faz necessário que ela seja verdadeira para qualquer triângulo retângulo. Só assim teremos um teorema. Apresentamos algumas provas interessantes do Teorema de Pitágoras, obtidas por mentes matemáticas brilhantes, tais como Bhaskara, Euclides e Pólya; e também de matemáticos amadores, como o ex-presidente americano J. A. Garfield ou do entusiasta pelas Ciências H. Perigal.

3.1 Demonstração 1: de Bháskara

Segundo Barbosa (1993), Bháskara foi um matemático hindu que não ofereceu para a sua figura qualquer explicação além de uma palavra de significado *veja* ou *contemple*, talvez sugerindo que em seu diagrama a disposição induzia a uma bela prova do teorema de Pitágoras. Procedendo de modo análogo, a figura que aparece no Chou-pei[1], de forma geral, constrói o triângulo retângulo com hipotenusa *a* e catetos *b* e *c* (Figura 1):

Figura 1: Comparação da demonstração de Bhaskara com um das figuras que aparecem no Chou-pei



Fonte: (Lima et al., 2006)

No interior, ao centro, encontramos um quadrado de lado b – c. Temos por área que:

$a^2 = (b - c)^2 + 4\frac{bc}{2}$ ou $a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc$ ou ainda $a^2 = b^2 + c^2$

De acordo com a estratégia utilizada, esta demonstração pode ser do tipo geométrico ou do tipo algébrico, vai depender da estratégia utilizada. Acima utilizamos a demonstração algébrica.

3.2 Demonstração 2: Prova Experimental

Cortando-se em uma folha de cartolina (ou papel – cartão) as seguintes figuras:

- 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer (1)
- 1 quadrado de lado congruente a um dos catetos (2)
- 1 quadrado de lado congruente a outro cateto (3)
- 1 quadrado de lado congruente a hipotenusa (4)
- 2 quadrados de lado igual à soma dos catetos (5)

Como fase preliminar, verificamos por superposição com os alunos que os quatro triângulos são congruentes. Verificamos por justaposição (encostando) as medidas das figuras, observando quais são iguais.

---

[1] O Chou Pei Suan Ching é um dos mais antigos e famosos textos chineses sobre Matemática. A tradução literal do título é *O Clássico de Aritmética do Gnômon e das Trajetórias Circulares do Céu***.**

Como experimental, o provamos em três fases:

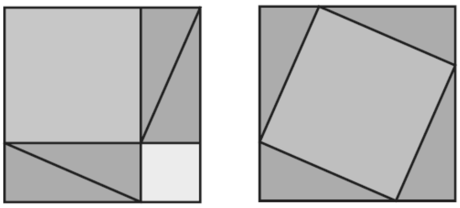
Fase 1: Por superposição cubra, portanto sem deixar espaços vazios, um dos quadrados (5) com os quadrados (2) e (3) e os triângulos (1), sem que haja remonte ou sobra (Figura 2);

Fase 2: Por superposição cubra outro quadrado (5) com o quadrado (4) e os triângulos (1), sem remonte ou sobra (Figura 2); e,

Fase 3: Analisando as figuras, podemos chegar a seguinte conclusão:

(área do quadrado 2) + (área do quadrado 3) = (área do quadrado 4) ou o padrão pitagórico: (soma das áreas dos quadrados dos catetos) = (área do quadrado da hipotenusa) Barbosa (1993, p. 5).

Figura 2: Prova experimental do Teorema de Pitágoras



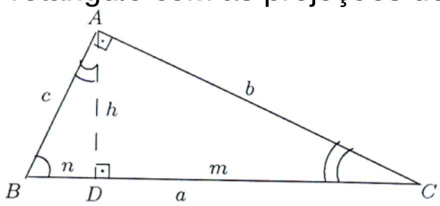
Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br

A prova 2 é do tipo geométrico e permite a participação do aluno na construção do material concreto como também na montagem do *quebra-cabeça*. A interação do aluno com este tipo de demonstração permite despertar o seu interesse e aguçar a sua criatividade, tornando-o um agente ativo na construção do seu conhecimento.

3.3 Demonstração 3: Tradicional

Segundo Barbosa (1993), nos cursos tradicionais de Geometria Plana, como nos livros sem preocupação educacional, a prova empregada é a prova por semelhança de triângulos. Para Lima (2006), esta é a prova mais curta e também a mais conhecida. No triângulo ABC, retângulo em A (Figura 3), a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD $=\hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, CÂD $=\hat{B}$, complemento de $\hat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

Figura 3: Triângulo retângulo com as projeções dos catetos e a altura



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Fonte: (Barbosa, 1993)

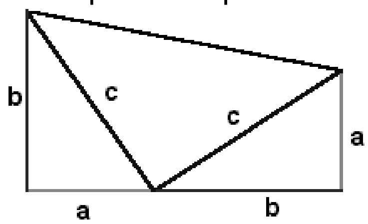
A expressão acima fornece $c^2 = an$ e $b^2 = am$, conhecidas como relações métricas de Euclides. Adicionando-as obtemos $b^2 + c^2 = am + na = a(m + n) = a \times a = a^2$ (BARBOSA, 1993). Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar outras relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$ e $h^2 = mn$.

