CONSTRUÇÕES DE PARÁBOLAS: UMA ABORDAGEM DINÂMICA

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (EMAIEFEM**)**

Fábio Garcia BERNARDO
Centro Federal de educação Tecnológica – RJ
Escola Parque – Rio de Janeiro
Prof_fabiobernardo@yahoo.com.br

RESUMO

O presente trabalho destina-se a alunos do curso de licenciatura em Matemática, professores do E.F.II e aos professores do Ensino Médio de Matemática. O objetivo principal é dar significado ao estudo do gráfico da função quadrática, e permitir a mesma abordagem no tratamento gráfico das demais funções estudadas na educação básica. O uso de novas tecnologias no ensino de matemática se faz presente na vida escolar, visto que aluno e computador não se dissociam mais. Com o auxílio do *software Geogebra* construirei a família de parábolas, determinando as interseções com os eixos e os pontos de máximo e mínimo. O aluno é parte integrante desse processo de construção, passo a passo, seguindo uma sequência lógica de raciocínio. Poderá assim, esboçar, analisar e tirar conclusões a respeito dos gráficos sem o uso de fórmulas. No primeiro momento é feita a construção analítica da parábola, bem como a percepção da existência da curva como um lugar geométrico. Em seguida, uma abordagem algébrica e construtiva dará significado ao estudo, permitindo que o aluno seja capaz de interpretar e resolver problemas modelados pelas parábolas sem a utilização de nenhuma "fórmula".

Palavras- chaves: construção do conhecimento, novas tecnologias, ensino de matemática.

1. Introdução

A construção de parábolas acontece, em geral, no 9° ano do Ensino Fundamental e no 1° ano do Ensino Médio. Observa-se nos livros didáticos um excesso de "receitas de bolo", fórmulas para encontrar raízes, máximos e mínimos. No estudo de física, o movimento oblíquo e vertical são representados por parábolas e lá, observamos outra grande quantidade de fórmulas, onde os coeficientes são velocidades, aceleração, e as incógnitas são as distâncias percorridas. São fórmulas para o alcance máximo, para altura máxima, tempo de interceptação de objetos, entre outras. Esse trabalho propõe uma abordagem diferenciada para o ensino de parábolas com o uso do software livre *Geogebra* cada vez mais presente no ensino de matemática.

Proponho então, uma abordagem dinâmica e interativa, onde o aluno pode não só observar, como também fazer parte do processo de construção de seu conhecimento. Pode ser aplicada em turmas de 9° ano do Ensino Fundamental II e também em turmas do Ensino Médio. Não é necessária a utilização da Internet (basta que o software já esteja instalado num computador) e ainda assim, as atividades podem ser feitas até mesmo sem o *software*, ou seja, o *software* é apenas um facilitador do processo. Por fim, o resultado dessa abordagem é mostrado através de trabalhos realizados pelos alunos. Os trabalhos apresentados foram reunidos em um vídeo que foi enviado para o festival internacional “Math + Science Performance Festival”, promovido pela Universidade de Ontário, no Canadá. O vídeo foi premiado e está disponível no link *http://www.edu.uwo.ca/mpc/mpf2011/mpf2011-M10.html.*

2. Referencial Teórico

Acredita-se que a construção do conhecimento é um agente essencial à aprendizagem.

> “Considera-se como ensino não apenas a transmissão do já conhecido, mas o processo que leva à capacidade de observação e de reflexão crítica. O bom ensino que deve ocorrer não como um armazenamento de informações, mas como formação de referenciais e desenvolvimento da capacidade de avaliação...” WERNECK 2006.

Desta forma, utilizar ferramentas e estratégias que façam do aluno um agente de seu aprendizado é fundamental para que o processo seja construído e não transmitido. A proposta desse trabalho é dar significado ao conteúdo, permitindo que o aluno perceba a existência da parábola, bem como consiga construí-la a partir de uma sequência lógica de raciocínio sem que necessite se apoiar ou guardar “fórmulas” para se alcançar os resultados.

