ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL RESOLVENDO PROBLEMAS DE PERMUTAÇÃO A PARTIR DE INTERVENÇÕES

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (EMAIEFEM) – GT 10

MONALISA CARDOSO SILVA
Universidade Federal de Pernambuco
monalisacardoso08@yahoo.com.br

CRISTIANE AZÊVEDO DOS SANTOS PESSOA
Universidade Federal de Pernambuco
cristianepessoa74@gmail.com

RESUMO

Este estudo visou à análise do desempenho de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de permutação a partir de intervenções baseadas em estratégias observadas em estudos anteriores, com destaque para quatro pilares: a *listagem de possibilidades* como estratégia, a *sistematização* da listagem, o enfoque nas propriedades *invariantes* do problema e a *generalização*, envolvendo os quatro problemas combinatórios (produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação). Aplicaram-se pré-teste, intervenções e pós-teste. Observaram-se avanços significativos quanto à resolução dos problemas de permutação após as intervenções, os alunos conseguiram perceber as regularidades do problema e chegar à generalização dos mesmos. Os estudantes pesquisados desenvolveram um raciocínio combinatório eficiente neste tipo de problema, que pode ser trabalhado desde cedo.

Palavras- chaves: Permutação, Estratégias Bem Sucedidas, Intervenções

1. Introdução

Pessoa e Silva (2012) afirmam que é possível desenvolver o raciocínio combinatório antes da introdução formal deste conteúdo na escola, pois os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos.

O que se percebe atualmente é que esse conhecimento matemático geralmente só é introduzido formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Sobre isso Pessoa e Borba (2009) apontam que apenas o do tipo *produto cartesiano* é trabalhado explicitamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) recomendem que os diferentes tipos de problemas combinatórios sejam propostos aos alunos desde o início do processo de escolarização, sem ênfase na formalização, mas a partir de um trabalho com problemas que envolvam escolha e contagem.

Entretanto mesmo esse conhecimento não sendo trabalhado sistematicamente nos anos inicias do Ensino Fundamental, pesquisas apontam que é possível que as crianças, desde cedo, através de estratégias de resolução, desenvolvam uma compreensão acerca da Combinatória.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Borba (2009) apresenta como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Estas estratégias eram, por vezes, bem sucedidas em encontrar soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas em se chegar ao resultado final correto.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011) também encontrou diversas estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Neste estudo as autoras levantaram, além das estratégias, as explicações dos alunos pesquisados sobre a compreensão que os mesmos tiveram acerca de cada problema combinatório, sendo possível verificar quais as dificuldades/facilidades dos alunos em relação aos invariantes de cada situação.

No presente trabalho foram utilizadas estratégias bem sucedidas, como as desenvolvidas pelos alunos pesquisados em Pessoa e Borba (2009) e em Pessoa e Santos (2011) como ponto de partida para a elaboração e execução de intervenções que possam auxiliar no ensino-aprendizagem da Combinatória com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, investigando o desempenho dos mesmos na resolução de problemas de permutação.

2. Referencial Teórico

2.1 Resolução de problemas

Para Vergnaud (1990) um problema se relaciona a qualquer situação, seja no âmbito escolar ou fora dele, que, na busca de sua solução, traz a necessidade de descobrir relações e de explorá-las, de elaborar hipóteses e verificar essas hipóteses. Ele defende que no caso do conhecimento matemático, o processo de elaboração de relações por ele discutidas assume sentido ao fazer parte de estruturas mais amplas e complexas em momentos evolutivos posteriores (Vergnaud, 1990). Este estabelecimento de relações se torna possível em situações desafiadoras como as propostas em problemas.

A partir da Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1990) considera que existem muitos fatores que influenciam na formação e desenvolvimento dos conceitos, que surgem a partir de problemas a resolver. Portanto, é necessário que se ofereçam situações diversas para a resolução de problemas, para que, assim, os alunos possam fazer reflexões, estabelecendo relações e construindo novas aprendizagens.

