

Modelagem matemática em Ciências Biológicas

Mathematical modeling in Biology Sciences

Eduarda Pereira de Pereira

Universidade Federal do Pampa
eduardapdp2.aluno@unipampa.edu.br

André Carlos Cruz Copetti

Universidade Federal do Pampa
andrecopetti@unipampa.edu.br

Cristhian Augusto Bugs

Universidade Federal do Pampa
cristhianbugs@unipampa.edu.br

Resumo

O ensino de matemática nos cursos de ciências biológicas é um grande desafio e a modelagem matemática é uma alternativa para mudar essa realidade. O presente trabalho tem como objetivo apresentar estudos de modelagem matemática utilizando variáveis biométricas de laranjas amostradas para a obtenção de modelos matemáticos. A modelagem matemática foi dividida em etapas para a obtenção de dados, formulação e validação dos modelos. Os modelos polinomiais obtidos a partir de algumas variáveis correlacionadas mostram que o estudo de funções pode explicar relações entre variáveis a partir de uma perspectiva biológica. Os resultados obtidos sugerem que é possível ensinar biologia a partir da matemática para aumentar o interesse dos estudantes.

Palavras chave: ensino de biologia, modelagem matemática, funções matemáticas.

Abstract

The teaching of mathematics in biological science courses is a great challenge and the mathematical modeling is an alternative to change this reality. This work aims to present mathematical modeling studies using biometric variables from sampled oranges to obtain mathematical models. The mathematical modeling was divided into steps for the data gathering, formulation and validation of the models. Polynomial models obtained from some correlated variables show that the study of functions can explain relations between variables from a biological perspective. The results obtained suggest that it is possible to teach biology from mathematics to increase student interest.

Key words: biology teaching, mathematical modeling, math functions.



Introdução

O ensino de matemática é sempre um desafio para qualquer educador, um enorme problema para qualquer aluno do ensino básico e uma barreira enorme para muitos alunos que ingressam no ensino superior. A abstração envolvendo os conceitos matemáticos é um dos fatores que ajuda a formar uma barreira para o ensino e a aprendizagem desta disciplina. Para mudar esta realidade nos últimos anos uma abordagem envolvendo o uso da modelagem matemática tem se destacado por produzir melhores resultados em sala de aula, a partir da modelagem é possível aproximar a matemática abstrata da realidade dos alunos juntamente com uma construção do conhecimento que tende a se aproximar de conceitos matemáticos (MUTTI, G.S.L., *et al.*, 2021, p. 129). Esta tendência de ensino já vem sendo discutida desde a década de 70 quando surgiram os primeiros trabalhos no Brasil, cada vez mais surgem novas tecnologias e materiais para continuar aperfeiçoando atividades de modelagem para promover uma melhora na educação.

A modelagem matemática tem sido também amplamente utilizada como forma de ensino e aprendizagem, além de ser uma ferramenta importante para ser utilizada no planejamento, otimização, controle e aperfeiçoamento de modos de produção e obtenção de resultados (YABIKU, *et al.*, 2020; USTRA, *et al.*, 2021, p.85098). Seguindo a tendência de coleta e análise de dados, os cursos superiores que envolvem as ciências biológicas também têm um enorme potencial para utilizar a modelagem matemática como estratégia de ensino, pesquisa e extensão. De Souza (2007) destaca a importância do uso de regressões para a modelagem de fenômenos biológicos que podem ser expressos por equações matemáticas para descrever a relação e dependência entre duas variáveis juntamente com informações de como validar os modelos obtidos utilizando técnicas matemáticas e estatísticas.

A área das ciências biológicas é uma das mais promissoras para o uso da modelagem matemática já que o estudo de animais e plantas a partir de uma perspectiva do uso de dados quantitativos sempre pode envolver um grande número de variáveis e equações. Plantas dependem de água, luz, nutrientes no solo, temperatura, pH do solo, entre outros, todas essas variáveis são fundamentais para explicar o crescimento, a produtividade e como ocorrem as relações com outras plantas da mesma espécie, de espécies diferentes e com animais em um ecossistema. Da mesma forma, o estudo de qualquer espécie animal também depende de várias variáveis olhando do ponto de vista quantitativo, inclusive algumas técnicas já são bastante exploradas para o estudo das relações e de formas, incluindo a alometria e a morfometria geométrica amplamente utilizadas para descrever as diferenças e as relações entre tamanho e forma de organismos (MITTEROCKERA, *et al.* 2013. p.59).

As etapas para a condução de uma Modelagem Matemática envolvem na etapa 1 a experimentação para a coleta dos dados; na etapa 2 temos a abstração para a formulação dos modelos matemáticos e finalmente na etapa 3 ocorre a validação dos modelos de acordo com os dados coletados e uma modificação quando na validação ocorreu a rejeição dos modelos (PEREIRA, *et al.* 2013. p.531). Nesta etapa 1 da modelagem, o uso de instrumentos para medir, pesar e calcular definitivamente pode envolver os alunos de uma forma ativa para garantir a construção do conhecimento pela exploração e pela formulação de hipóteses. Nesta etapa também é possível perceber que existe uma diferença muito grande entre a teoria e a prática já que existe a possibilidade de se comparar resultados observados e erros associados com os valores obtidos. Dessa forma, a coleta, a organização e a simplificação dos dados coletados, a formulação e a validação de modelos podem despertar a intuição dos alunos e fazer uma primeira conexão entre a matemática e a realidade.