3.4 Demonstração 4: do Presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos por apenas quatro meses (assassinado em 1981) era também General e gostava de Matemática. Ele deu uma prova do Teorema de Pitágoras (LIMA, 2006, p. 54):

> Analisando a Figura 4 temos um trapézio que foi decomposto em três triângulos retângulos de lados a, b e c, onde a área do trapézio com base a, b e altura a + b é igual à semisoma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual á soma das áreas de três triângulos retângulos. Portanto:
>
> $$\frac{a+b}{2}x(a+b) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2}$$
>
> Mas podemos obter também à área pela soma das áreas dos triângulos:
>
> $$T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$$
>
> Comparando-as e multiplicando por 2, temos: $a^2 = b^2 + c^2$:

Figura 4: Figura utilizada na prova do presidente James Abram Garfield



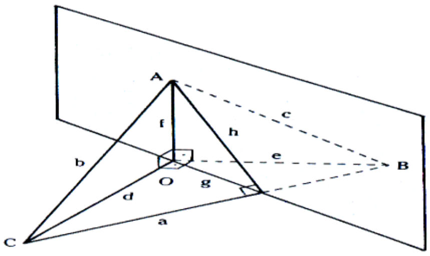
Fonte: (Lima, 1998)

O Presidente usou o conceito de comparação de áreas para provar o Teorema de Pitágoras, assim como outras demonstrações também se utilizam deste conceito, mas se diferem por trabalharem como figuras planas distintas.

3.5 Demonstração 5: de Polya

Lima (2006) diz que no seu entender a demonstração mais inteligente do Teorema de Pitágoras não está incluída entre as 370 colecionadas pelo Professor Loomis. Ela é encontrada no livro *Induction an Analogy in Mathematics*, de autoria do matemático húngaro George Polya: Seja o tetraedro OABC tri-retângulo em O (Figura 5). Portanto, com as faces OAB, BOC e COA triângulos retângulos. Seja D a área da face triangular ABC: $D = a\frac{h}{2}$ ou $4D^2 = a^2h^2$:

Figura 5: Figura que representa a demonstração de Polya



Fonte: (Barbosa, 1993)

Interceptamos o tetraedro com o plano contendo a altura e o vértice O. A interseção é um triângulo retângulo, sua hipotenusa mede h e os catetos f e g; então $h^2 = g^2 + f^2$. Portanto: $4D^2 = a^2g^2 + a^2f^2 = 4A^2 + a^2f^2$, onde A é a área da face BOC oposta ao vértice A do tetraedro. Mas $a^2 = d^2 + e^2$ no triângulo BOC; então temos:

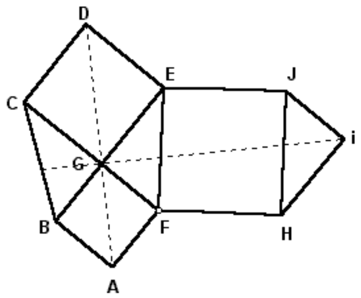
$$4D^2 = 4A^2 + (d^2 + e2)f^2 = 4A^2 + d^2f^2 + e^2f^2.$$

Porém B = df/2 e C = ef/2 são as áreas dos triângulos COA e AOB respectivamente opostos aos vértices B e C. Segue que $4D^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2$ ou $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$ (BARBOSA, 1993, p. 42).

3.6 Demonstração 6: de Leonardo Da Vinci

Leonardo da Vinci nasceu na Itália em 15 de abril de 1452, pintor e escultor italiano um dos grandes gênios da humanidade, criador do quadro Mona Lisa, também concebeu uma demonstração do teorema de Pitágoras, que se baseia na Figura 6:

Figura 6: Demonstração de Leonardo Da Vinci



Fonte: (Lima, 1998)

> Os quadriláteros ABCD, DEFA, GFHI e GEJI são congruentes. Logo, os hexágonos ABCDEF e GEJIHF têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado FEJH é a soma das áreas dos quadrados ABGF e CDEG (LIMA, 1998, p. 55).

Da Vinci se baseou no princípio de comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos (LIMA, 2006).