Para Vergnaud (1990) um conceito é formado por *significados, invariantes e representações simbólicas*. O tipo de problema, em termos de *significado*, é uma variável importante no processo de resolução e compreensão de um conceito, pois, dependendo do problema, o aluno utiliza relações lógicas diferentes, alguns são mais simples e outros mais complexos do ponto de vista do cálculo relacional (Vergnaud, 1991), ou seja, do ponto de vista da compreensão da lógica do problema. A forma de *representar* um problema também reflete a maneira como o aluno o está compreendendo. Assim, o tipo de problema poderá também gerar formas diferentes de *representação*. Por estas razões, é necessário que a escola esteja atenta à necessidade de diversificação das situações para que o aluno possa pensar sobre um determinado conceito a partir de diferentes perspectivas. Os diferentes *invariantes* – relações e propriedades – também interferem na forma de compreensão por parte do aluno, pois se consegue percebê-los, a interpretação de um problema pode ser uma, e, se não há consciência dos invariantes envolvidos no conceito, a maneira de lidar com o problema é outra.

2.2 Conceitos e definições da Combinatória

A Combinatória permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um (Pessoa e Borba, 2009). Assim, o *raciocínio combinatório* é um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

2.3 Significados da Combinatória

Baseadas em Merayo (2001) e classificações anteriores (Nunes e Bryant, 1997; Vergnaud, 1983 e 1991 e Brasil - PCN, 1997), Pessoa e Borba (2008) classificam os problemas que envolvem *raciocínio combinatório* em uma organização única. Os problemas de *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação* foram, por essas pesquisadoras, considerados como característicos do pensamento combinatório, contribuindo, dessa forma, para a reflexão teórica da necessidade de se considerar este conjunto de problemas no ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Básico. A seguir estão colocados os significados presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e *invariantes* (relações e propriedades que se mantêm constantes):

- <u>Produto Cartesiano</u>

Ex.: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos e 4 meninas que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Invariantes: (1) dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

- <u>Permutação</u>

Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

Invariantes: (1) todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

- <u>Arranjo</u>

Ex.: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Invariantes: (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

- <u>Combinação</u>

Ex.: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Invariantes: (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0< p < n$, p e n naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Os problemas podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de *representação*: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras. As diferentes simbologias ocorrem tanto no que se refere às formas como os alunos resolvem as questões, quanto à forma como a questão é apresentada para ser resolvida.

Destacamos os invariantes e os colocamos como um dos pontos de partida para as intervenções, pois acreditamos que os mesmos são elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da Combinatória, ou seja, em cada tipo de problema combinatório.

Desta forma, pretende-se partir de estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos pesquisados por Pessoa, Borba e Santos (2011) e por Pessoa e Borba (2009), ao resolverem problemas combinatórios e através da explicitação dos invariantes de cada tipo de problema analisar o desempenho dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental entre o pré-teste, intervenções e pós-teste, com relação aos problemas de permutação, considerado um dos mais difíceis de resolver (CORREIA e OLIVEIRA, 2011).

3. Metodologia da Pesquisa

Foram realizadas intervenções com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de estratégias bem sucedidas desenvolvidas por estudantes pesquisados por Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011). O estudo foi constituído de pré-teste, intervenções e pós-teste, buscando-se analisar, em especifico, o desempenho dos alunos com relação aos problemas de permutação.

O estudo foi realizado com alunos de duas turmas de 9º ano de uma escola pública, escolhidas aleatoriamente para ser uma o Grupo Experimental (GE) e outra o Grupo Controle (GC).

Foram feitas duas intervenções com cada grupo. Com o GC, a intervenção constou de ensino de resolução de problemas multiplicativos de um modo geral e de problemas de raciocínio lógico. Com o GE, a intervenção constou de ensino de resolução de problemas combinatórios, com destaque para quatro pilares percebidos como eficazes em estudos anteriores (Pessoa e Borba, 2009 e Pessoa e Santos, 2011): *listagem de possibilidades* como estratégia, explicitação dos *invariantes*, *sistematização* da listagem e *generalização.*

Nas duas sessões de intervenção com o GE foram mesclados os quatro tipos de problemas combinatórios. Na primeira foram trabalhados problemas dos tipos produto cartesiano e permutação e na segunda sessão foram trabalhados problemas dos tipos combinação e arranjo. Buscou-se trabalhar problemas com números cujos resultados levem a grandezas menores (até 10) e maiores (até 30) para os alunos buscarem uma generalização – via Princípio Fundamental da Contagem ou a percepção de regularidade, por exemplo.