Uma boa alternativa para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem é a coleta de dados biométricos de laranjas. O Brasil é o maior produtor de citros e referência em exportação de suco concentrado de laranjas e tem condições de gerar até 230 mil postos de trabalhos (KALAKI, *et.al.* 2017. p.338). A citricultura tem um grande potencial no agronegócio e também pode ter um importante papel para o ensino de matemática e biologia. A biomassa de cascas de frutas cítricas já foi usada com sucesso em aulas de graduação de química orgânica experimental, foi possível utilizar resíduos de cascas de frutas cítricas para a extração de flavonoides em um experimento dedicado ao curso de graduação em Química (VICTOR, *et. al.* 2020. p. 1522).

Desta forma, o presente estudo busca enfatizar a utilização de dados biométricos coletados a partir de amostras de laranjas do gênero *Citrus sinensis* para uma modelagem matemática com o objetivo de estimular estudantes de Ciências Biológicas e cursos afins a pensar de forma interdisciplinar sobre a relação entre a matemática, a biologia e outras áreas do conhecimento, além de mostrar que é possível estudar biologia por meio da matemática.

Procedimentos Metodológicos

Na etapa 1 da modelagem matemática foram utilizadas laranjas comuns laranja do gênero *Citrus sinensis* da safra de 2021, oriundos de quatro laranjeiras em uma propriedade particular do segundo distrito rural, localizada no município de Caçapava do Sul – RS. Em uma amostra de 20 frutos com tamanhos variados avaliaram-se as características físicas dos frutos: peso do fruto (g), peso do suco (g) (endocarpo + sucoso) coletado com um espremedor de frutas manual. Em seguida foram avaliados o diâmetro longitudinal, o diâmetro transversal e a altura.

Foram avaliadas também o peso da massa úmida da casca (g) (epicarpo + mesocarpo) e o peso da massa seca das cascas de cada uma das 20 laranjas. O peso da massa seca das cascas de cada uma das laranjas foi obtido após conservar as cascas durante 4 dias (8h por dia) no sol. Por fim foram coletadas as sementes de cada laranja e obtido o peso das sementes (g) por fruto. Uma balança eletrônica com graduação de 1 grama e capacidade de até 10 kg, foi utilizada para a determinação do peso total, peso da massa úmida e seca do fruto e sementes. Com o auxílio de um paquímetro, determinaram-se os diâmetros vertical e horizontal e altura. Este modelo de balança foi utilizado devido à facilidade de aquisição em qualquer comércio local com um custo bem em conta.

Na etapa 2 da modelagem matemática, para a abstração e a formulação de modelos matemáticos a partir dos dados coletados foram utilizadas rotinas computacionais implementadas no software R 4.1.0. Foi utilizada a correlação de Pearson para as análises de correlações (SCHOBER, *et.al.* 2018. p. 1763). O pacote *corrplot* foi utilizado para a construção da matriz de correlações obtida com nível de significância de 5% usando a correlação de Pearson (WEI, T. SIMKO, V.2021). Para a construção dos gráficos foi utilizado o pacote *ggplot2* (WICKHAM, H. 2016) e para a obtenção das funções (equações / fórmulas) polinomiais por regressão as curvas foram ajustadas aos dados coletados utilizando o pacote *stats* também do software R. Para a comparação e validação dos modelos polinomiais na etapa 3 o coeficiente de determinação (R^2) e o erro padrão residual (RSE) foram utilizados para avaliar o ajuste dos modelos em relação aos dados coletados (SUBRAMANIAN, *et. al.*, 2007, p.52). Além disso, também foram utilizados para a obtenção do modelo polinomial melhor ajustado os critérios AICc e BIC (LIZZI, *et al.* 2016. p. 55).

Resultados

Etapa 1 da Modelagem

Na etapa 1 da modelagem os dados coletados das várias variáveis biométricas escolhidas para o estudo das laranjas foram organizados para comparação entre as variáveis.

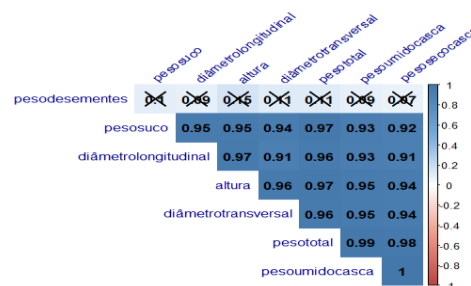
Tabela 1: Dados das amostras das variáveis biométricas coletadas