No primeiro momento, o iremos construir uma parábola de forma a utilizar à sua definição como sendo um lugar geométrico, ou seja, mostrando a existência dessa curva. A atividade pode ser feita também com papel vegetal, lápis e régua. É uma forma de apresentar a curva de forma lúdica, sem definições e com uma abordagem puramente geométrica. Em seguida, considerando sua forma algébrica mais simples, iremos construir parábolas, observar seus vértices, interseções com os eixos e os pontos de máximo e mínimo sem o auxílio de fórmulas ou receitas do tipo passo a passo, como é sugerido em diversos livros didáticos. Como citado anteriormente, o *Geogebra* é apenas uma ferramenta facilitadora que permite observarmos mais parábolas, com precisão, em curto espaço de tempo, o que proporciona um melhor aproveitamento da aula.

Além disso,

> "o uso de novas tecnologias no ensino, no contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o 'fazer matemática': experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de 'fatos', geralmente na forma de definições e propriedades. GRAVINA e SANTAROSA, 1998.

Ainda sobre a importância das tecnologias e as relações com a Matemática:

> Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível. D'Ambrosio, 1996.

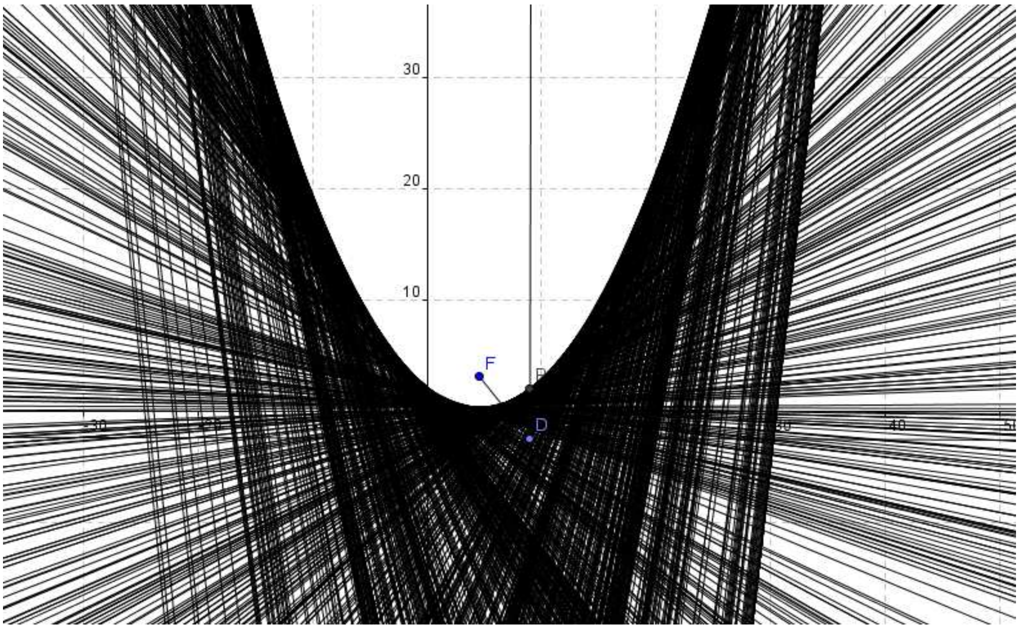
Diante disso, é preciso refletir sobre a forma com que as tecnologias são inseridas no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Não basta apenas utilizarmos um projetor, propor uma pesquisa na internet ou utilizar um *software* para observar resultados. A proposta aqui baseia-se na construção por parte do aluno e na mediação por parte do professor.

3. Metodologia

Construção e Existência da parábola com o auxílio do *Geogebra*

- ♦ Construir uma reta horizontal, que será a diretriz da parábola;
- ♦ Ocultar os pontos *A* e *B* que aparecerão sobre a reta e renomeá-la para d(diretriz);
- ♦ Marcar um ponto *D* sobre a reta *d*, e um ponto *F* fora da reta, que será o foco da parábola;
- ♦ Construir um segmento de reta *DF*, e em seguida a mediatriz *m* do segmento *DF*;
- ♦ Construir a perpendicular *s* à reta *d*, passando pelo ponto *D*;
- ♦ Marcar o ponto *P* de intersecção da mediatriz m com a reta *s*;
- ♦ Selecionar a mediatriz *m e Habilitar rastro*.
- ♦ Arrastar o ponto D sobre a diretriz.