Trabalhou-se da seguinte forma: foi resolvido com os alunos (no quadro-negro) o primeiro problema, havendo destaque para os invariantes do mesmo. Após esse momento, pediu-se que eles respondessem, individualmente, o segundo problema. Nesse momento, a intenção era a de que fossem retiradas as dúvidas dos alunos, podendo haver uma explicação mais individualizada àqueles que assim desejassem. Dado o tempo para que eles respondessem o problema posterior, foi feita a resolução no quadro, com participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro e quarto problemas. Tal modo de intervenção ocorreu de forma similar com cada um dos tipos de problemas Combinatórios, nas duas sessões.

Para caracterizar a intervenção, será tomada como exemplo uma das situações-problema trabalhadas:

Permutação - Problema: *Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?*

Escrevendo os nomes "pai", "mãe" e "irmão" no quadro, foi perguntado aos alunos quais arrumações eram possíveis.

Supondo que estavam no quadro as seguintes possibilidades: "pai, mãe e irmão; mãe, pai e irmão; irmão, mãe e pai", que eram as comumente apresentadas por aqueles que já estavam em um nível de compreensão mais desenvolvido, se em comparação com as que citam apenas uma possibilidade, perguntava-se: "Mas só tem essas possibilidades? O porta-retrato do pai só pode vir em primeiro lugar uma vez, que é acompanhado da mãe e do irmão?", "Será que não tem outras formas de organizar?" Essas questões, de certa forma, enfatizam um dos *invariantes* da Permutação, segundo o qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Ao término do problema, quando já haviam sido escritas todas as possibilidades, era feita a *generalização*, junto com eles. "Quantas possibilidades nós temos nas quais aparecem o pai em primeiro lugar?" Feita a contagem, eles diziam: "duas". Alguns dos alunos já percebiam, nesse momento, que para os demais elementos também haveria duas possibilidades, chegando à conclusão de que a multiplicação 2x3 também resolvia ao problema, sem que fosse necessário escrever todas as possibilidades. No momento da intervenção, era possível perceber que tais invariantes eram percebidos com aparente clareza pelas crianças, que não demonstravam maiores dificuldades no entendimento.

Estando todos os problemas resolvidos, buscou-se também fazer a comparação entre os dois tipos de problemas trabalhados durante a aula, havendo destaque para as semelhanças e diferenças existentes entre os mesmos.

Após as intervenções, foi aplicado o pós-teste com o Grupo Experimental e o Grupo Controle que seguia a mesma natureza e quantidade de questões dos problemas do pré-teste.

A análise de dados feita no presente artigo é um recorte referente apenas aos problemas de permutação. Desta forma, foram feitas as correções de forma quantitativa, buscando perceber se houve avanço no desempenho dos alunos do pré-teste para o pós-teste na resolução dos problemas de permutação. Esse comparativo ainda foi realizado entre o Grupo Experimental e o Grupo Controle, buscando comprovar a eficácia das intervenções através do ensino de Combinatória por estratégias bem sucedidas desenvolvidas por outros alunos, ainda no Ensino Fundamental.

4. Dados e Resultados

Após as coletas de dados terem sido realizadas, os principias resultados obtidos foram analisados de forma a perceber os avanços dos alunos na quantidade de acertos nos problemas de permutação entre o pré-teste e o pós-teste.

A Tabela 1 a seguir mostra o desempenho dos alunos do Grupo Experimental entre o pré-teste e o pós-teste:

Tabela 1: Comparação do percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste pelo Grupo Experimental

Testes	**PERCENTUAL DE ACERTOS POR PROBLEMAS**	
	P-	P+
Pré-teste	31,25	6,25
Pós-teste	75	50

P-= Permutação com números que levam um uma menor quantidade de possibilidades; P+= Permutação com números que levam um uma maior quantidade de possibilidades.