Amostra	Peso Total (g)	Peso Suco (g)	Peso casca úmida (g)	Peso casca seca (g)	Diâmetro longitudinal (cm)	Diâmetro transversal (cm)	Altura (cm)	Peso Sementes (g)
1	42	21	16	6	44	42	31	5
2	64	24	34	21	49	49	42	7
3	71	24	43	22	49	48	46	16
4	75	32	37	22	52	50	45	3
5	82	37	37	28	50	50	46	8
6	88	39	42	24	51	55	46	18
7	89	35	47	31	59	50	50	7
8	91	31	54	34	58	50	50	7
9	135	53	68	46	63	51	53	22
10	161	69	81	59	68	58	59	11
11	161	66	77	52	67	64	64	15
12	167	77	77	52	68	60	61	10
13	169	75	77	49	69	61	63	9
14	171	78	83	54	70	58	60	1
15	188	85	86	56	71	61	64	18
16	207	77	116	84	75	68	66	8
17	224	92	122	88	72	69	70	12
18	228	78	121	88	72	65	68	13
19	238	96	127	93	72	68	70	8
20	290	108	164	121	80	75	77	9

Fonte: Autora, 2021

A partir dos dados é possível comparar as variáveis para se verificar se existe uma relação de dependência entre elas. Uma função matemática pode ser representada em forma de uma tabela de dados, por meio de gráficos e a partir de equações que descrevem como uma variável dependente y depende de uma variável independente x, mas somente uma observação de dados em uma tabela não é suficiente para termos certeza que os dados estão realmente indicando uma relação de dependência (correlação) entre variáveis e uma função matemática. A correlação entre duas variáveis pode confirmar a dependência de uma variável y em relação a outra variável x e com a ajuda de um gráfico de dispersão dos dados podemos seguir para etapa 2 da modelagem envolvendo a abstração e a formulação de modelos matemáticos. A matriz de correlações entre todas as variáveis é indicada na figura 4 abaixo. Os resultados de p-valor para as correlações são menores do que o nível de significância de 0,05, indicando que os coeficientes de correlação são significativos nas relações entre todas as variáveis.

Figura 4: Matriz de correlação entre todas as variáveis biométricas.

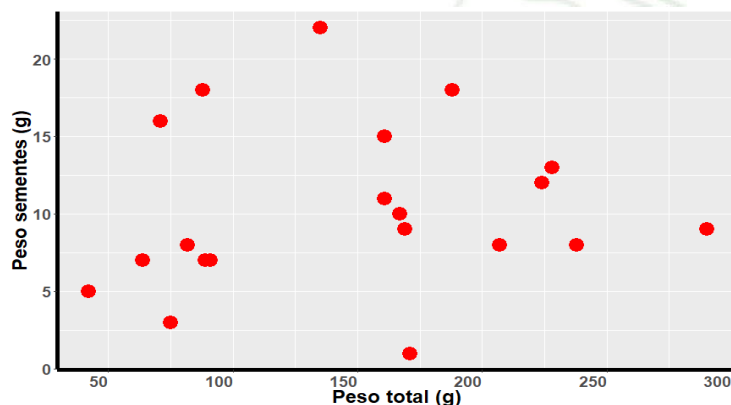


Fonte: Autora, 2021.

Tomando como variável independente o peso total das laranjas e variáveis dependentes as demais variáveis, a menos para a correlação entre o peso total e o peso das sementes, todas as demais correlações foram obtidas com $r > 0.9$, indicando uma correlação forte entre as variáveis (SCHOBER, *et al.* 2018. p.1763).

Em particular, a correlação fraca entre o peso total e o peso das sementes das laranjas dada por $r = 0,114$ é um indicativo de que a quantidade e o peso das sementes não são totalmente dependentes do peso total das laranjas conforme a figura 5 abaixo. A quantidade de frutos e sementes de laranjeiras dependem principalmente de polinização, experimentos controlados mostraram que a polinização realizada por abelhas da espécie *Apis mellifera* influenciou a produção de laranjas e o número de sementes por fruto (MALERBO-SOUZA, *et. al.* 2003, p.242). Com a presença de abelhas em pomares pode ocorrer um aumento de 31% na produção de frutos, 22% por cento de aumento no peso de frutos, aumento de 33% de suco por fruta e 36% de aumento no número de sementes. Além disso, a visita das abelhas foi responsável por laranjas mais doces e com maior quantidade de vitamina C do que aqueles que não receberam a visita das abelhas. (GAMITO, *et. al.*, 2006. p.483). Nestas condições, é esperado uma variação grande no número de sementes e no peso de sementes por fruto, a falta de correlação entre e peso total e peso total de sementes conforme indicado na matriz de correlação (figura 4) por fruto confirma a importância da polinização para a obtenção de laranjas com uma maior ou menor quantidade de sementes conforme indicado na figura 5.

Figura 5: Gráfico de dispersão relacionando as variáveis peso total de laranjas e peso das sementes de cada uma das 20 laranjas.



Fonte:

Autora, 2021.

Apesar de não haver uma relação de dependência entre as duas variáveis, os resultados obtidos são importantes para mostrar que nem sempre podemos encontrar uma relação de dependência entre variáveis. A falta de dependência entre o peso total das laranjas e o peso das sementes mostra uma variedade muito grande de condições (variáveis) necessárias para que os processos naturais de formação de frutos e sementes ocorram da melhor maneira possível. A relação de dependência de uma variável em relação a várias outras variáveis é uma tendência normal em biologia, o estudo de qualquer organismo pode envolver muitas variáveis e relações que são essenciais para que seja possível explicar um processo biológico. Diversas técnicas em análises multivariadas foram desenvolvidas para uma análise mais aprofundada em problemas envolvendo muitas variáveis, reduzir o número de variáveis é uma saída para diminuir a complexidade do problema com o mínimo de perda de informação (PRADO, *et al.*, 2002).