A construção fica assim:



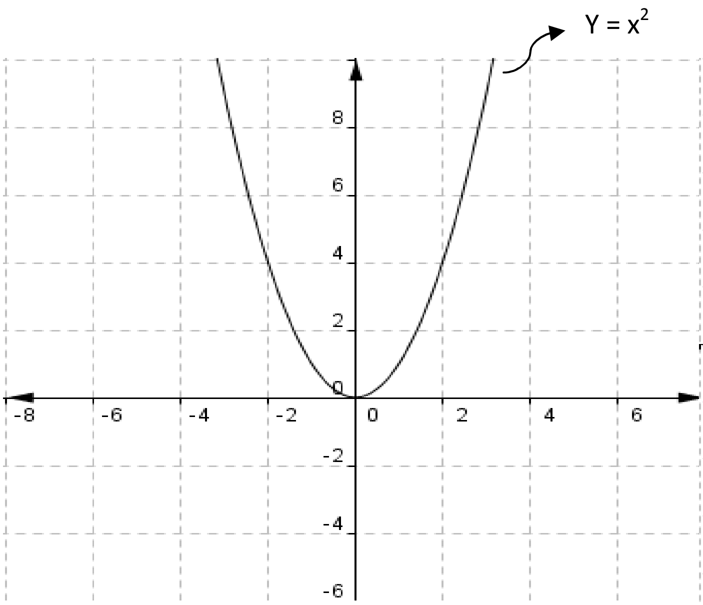
A forma algébrica:

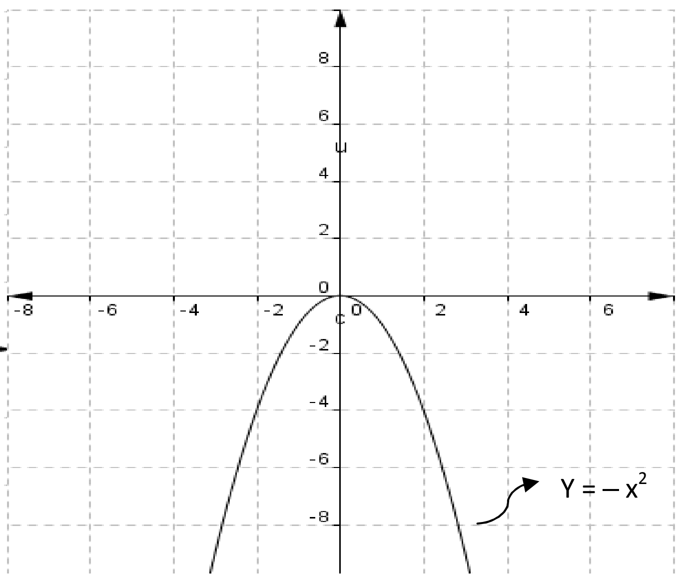
Inicialmente construímos a parábola $y = x^2$ e $y = -x^2$, que serão nossas parábolas "base" para as demais.

Elas podem ser construídas de forma simples com o auxílio de uma tabela, atribuído alguns valores positivos, negativos e o zero para x.

x	$Y = x^2$	$Y = -x^2$
– 3	9	–9
– 2	4	–4
– 1	1	–1
0	0	0
+ 1	1	–1
+ 2	4	–4
+ 3	9	–9