Visualizando a Tabela 1 acima, é possível perceber que no pré-teste, os alunos apresentaram um percentual de acertos muito baixo nos problemas de permutação, principalmente quando a resposta exigia um número de possibilidades maior.

No estudo de Pessoa e Santos (2011), o problema de permutação aparece como sendo o segundo mais difícil de ser resolvido pelas crianças. No estudo atual, mesmo sendo realizado com alunos com um nível de escolaridade mais avançado, este tipo de problema ainda se apresenta como mais difícil de resolver.

Segundo Correia e Oliveira (2011) o problema de permutação é o tipo de maior dificuldade para se resolver, pois, de acordo com Piaget e Inhelder (1951) esse tipo de problema envolve uma operação de segunda ordem, uma vez que se trata não só da realização de trocas de ordem, mas da multiplicação das trocas de ordem. No caso das noções de combinação e arranjo é diferente, pois importa coordenar duas operações entre si: a seriação e a correspondência.

Entretanto com o grupo pesquisado, após as intervenções com foco nos quatro pilares adotados, foram observados avanços importantes no desempenho dos alunos nesse tipo de problema, como apresentam os exemplos a seguir:

4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

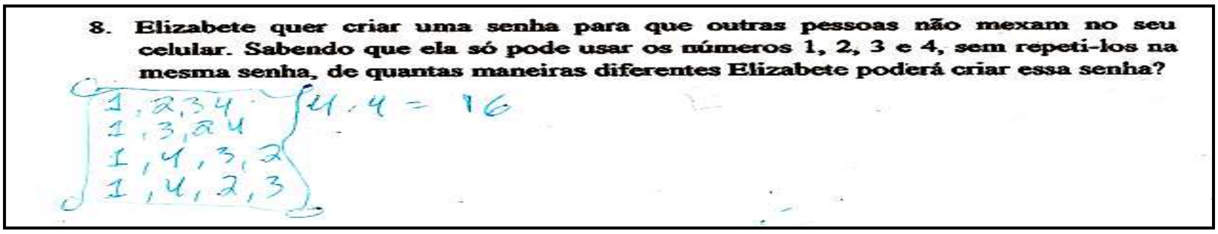
É só botar um do lado do outro

Figura 1 - Solução do Aluno 2 para o problema de permutação com número menor de possibilidades no pré-teste, com resposta incorreta sem relação combinatória

2) Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

RVA VAR AVR
RAV VRV ARV = 6

Figura 2 - Solução do Aluno 2 para o problema de permutação com número menor de possibilidades no pós-teste, com resposta correta com listagem sistemática

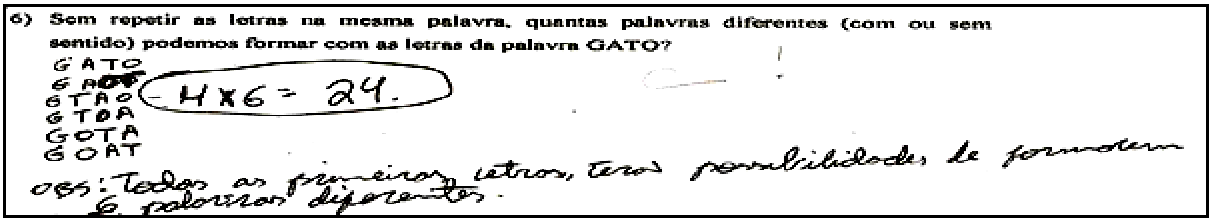


8. Elizabete quer criar uma senha para que outras pessoas não mexam no seu celular. Sabendo que ela só pode usar os números 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los na mesma senha, de quantas maneiras diferentes Elizabete poderá criar essa senha?

1,2,3,4
1,3,2,4
1,4,3,2
1,4,2,3

4 . 4 = 16

Figura 3 - Solução do Aluno 10 para o problema de permutação com número maior de possibilidades no pré-teste, com resposta incorreta com listagem não sistemática



6) Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?

GATO
GAOT
GTAO
GTOA
GOTA
GOAT

4 x 6 = 24.

obs: Todas as primeiras letras, terão possibilidades de formarem 6 palavras diferentes.