Etapa 2 da Modelagem

Para se verificar a relação de dependência entre as variáveis biométricas escolhidas, foi tomado como variável independente o peso total das laranjas e variável dependente das demais variáveis. Os gráficos de dispersão sugerem que modelos envolvendo funções polinomiais podem ser usados para se verificar como as variáveis escolhidas dependem do peso total das laranjas. O uso de modelos polinomiais indica a falta de linearidade nas relações de dependência, naturalmente existe uma tendência de não haver proporcionalidade entre o peso total e algumas variáveis. Na tabela 2 estão indicadas as equações que descrevem a relação entre as variáveis biométricas. Modelos polinomiais do primeiro ao terceiro grau foram comparados para obtenção do melhor modelo para explicar cada uma das dependências das variáveis escolhidas em relação ao peso total das laranjas x .

Tabela 2: Equações ajustadas para descrever a relação entre o peso total e as demais variáveis biométricas.

Variável independente (y)	Equação de regressão
Peso do suco (g)	$y = -8,562 + 0,5756x - 0,0006164x^2$
Altura (cm)	$y = 13,72 + 0,5563x - 0,002237x^2 + 0,0000037x^3$
Diâmetro longitudinal (cm)	$y = 32,3775 + 0,2914x - 0,0004686x^2$
Diâmetro transversal (cm)	$y = 39,7370 + 0,1215x$
Peso úmido da casca (g)	$y = 11,01 + 0,2915x + 0,0008232x^2$
Peso seco da casca (g)	$y = 4,2394 + 0,1844x + 0,0007684x^2$

Fonte: Autora, 2021

O erro padrão residual e os critérios AICc e BIC foram utilizados para obtenção do melhor modelo foram utilizados para os resultados não estão demonstrados. Está indicado em cada gráfico juntamente com o modelo ajustado apenas o coeficiente de determinação R^2 .

As equações obtidas para estimar os valores das variáveis em função do peso total indicam a importância das funções polinomiais para a modelagem matemática em cursos de matemática e para o ensino de matemática nos cursos de ciências biológicas já que foram encontradas funções polinomiais de grau 1, 2 e 3. A única função linear encontrada descreve a relação entre o diâmetro transversal das laranjas em função peso total, enquanto que os modelos polinomiais de grau 2 e 3 obtidos indicam relações não lineares entre as variáveis. Os modelos polinomiais encontrados sugerem uma falta de proporcionalidade em relação ao crescimento de uma variável em comparação com o peso total. A falta de proporcionalidade também pode ser traduzida em termos de taxas de crescimento que não são constantes ou ainda podemos dizer que as derivadas das funções encontradas não são constantes, de modo que a variação do peso total resulta em um aumento das variáveis dependentes de uma forma dependente do estágio de desenvolvimento das laranjas e do tamanho das frutas.

Etapa 3 da Modelagem - Validação de modelos

Para a validação dos modelos foram indicados nos gráficos de dispersão com as curvas ajustadas comente o valor do coeficiente de determinação, as outras estimativas de ajuste (RSE , $AICc$, BIC) foram testadas mas não são apresentadas.

O gráfico de dispersão que descreve a relação entre o peso do suco e o peso total das laranjas juntamente com o ajuste de uma curva a partir dos dados coletados de acordo com a figura 6, mostram a relação de dependência quadrática entre as duas variáveis, indicando que o aumento do suco das laranjas não aumenta de forma proporcional ao peso total das frutas o que pode ser explicado pela derivada da função.

Se a função quadrática que descreve o peso do suco é dada por

$$y=f(x)= -8,562+0,5756x-0,0006164x^2$$

então a derivada de $f(x)$ é dada por

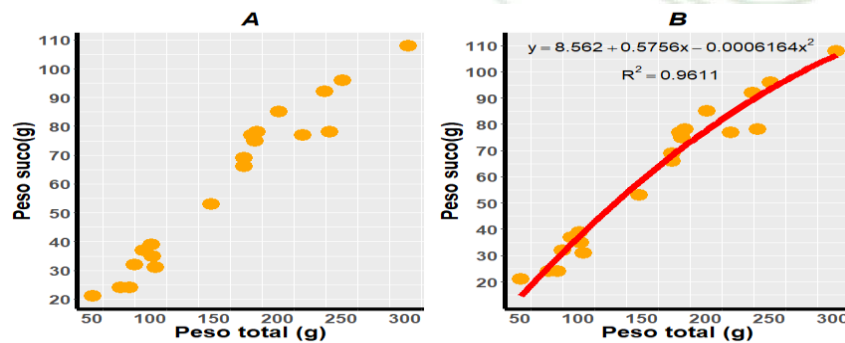
$$y=f'(x) = 0,5756 - 0,0012328x$$

indicando que a taxa de crescimento instantâneo de y em relação a x (gramas de suco/gramas de peso total) não é constante e depende do peso x . Esse resultado é esperado considerando a capacidade limitada de frutas na produção do suco, uma laranja pode crescer em tamanho, pode aumentar o endocarpo sucoso mas não necessariamente deve ocorrer um aumento do suco. Como a derivada $f'(x)$ é uma função decrescente para valores positivos de x , a derivada segunda da função dada por

$$f''(x) = - 0,0012328 < 0$$

indica que a concavidade do gráfico é para baixo e a função $f(x)$ possui um extremo absoluto, os resultados confirmam então que o tamanho da laranja em peso nem sempre significa maior quantidade de suco.