4. Breve Pesquisa com alguns Professores

Confeccionamos um questionário composto de oito questões sobre o Teorema de Pitágoras, baseado em nosso estudo bibliográfico:

Figura 7: Questionário aplicado aos Professores

QUESTIONÁRIO

PERCEPÇÃO DOS PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMNETAL SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DIVERSAS DEMONSTRAÇÕES.

Pesquisa coordenada por:
Profª Drª: Profa. Abigail Fregni Lins (Bibi Lins)
Mestrando: Marconi Coelho dos Santos

1. No livro didático que você utiliza como é feita a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras?

2. O livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação deste Teorema?

3. Existe alguma demonstração do Teorema de Pitágoras no livro utilizado? Quais?

4. Quantas demonstrações do Teorema de Pitágoras você conhece?

5. Qual das demonstrações que você conhece é trabalhada com seus alunos?

6. Qual recurso você utiliza, para trabalhar a (s) demonstração(ões) do Teorema de Pitágoras com seus alunos?
a) Material concreto
b) Quadro
c) Software computacional
7. Ao utiliza o teorema de Pitágoras você busca contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas?

8. Em sua opinião seu aluno é capaz de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo da Matemática?

Fonte: própria (2012)

O Questionário (BOGDAN e BIKLEN, 1994) foi aplicado a oito professores do Ensino Fundamental de escolas públicas e particulares na cidade de Areia, Paraíba, com objetivo diagnosticar o nível de conhecimentos deles sobre o Teorema de Pitágoras. Trazemos aqui algumas das respostas dos professores de forma literal e outras representadas por gráficos mostrando a incidência das respostas às perguntas específicas do Questionário.

5. Resultados

Quando questionados sobre a abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras no Livro Didático, as respostas dos professores foram diversificadas, observarmos:

Professor A: *Não é feita nenhuma abordagem em relação ao Teorema de Pitágoras, mesmo tendo um capítulo sobre Geometria (6º Ano).*

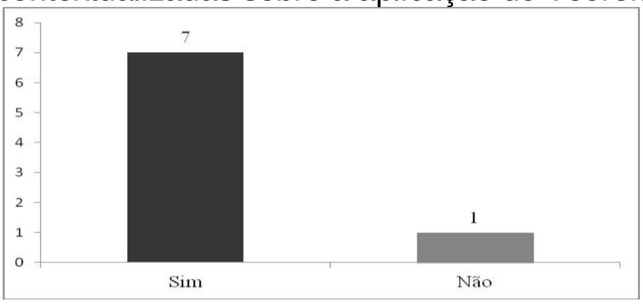
Professor B: *Ela é feita de forma superficial com pouca ênfase à sua estruturação, ou seja, não se dá muita importância à sua demonstração, utilidade ou coisas do gênero.*

Professor C: *Através do Triângulo Retângulo.*

Professor D: *É feita com pesquisa, histórias, questionamentos e imagens do dia a dia.*

Essa diferenciação entre as respostas dos professores provavelmente ocorreu pela adoção de Livros Didáticos distintos. De acordo com 87,5% dos professores (Figura 8), o Livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras:

Figura 8: Quantidade de professores que afirmam que o livro adotado traz aspectos históricos e questões contextualizadas sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras



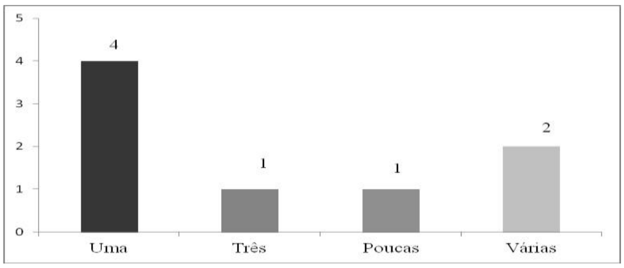
Fonte: própria (2012)

Apenas um professor relata que não existe demonstração do Teorema de Pitágoras no Livro Didático utilizado. Os demais confirmam a existência de alguma demonstração deste Teorema:

> Professor E: *Apenas aquela tradicional que já vem com o triangulo retângulo...*
>
> Professor F*: Sim. Uma demonstração baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.*

Observa-se na Figura 9 que 50% dos professores conhecem apenas uma demonstração do Teorema de Pitágoras, a tradicional que é baseada na semelhança de triângulos, comprovando assim a falta de conhecimento destes sobre este tema:

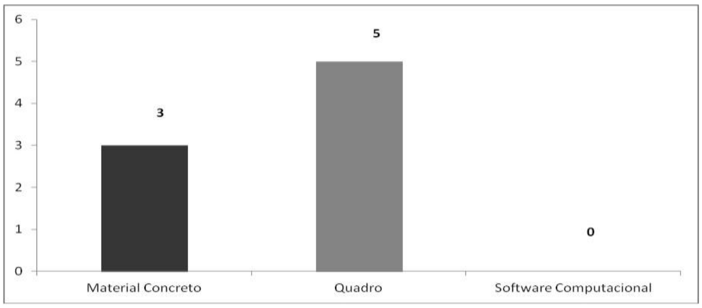
Figura 9: Quantidade de demonstrações do Teorema de Pitágoras que os professores conhecem