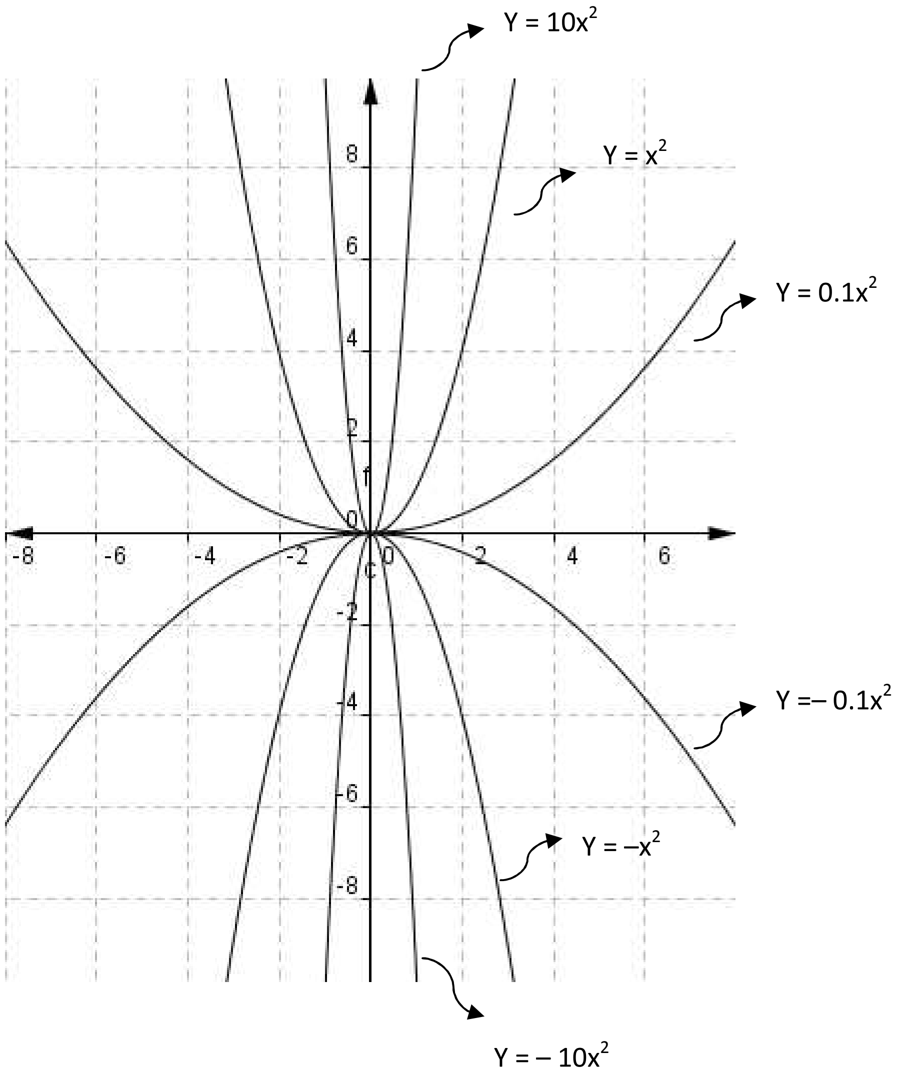
Os gráficos ficam assim:





Onde, já podemos definir o vértice como sendo o ponto onde a parábola muda a sua trajetória, ou seja, de decrescente passa a ser crescente ou vice versa. As interseções com o eixo x se dão nos pontos onde y = 0, e as interseções como o eixo y, quando x = 0. Nos exemplos acima, destacamos o vértice V(0, 0).

Agora vamos observar o que acontece com as parábolas da forma $y = a.x^2$, com $a \neq \pm 1$ e naturalmente $a \neq 0$.



Podemos observar então que se a > 0, a parábola se aproxima do eixo y e que se 0 < a < 1, a parábola se afasta do eixo y.

É importante construirmos outros exemplos e até mesmo sugerir como atividade que os alunos participem dessa etapa para que as ideias se consolidem e fiquem amadurecidas nessa etapa, que será fundamental para as demais.