Figura 6. A. Gráfico de dispersão para descrever a relação do peso do suco (g) em relação ao peso total (g) das laranjas da espécie *Citrus sinensis*. B. Gráfico de dispersão e a curva ajustada para descrever a dependência do peso do suco (g) em relação ao peso total (g) das laranjas da espécie *Citrus sinensis*.



Fonte: Autora, 2021.

Analisando o ponto crítico de $f(x)$ encontramos

$$x = \frac{-b}{2a} = 466,90g$$

de modo que a máxima quantidade de suco é dada por $f(466,90) = 125,81$ gramas de suco aproximadamente para uma laranja com um peso de 466,9 gramas. Observando os dados na tabela 1 podemos verificar que a laranja com o maior peso tem 290 gramas, dessa forma o ponto crítico encontrado igual a 466,90 gramas é apenas uma estimativa para laranjas que com um peso muito acima do peso médio.

O rendimento do suco nas frutas coletadas pode ser avaliado pela razão entre a massa do suco/massa dos frutos, esta razão é um bom indicativo da produtividade da laranjeira tomada como amostra, para a indústria é exigido um rendimento de suco de no mínimo 40% (Beber, P. M. et al., 2018, 1030). A média das razões obtidas a partir das 20 laranjas amostras é dada por

$$\frac{\text{massa do suco}}{\text{massa do fruto}} = 0,4106412$$

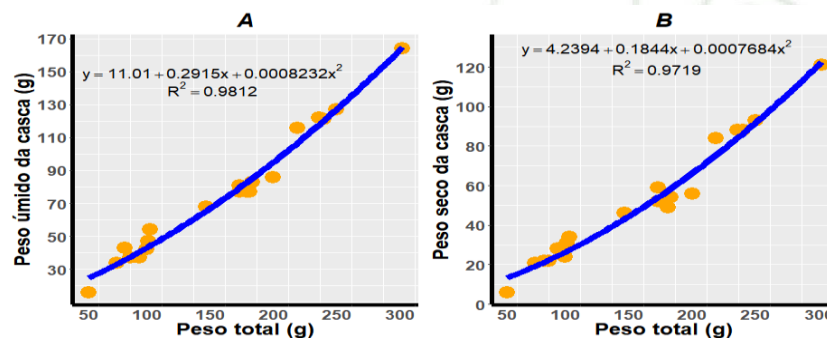
de maneira que escrito em forma de porcentagem indica um rendimento de 41,06%, um pouco acima do valor exigido pela indústria.

Já a relação entre a relação entre o peso total e o peso úmido da casca é indicada na figura 7 (A) dependendo de um modelo quadrático. Como na função a derivada segunda é dada por

$$f''(x) = 0,0016464 > 0$$

e por isso a concavidade é voltada para cima temos novamente uma função cuja taxa de variação instantânea não é constante, indicando que o aumento do peso úmido da casca não aumenta de forma proporcional ao peso total das laranjas. Para valores positivos a função é somente crescente e pelo menos para as 20 laranjas analisadas não sugere um comportamento assintótico. Resultados encontrados para descrever a relação entre o peso das laranjas em algumas relações ao tempo sugerem que a espessura da casca dos frutos de quatro genótipos de laranjeiras-doce durante em um período de 228 dias é decrescente de acordo com o avanço da maturação (BEBER, *et. al.* 2018. p. 1030), implicando também na diminuição do peso da casca úmida.

Figura 7: A. Gráfico de dispersão e curva ajustada para descrever a dependência do peso úmido da casca (g) em relação ao peso total (g) das laranjas da espécie *Citrus sinensis*. B. Gráfico de dispersão e a curva ajustada para descrever a dependência do peso seco da casca (g) em relação ao peso total (g) das laranjas da espécie *Citrus sinensis*.



Fonte: Autora, 2021

Além disso, outras condições também determinam uma variação na espessura da casca, como a redução da espessura de casca com aumento nos níveis de fertirrigação com diferentes doses de NPK. Seguindo a mesma tendência do peso úmido da casca, a relação entre o peso seco da casca e o peso total também pode ser ajustada por uma função quadrática como indicada na figura 7(B) através de um modelo quadrático.