Fonte: própria (2012)

Constatou-se, de acordo com a Figura 10, que 62,5% dos professores usam apenas o quadro como recurso utilizado para trabalhar as demonstrações do Teorema de Pitágoras:

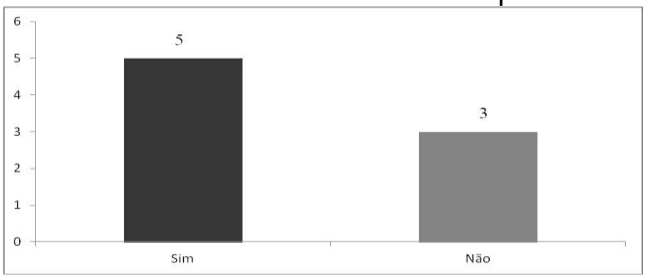
Figura 10: Recursos utilizados, pelos professores para trabalhar a(s) demonstrações do Teorema de Pitágoras com seus alunos:



Fonte: própria (2012)

Quando questionados sobre a contextualização e/ou o uso da interdisciplinaridade no conteúdo do Teorema de Pitágoras, a maioria dos professores afirmou que fazem uso destas durante suas aulas, conforme Figura 11:

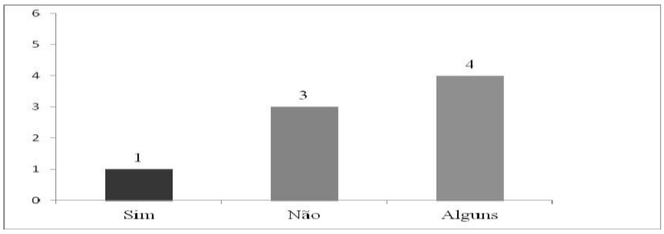
Figura 11: Quantidade de professores que ao utilizar o teorema de Pitágoras buscam contextualizar e/ou relacionar com outras disciplinas



Fonte: própria (2012)

Pode-se verificar, na Figura 12, que a metade dos professores afirma que apenas alguns alunos são capazes de enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo matemático e 37,5% relatam que nenhum alunos teria esta capacidade:

Figura 12: Opinião dos professores sobre a capacidade dos alunos em enxergar diferentes aplicações do Teorema de Pitágoras dentro e fora do conteúdo matemático



Fonte: própria (2012)

Diante do exposto pode-se observar que mais da metade dos professores questionados relatam que o livro didático adotado aborda o Teorema de Pitágoras, trazendo aspectos históricos, demonstração e contextualização sobre este Teorema. A metade dos professores conhece apenas uma das diversas demonstrações existentes sobre o Teorema de Pitágoras, a demosntração baseada em semelhanças de triângulos. Constatamos também o uso apenas do quadro como recurso utilizado para trabalhar a demonstração trazida pelo Livro e a incapacidade de alguns alunos enxergar diferentes aplicações sobre o Teorema de Pitágoras dentro e fora deste conteúdo, apesar dos professores afirmarem que abordam de forma contextualizaada e interdisciplinar o Teorema de Pitágoras.

6. Comentários Finais

Acreditamos que com a pesquisa bibliográfica obteve-se um rico aprendizado em relação à história de Pitágoras e seu Teorema, possibilitando a aquisição de conhecimento sobre algumas de suas demonstrações, permitindo assim a realização de uma nova abordagem em relação à forma de trabalhar didaticamente este conteúdo em sala de aula.

Pudemos perceber ao questionar alguns dos professores de Matemática, a falta de conhecimento destes sobre as diversas demonstrações existentes sobre o Teorema de Pitágoras.

Com isso, indicamos a estes professores a busca por referenciais teóricos sobre o tema em questão. Para isto sugerimos a leitura do material teórico utilizado para a realização deste trabalho.

Referências

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos.** São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BOGDAN, R.; e BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

CINTRA, C. de O.; CINTRA, R. J. de S. **O teorema de Pitágoras.** 1. ed. Recife: O Autor, 2003. 93p.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 843p.

GASPAR, Maria Terezinha Jesus. **Aspectos do desenvolvimento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.** Rio Claro (SP): UNESP, 2003. 307f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

KAHN, C. H. **Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história.** Tradução Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 1993. 233p.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256p.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, A. **Temas e Problemas Elementares.** 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 256p.

RUSSEL, B. apud STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.** Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998. 82p.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos.** Tradução Marcus Penchel.