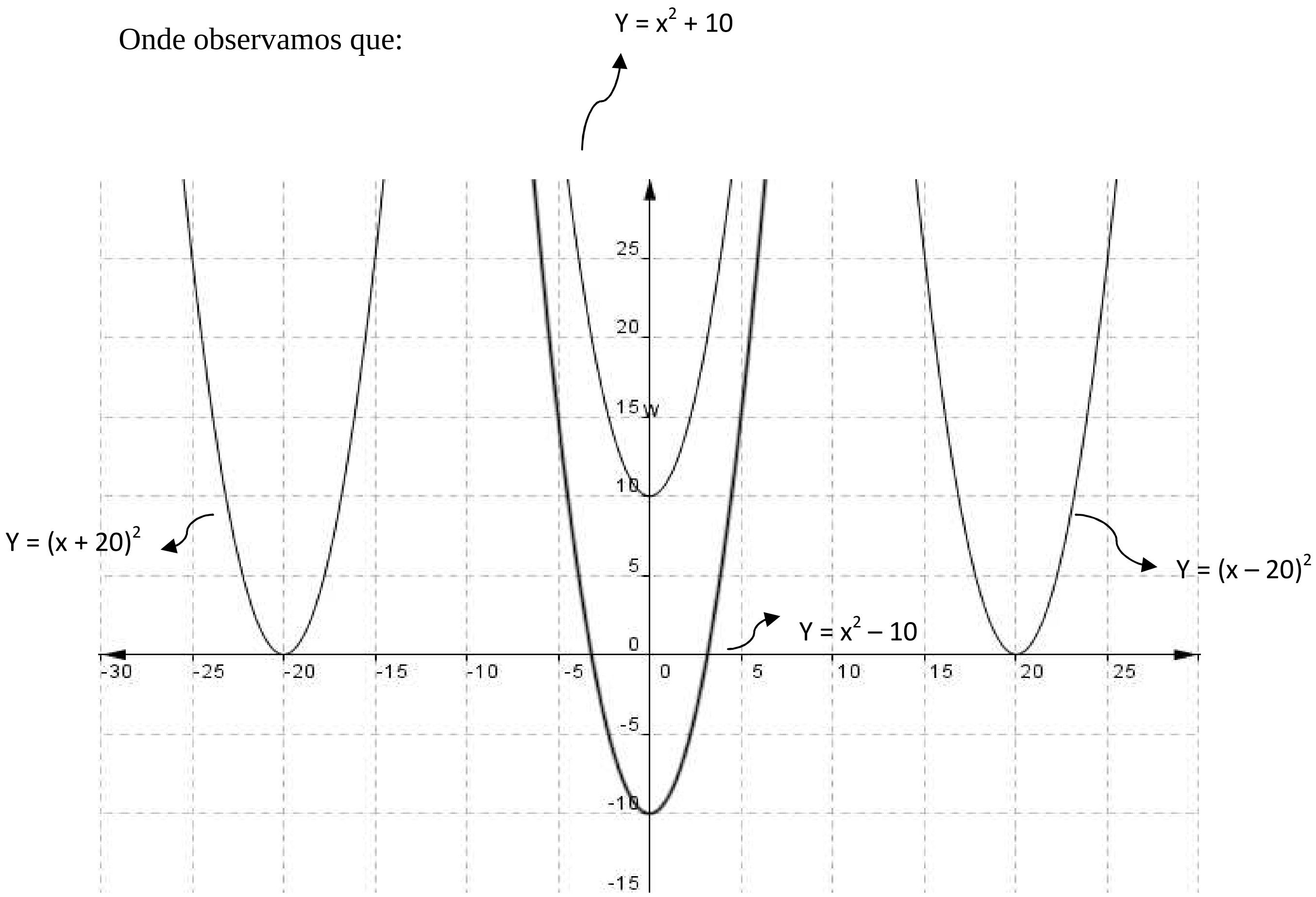
Translações da parábola y = x^2

Naturalmente que os problemas não envolvem somente as parábolas y = x^2 ou y = – x^2. Como citei anteriormente, essas parábolas servirão de "base" para as demais. Vamos construir as demais com fazendo translações dessas duas. Para efeito de visualização vamos nos deter apenas nas parábolas com concavidade para cima, visto que as demais, com concavidade para baixo, são rigorosamente iguais as primeiras em termos de construção.

Propomos então a construção das parábolas:

$Y = (x + 10)^2$	$Y = (x - 10)^2$	$Y = x^2 + 10$	$Y = x^2 - 10$

Onde observamos que:



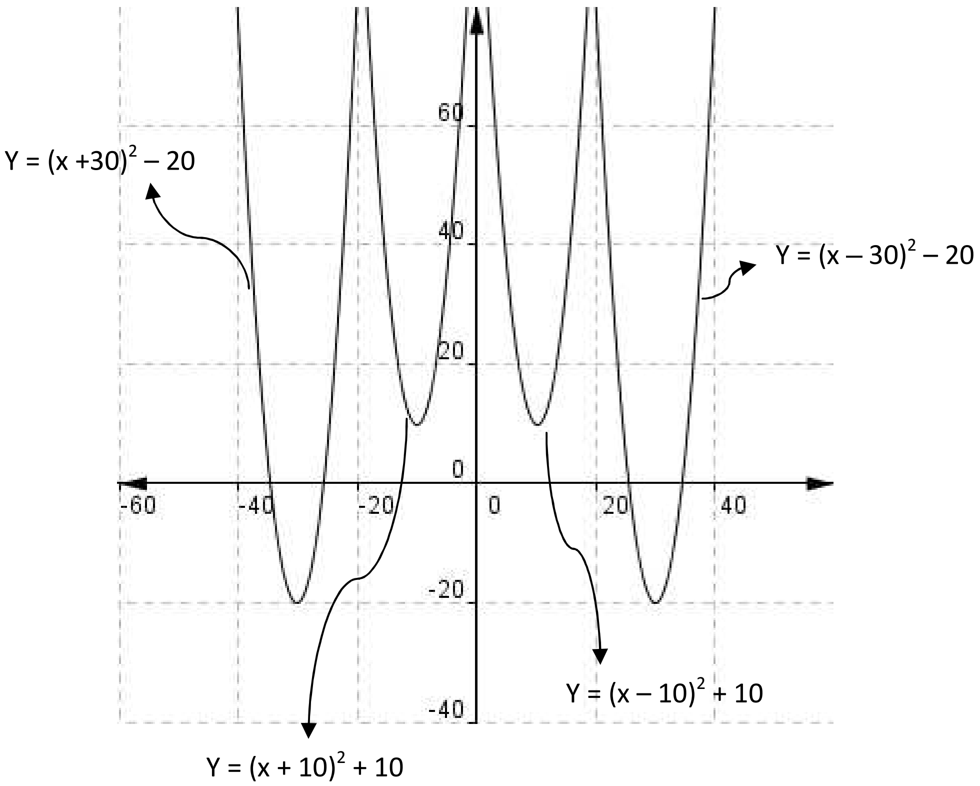
Nesses casos, podemos concluir que ao somarmos ou subtrairmos valores diretamente a y, ou seja, $y = x^2 + 10$ ou $y = x^2 - 10$ a parábola inicial (base) se desloca (translada) 10 unidades para cima e 10 unidades para baixo, respectivamente.

Ao passo que ao somarmos valores a x, antes de elevarmos o mesmo ao quadrado, ou seja, $y = (x + 10)^2$ ou $y = (x - 10)^2$, podemos observar que a parábola inicial(base) se desloca 10 unidades para a esquerda e 10 unidades para direita, respectivamente.

Basta então fazermos outros exemplos para observarmos esse comportamento de translação e fixarmos a ideia com os alunos.

O que acontece então com parábolas da forma:

$\boxed{Y = (x + 10)^2 + 10}$ $\boxed{Y = (x - 10)^2 + 10}$ $\boxed{Y = (x - 30)^2 - 20}$ $\boxed{Y = (x + 30)^2 - 20}$



Nesse momento, chegamos ao passo mais importante. Acredito que se o aluno entender bem essas construções, estaremos a um passo do nosso objetivo final que é dar um significado aos problemas de parábolas e interpretá-los de forma prática. Aqui, o além das parábolas em si, os conceitos de translação ficam bem definidos e explorados de forma prática.

A partir daí, podemos construir gráficos do tipo $\mathbf{y = a.(x + m)^2 + k}$ para observarmos que o coeficiente **a** apenas aproxima ou afasta a parábola do eixo x, conforme já vimos mais acima.

Mais uma vez, fica também a sugestão de exploração de outros exemplos para que as ideias fiquem bem amadurecidas e o entendimento se concretize de forma consistente.

Aplicações: Construção das parábolas

Como a sugestão é de um processo construtivo, vamos começar com parábolas mais simples.

Ex.: No exemplo $y = (x - 30)^2 - 20$ determinar, o vértice da parábola e as interseções com os eixos x e y.

Solução:

Observando o gráfico, podemos notar que o vértice da parábola $y = x^2$ se deslocou 30 unidades para a direita (no eixo x) e 20 unidades para baixo(no eixo y). Logo, o vértice, que antes era (0,0) agora é o ponto V:(30, – 20).

Nesse momento é a hora de citarmos que o menor valor assumido por essa parábola é 20, pois ela “começa a ser construída” por esse ponto e os demais valores assumidos por ela são todos maiores. Além disso, esse menor valor é dado pela ordenada(y) do vértice, ou seja, V:(30, – 20).