Diferente dos ajustes descritos por funções quadráticas na modelagem da relação entre peso total e os pesos seco e úmido das cascas, a dependência entre o diâmetro transversal e o peso total pode ser modelada por uma função linear dada por

$$f(x) = 39,7370 + 0,1215x$$

conforme a figura 8 (A). Em se tratando de taxa de variação, a derivada da função é dada por

$$f'(x) = 0,1215 \text{ cm/grama (constante)}$$

indicando que o diâmetro da laranja aumenta 0,125cm a cada grama de ganho de peso das laranjas. O diâmetro longitudinal tem um ajuste diferente do diâmetro transversal dado pela função quadrática

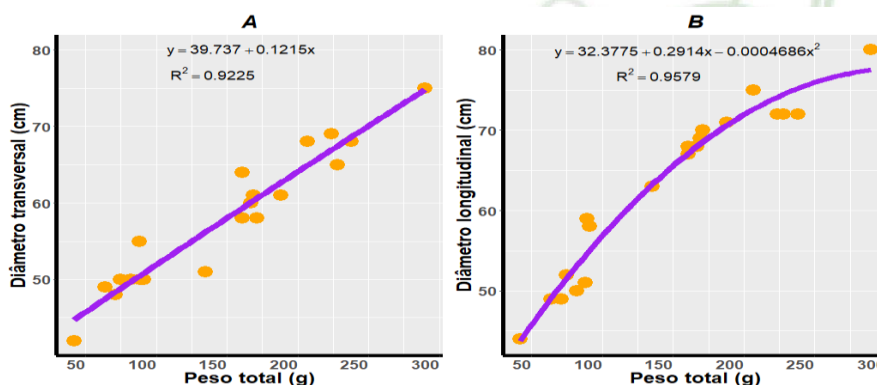
$$f(x)=32,3775+0,2914x-0,0004686x^2$$

com um comportamento crescente e valores positivos no intervalo [50,300] e cujo ponto crítico é dado por

$$x = \frac{-b}{2a} = 310,9262g$$

a existência deste ponto crítico sugere uma capacidade limitada para o crescimento do diâmetro longitudinal, diferente do crescimento linear apresentado pelo diâmetro transversal cujo crescimento é proporcional ao aumento do peso.

Figura 8: A. Gráfico de dispersão e curva ajustada para descrever a dependência do diâmetro transversal (cm) em relação ao peso total (g) das laranjas da espécie *Citrus sinensis*. B. Gráfico de dispersão e a reta ajustada para descrever a dependência do diâmetro (cm) em relação ao peso total (g) de laranjas da espécie *Citrus sinensis*.



Fonte: Autora, 2021

A média amostral do diâmetro longitudinal é igual a 62,95 enquanto que a média amostral do diâmetro transversal é igual a 57,6. Utilizando o teste t-Student para uma comparação das médias encontramos um p-valor igual a 0,08985 > 0,05, o que indica que não é significativa a diferença das médias com um grau de confiança de 95%. Resultados encontrados por LEMOS, *et al.* (2012) no estudo das características físico-químicas dos frutos de laranja-pera indicam uma igualdade no diâmetro longitudinal em diferentes posições na copa das árvores, mas uma diferença significativa na posição apical em comparação com as posições intermediárias e basal. Os mesmos autores também encontraram que não existem diferenças entre os diâmetros nos lados leste e oeste da copa. Além da posição na copa variações nos diâmetros longitudinal e transversal ocorrem também de acordo com o processo de maturação.

Analisando do diâmetro equatorial (longitudinal) a partir da colheita de 12 frutos por planta (cultivar Aquiri enxertadas sobre limoeiro Cravo) a 1,5 metros de altura da copa a cada 28 dias, em função do estágio de maturação começando com frutas verdes até alcançar um estágio de excessivamente maduro ao final de 228 dias, BEBER, *et al* (2018) encontraram um ajuste quadrático cujo ponto de máximo diâmetro ocorre em 194 dias após o início da antese. Depois de 194 dias ocorre uma diminuição no diâmetro juntamente com uma diminuição no comprimento e na massa dos frutos, este sugere um período ótimo para colheita sem perda de produtividade. Muitas vezes temos dificuldade de associar os conteúdos matemáticos trabalhados desde as séries iniciais com situações do nosso cotidiano. Estes resultados que

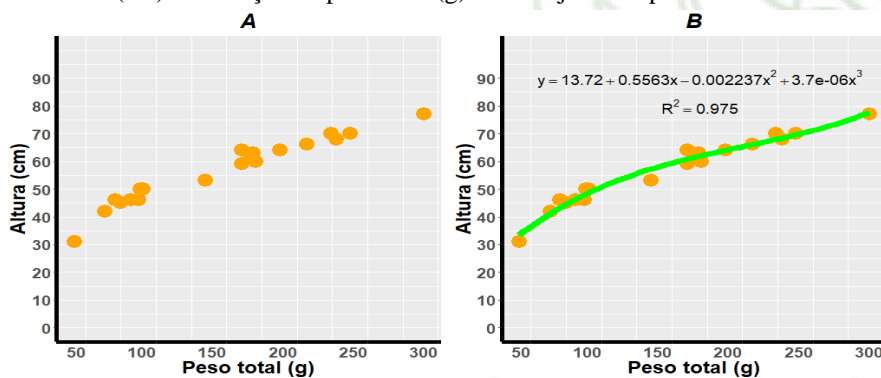


envolvem a curva de maturação de massa, de diâmetro e de comprimentos de laranjas mostram a importância da matemática na análise de algumas situações que envolvem as relações entre variáveis que na maior parte das vezes são complexas e de difícil interpretação sem uma modelagem matemática.

O resultado encontrado para modelar a dependência de altura das laranjas amostradas em relação ao peso total foi diferente quando comparado com as demais variáveis. O modelo encontrado que melhor descreve a relação de dependência entre as variáveis é dado por um polinômio do terceiro grau $f(x)=13,72+0,5563x-0,002237x^2 +0,0000037x^3$ de acordo com o gráfico dado na figura 9.

De acordo com os relatos de MATTOS, *et al.* (2005), as características dos frutos das diferentes variedades cítricas podem variar, para algumas variedades (Westin e Rubi) os frutos são mais esféricos, já os frutos da laranja pera são mais alongados enquanto que laranjas valência apresentem frutos mais ovalados. Aproximações matemáticas baseada em esferas, elipses, cilindros e pelas combinações de todas estas formas podem ser usadas para uma descrição geométrica de frutas.

Figura 8: A. Gráfico de dispersão para descrever a relação da altura (cm) em relação ao peso total (g) das laranjas da espécie *Citrus sinensis*. B. Gráfico de dispersão e a curva ajustada para descrever a dependência do diâmetro (cm) em relação ao peso total (g) de laranjas da espécie *Citrus sinensis*.



Fonte: Autora, 2021

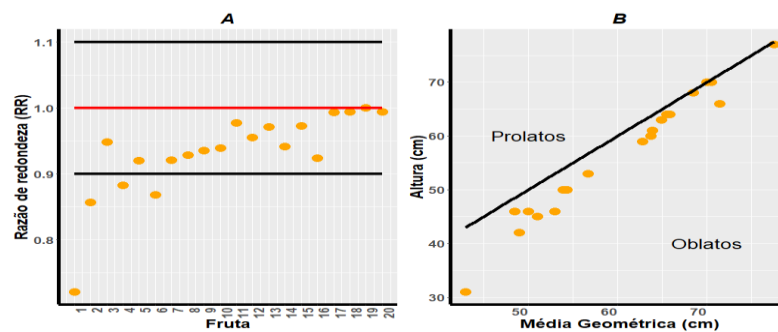
Para classificar a forma de melões (*Cucumis melo*) como frutas normais e com deformação, de uma maneira quantitativa, a razão de redondeza (RR) foi usada de acordo com a equação

$$RR = \frac{L}{\sqrt{D1 \cdot D2}}$$

onde D1 é o diâmetro longitudinal, D2 é o diâmetro transversal e L é a altura da fruta, mostram que a razão de redondeza para frutas regulares variou entre 0,90 e 1,10, para frutas na forma de oblatos (achatadas) os valores encontrados variaram entre 0,74 a 0,89 e para frutas prolatas (alongadas) a razão variou entre 1,13 a 1,18. A fórmula utilizada para estimar a razão de redondeza é uma indicação para este tipo de classificação, quando D1, D2, L são iguais então o valor RR é igual a 1 indicando uma forma perfeita de uma esfera. Utilizando esta mesma forma para avaliar a razão de redondeza para as laranjas amostradas, os resultados encontrados estão indicados na figura 10.

Os resultados indicados na Figura 10 (A) sugerem que nenhuma laranja apresentou uma razão de redondeza maior do que 1. Já na figura 10 (B) é possível verificar que algumas laranjas amostradas estão próximas da reta identidade (altura=média geométrica), em outras palavras, tem uma tendência de ter uma forma esférica ou regular.

Figura 10: A. Gráfico de dispersão para descrever a razão de redondeza (RR) das 20 laranjas amostradas da espécie *Citrus sinensis*. B. Gráfico de dispersão indicando a relação de dependência entre altura (cm) e a média geométrica entre o diâmetro longitudinal e transversal. No mesmo gráfico a reta identidade ($y=x$) para indicar as formas das 20 laranjas amostradas da espécie *Citrus sinensis*.



Fonte: Autora, 2021

Por outro lado, as laranjas com menores médias geométricas possuem uma tendência de uma forma oblata e nenhuma laranja apresentou uma razão de redondeza maior do que 1 e acima da reta identidade (Figura 10 (B)) indicando uma forma prolata. A classificação das formas das frutas pode servir para uma avaliação do padrão de qualidade, é importante para o planejamento da logística de transporte e para estimular consumidores já que frutas muito deformadas geralmente são rejeitadas (RASHIDI, M e ARABSALMANI, K. 2016. p. 26).

Considerações finais

Os resultados obtidos no presente trabalho mostram a importância do estudo das relações entre variáveis a partir da modelagem matemática representada por funções polinomiais. O uso de dados biométricos das laranjas representados mostra a forma de dependência de algumas variáveis em relação ao peso total enquanto que a falta de correlação entre o peso das sementes em relação ao peso total indica que nem sempre uma variável depende de outra e que a falta de correlação entre variáveis faz parte de diversos sistemas biológicos. A modelagem matemática no ensino de ciências biológicas pode tornar o ensino de matemática mais prazeroso e de fácil compreensão a quem aprende e utiliza, além de fazer uma conexão entre a escola, a universidade, com o comércio, agropecuária e indústria, dando sentido para a importância do estudo da matemática desde as séries iniciais. Dessa forma, o ensino de matemática em cursos de graduação de ciências biológicas e áreas afins pode colaborar para que alunos e profissionais da área tenham condições de melhor interpretar a realidade por meio de modelos matemáticos.