Interseções com o eixo x:

Basta fazermos y = 0

$(x - 30)^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 30)^2 = 20 \Leftrightarrow x - 30 = \pm\sqrt{20} \Leftrightarrow x = 30 \pm \sqrt{20}$

Interseção com eixo y:

Basta fazermos x = 0

$Y = (0 - 30)^2 - 20 \Leftrightarrow y = 880$

Outro ponto importante é destacarmos que essa construção passa pelo fato da parábola está escrita em sua forma canônica, ou seja, $\mathbf{y = a.(x + m)^2 + k}$. Assim, para que possamos usar essa abordagem, é necessário que o aluno esteja bem acostumado com a forma canônica e com o processo de completar quadrados, essencial para escrevermos uma parábola da forma canônica.

Vamos a um exemplo:

Determinar o vértice, as interseções com os eixos x e y e fazer o esboço da parábola $\mathbf{y = x^2 - 10x + 21}$.

Solução:

$y = x^2 - 10x + 21 \Leftrightarrow Y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 21 \Leftrightarrow y = (x - 5)^2 - 4$

Vértice: (5, –4)

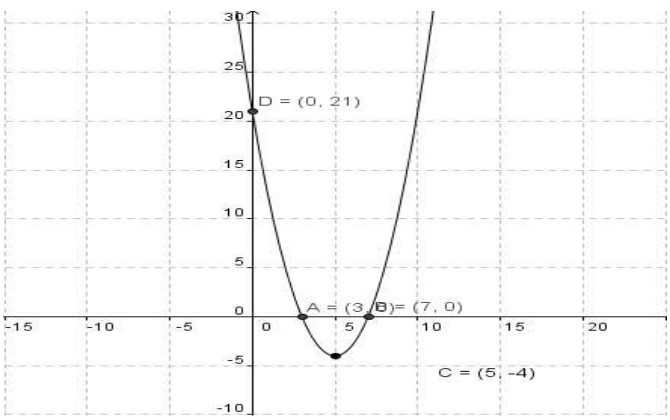
Interseção com o Eixo x

$y = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 5^2) = 4 \Leftrightarrow x - 5 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } x = 4$

Interseção com o Eixo y

$x = 0 \Leftrightarrow y = (0 - 5)^2 - 4 \Leftrightarrow y = 21$

Gráfico:



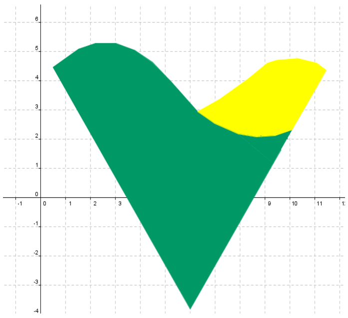
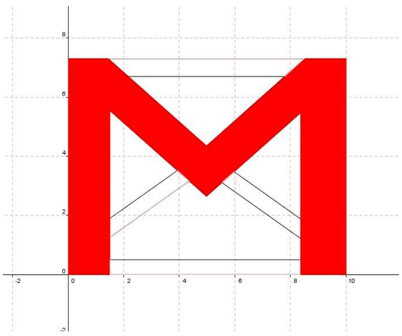
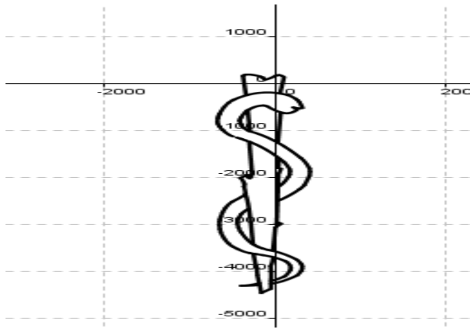
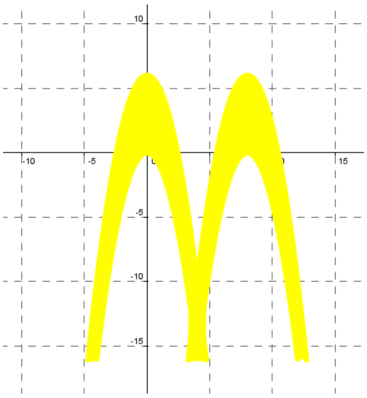
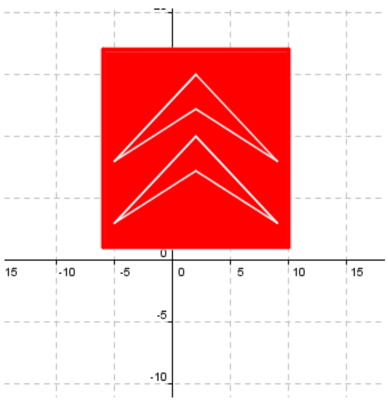
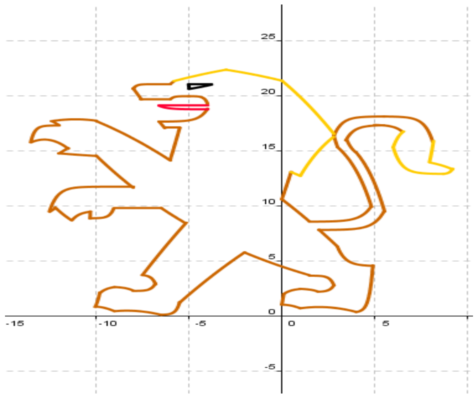
Vale destacar ainda que essa parábola tem mínimo igual – 4, que é a ordenada do vértice.

4. Dados e Resultados:

A proposta aqui destacada é resumo de uma abordagem para tratamento da função polinomial do 2º grau na qual defendo que seja estendida a todas as funções estudadas na educação básica, tanto no 9º ano como no Ensino Médio. Esse trabalho foi proposto em turmas do 2º ano do Ensino Médio, do colégio de Aplicação da UFRJ. Trabalhei todas as funções utilizando os recurso do Geogebra e utilizando a abordagem aqui destacada. Ao finalizar o estudo das funções polinomiais do 1º e 2º graus, exponenciais e logarítmicas, propus o seguinte trabalho:

Construam logotipos de empresas, marcas ou símbolos conhecidos com o auxílio do Geogebra. TODAS as construções (retas ou curvas) devem ser feitas por meio funções de domínio restrito. Utilizem os conceitos de rotação, translação e/ou homotetia, se necessário. Devem ser entregue um relatório contendo o passo a passo das construções, as funções utilizadas e seus respectivos dominós.

Os resultados foram surpreendentes, vejamos alguns:

Os trabalhos apresentados foram reunidos em um vídeo que foi enviado para o festival internacional “Math + Science Performance Festival”, promovido pela Universidade de Ontário, no Canadá. O vídeo foi premiado e está disponível no link: *http://www.edu.uwo.ca/mpc/mpf2011/mpf2011-M10.html.*

5. Conclusões

Em termos práticos pude observar excelentes resultados com os alunos do CAP UFRJ, Colégio de São Bento RJ, onde trabalhei e atualmente na Escola Parque RJ e na Escola Municipal Joaquim da Silva Peçanha, em Duque de Caxias. Colegas professores de física, ao receberem esses alunos no 1° ano do EM, também relataram ótimos resultados na solução e interpretação de problemas físicos que exigem o conhecimento e a interpretação de gráficos.

O trabalho proporcionou o amadurecimento dos conteúdos estudados, os alunos se mostraram muito motivados, ganharam autoconfiança e as avaliações foram muito positivas. Concluí-se também que a utilização do software não foi suficiente para abordagem dos conteúdos. Não estou propondo a substituição das aulas tradicionais por aulas que façam uso exclusivo das novas tecnologias, mas sim que as novas tecnologias sirvam de apoio e auxílio no aprendizado. Nas últimas décadas, o mundo em que vivemos está passando por diversas mudanças, porque não mudarmos nossas aulas também.

6. Referências bibliográficas

BECKER, F. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre, RS: Artmed, 2001.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. *SBEM*, ano II, n.2, 1996.

GRAVINA, M.A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**, Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG, 2006.

SANTAROSA, L.M.C. **Formação de professores em Informática na Educação**, Actas do II Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, Lisboa/Portugal,1995, vol.II, .p. 22-23.

WERNECK, V. R. **Sobre o processo de construção do conhecimento: O papel do ensino e da pesquisa.** 2006, disponível em http://www.scielo.br/pdf/ensaio/v14n51/a03v1451.pdf. Acessado em 06/01/2012.