Referências

- BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.
- BEBER, P.M., ALVARES, V.S., KUSDRA, J.F. **Qualidade industrial e maturação de frutos de laranjeiras-doce em Rio Branco, Acre**. *Citrus Res. Technol.*, 39, e-1030, 2018.
- DE SOUZA, C. L. M. **Análise de regressão: aplicação em biologia**. *Perspectivas Online*, Campos dos Goytacazes, v.1, n.2, p.71-77, 2007.
- GAMITO, L. M. *et al.* **Visitantes florais e produção de frutos em cultura de laranja (*Citrus sinensis* L. Osbeck)**. *Acta Sci. Anim. Sci.*, v. 28, n. 4, p. 483-488, 2006.
- KALAKI, R. B. *et al.* **Plano estratégico para o sistema agroindustrial citrícola brasileiro**. *Gest. Prod.*, v. 24, n. 2, p. 338-354, 2017.
- LEMOES, L. M. C. *et al.* **Características físico-químicas da laranja-pera em função da posição da copa**. *Rev. Bras. Frutic.*, v. 34, n. 4, p. 1091-1097, 2012.



- LIZZI, *et al.* **Algumas considerações práticas sobre a precisão dos estimadores de mínimos quadrados e máxima verossimilhança para os parâmetros de regressão linear normal.** *Ciência e Natura*, Santa Maria v.38 n.1, p. 55 – 70, 2016.
- LOPES, J.M.S, DÉO, T.F.G; ANDRADE, B.J.M, GIROTO, M., FELIPE, A.L.S, JUNIOR, C.E.I, BUENO, C.E.M.S, SILVA, T.F, LIMA, F.C.C. **Importância econômica do Citros no Brasil.** *Revista Científica Eletrônica de Agronomia*, n 20, dezembro de 2011.
- MALERBO-SOLZA, D. T. *et al.* **Polinização em cultura de laranja (Citrus sinensis L. Osbeck, var. Pera-rio).** *Brazilian Journal of Veterinary Research and Animal Science*, 40:237-242, 2003.
- MATTOS, J.D.; NEGRI, J. D. de; PIO, R.S; POMPEU, J. **Citros: principais informações e recomendações de cultivo.** Campinas: Instituto Agrônomo de Campinas, 2005. p.19-36, Boletim Técnico 200.
- MUTTI, *et al.* **Adoção da Modelagem Matemática: o que se mostra na literatura produzida no âmbito da Educação Matemática.** *Bolema*, v. 35, n. 69, p. 129-157, 2021.
- MOURA, R.C; LOPES, P.S.N; JUNIOR, D.S.B; GOMES, J.G & PEREIRA, M.B. **Biometria de Frutos e sementes de Butia capitata (Mart.) Beccari (Arecaceae), em vegetação natural no Norte de Minas Gerais, Brasil.** *Biota Neotrop.* 10(2) disponível em: <http://www.biotaneotropica.org.br/v10n2/en/abstract?shortcommunication+bn02710022010>. Acesso em: 22 maio. 2021.
- PETRY, P.P.S., MEDEIROS, K. M. M., HARDOIM, E. L., MANSILLA, E. P. **A modelagem matemática como uma metodologia investigativa e crítica nas aulas de Matemática.** *Educação Matemática Debate*, v. 4, e202037, p. 1-25, 2020.
- R CORE TEAM (2021). **R: A language and environment for statistical computing.** *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Acessado em: 13/08/21.
- PEREIRA, R. dos S.G.; DOS SANTOS J.G. **Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico.** *Boletim de Educação Matemática*, v. 27, n. 46, p.531, 2013.
- SOARES, M.R., IGLIOR, S. B. C., GUALANDI, J. H, ALENCAR, E. S. **Um panorama da inserção da modelagem matemática na educação matemática brasileira.** *Revista Cocar*, v.14, n. 29, p.603-622, 2020.
- SOUZA, C.L.M; **Análise de regressão: aplicação em biologia;** *Perspectiva Online*, Campos dos Goytacazes, v 1,n 2,p 71-77,2007.
- SUBRAMANIAN, *et al.* **Aplicação de método e técnica multivariados para previsão de variáveis termoambientais e perceptivas.** *Produção*, v. 17, n. 1, p. 052-070, 2007.
- USTRA, R.S.V. *et al.* **Análise de uma atividade de modelagem matemática: implicações ao desenvolvimento do pensamento algébrico.** *Revista Triângulo*, v. 14, nº 1, 2021.
- VICTOR, *et al.* **Utilização de biomassa em aulas de graduação de química orgânica experimental: extração de flavonoides a partir de resíduos de cascas de frutas cítricas.** *Quim. Nova*, Vol. 43, nº 10, 1522-1528, 2020.
- WEI, T. Simko V. **R package 'corrplot': Visualization of a Correlation Matrix. (Version 0.90)** 2021. Disponível em: <https://github.com/taiyun/corrplot>. Acessado em: 20/08/21.
- WICKHAM, H. **ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis.** Springer-Verlag New York.. 2016. Disponível em: <https://ggplot2.tidyverse.org>. Acesso em: 20, outubro. 2021.
- YABIKU, *et. al.* **Uma abordagem interdisciplinar no ensino da física por meio da matemática e dos recursos tecnológicos.** *Braz. J. of Develop.*, v. 6, n. 11, p.85;098-85108, 2020.