Figura 4 - Solução do Aluno 10 para o problema de permutação com número maior de possibilidades no pós-teste, com resposta correta com generalização

Diante desses exemplos é possível perceber que além no acréscimo no número de acertos, os alunos apresentaram resoluções e estratégias mais elaboradas que explicitam a compreensão que os mesmo obtiveram sobre os *invariantes* do problema. A percepção de regularidades e a chegada à *generalização* é um aspecto significativo dos resultados das intervenções, pois nos problemas com maior possibilidade, muitos alunos resolveram sem precisar listar todas as possibilidades, como visto na Figura 4.

O avanço das intervenções ainda é considerado válido, quando comparamos com os resultados apresentados pelo Grupo Controle na Tabela 2.

Tabela 2: Comparação do percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste pelo Grupo Controle

Testes	**PERCENTUAL DE ACERTOS POR PROBLEMAS**	
	P-	P+
Pré-teste	7,69	0
Pós-teste	15,38	0

P-= Permutação com números que levam um uma menor quantidade de possibilidades; P+= Permutação com números que levam um uma maior quantidade de possibilidades.

Neste grupo com o qual, no decorrer das intervenções foram trabalhadas estruturas multiplicativas e problemas de lógica matemática, apresentaram no pós-teste resultados semelhantes ao pré-teste com relação aos tipos de respostas, estratégias utilizadas e quantidade de acertos. Através disso, é importante ressaltar que o trabalho com estruturas multiplicativas de uma forma geral, não é suficiente pra o aprendizado da Combinatória.

Desta forma, percebendo as características deste tipo de problema e sabendo a estratégia adequada para a resolução, os alunos, na sua maioria, apresentaram êxito na compreensão e no desempenho na resolução dos problemas de permutação.

5. Conclusões

Diante do que foi observado, pode-se concluir que os alunos, a partir das intervenções realizadas, conseguiram alcançar um avanço expressivo quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório referente aos problemas de permutação, apresentando aumentos importantes no quantitativo de acertos de questões entre os testes, assim como na qualidade das respostas, explicitando a compreensão que os mesmos apresentam dos problemas.

Foi possível perceber que através do ensino enfatizando a *listagem* como estratégia, a *sistematização* da listagem, o enfoque nas propriedades *invariantes* de cada significado de problema e a *generalização*, os alunos conseguiram compreender com maior facilidade as características deste tipo de problema, apresentando resoluções que apontam essa compreensão com respostas com grandezas menores e maiores, utilizando as estratégias trabalhadas nas intervenções e obtendo êxito nas respostas.

Fica claro, que mesmo não sendo o ano escolar no qual a combinatória é trabalhada regularmente com os alunos, apresentar desde cedo esse conteúdo, os alunos têm a capacidade de aprender de forma consistente este conhecimento tão importante para a sua formação.

O trabalho oferece uma pertinente contribuição à compreensão dos processos cognitivos acerca do raciocínio combinatório. Desta forma, ao menos dois grupos podem se beneficiar do contato com esse tipo de trabalho: os professores, que terão mais elementos para superar as dificuldades ao abordarem o tema em suas aulas e os alunos, que terão docentes mais conscientes e sabedores de caminhos alternativos para o ensino desse conhecimento tão importante para sua formação.

6. Referências

BRASIL, MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos*. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CORREA, J.; OLIVEIRA, G. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. EDUCAR REVISTA, Curitiba, n. Especial 1, 2011. <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S010440602011000400006&nrm=iso&tlng=pt>Acesso em 28/08/2012

MERAYO, F. *Matemática Discreta.* Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A origem da ideia de acaso na criança***.** Tradução de: COELHO, A. M. Rio de Janeiro: Record, 1951.

PESSOA, C.; BORBA, R. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? In: 2º. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2008. Recife. Anais... Recife, 2008, pp. 221-242.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. ZETETIKÉ (UNICAMP), Campinas, v. 17, n. 31. 2009.< http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=246> Acesso em 28/08/2012.

PESSOA, C.; SANTOS, L. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011. Recife. Anais... Recife, 2011, pp. 1-12.

PESSOA, C.; SILVA, M. Invariantes, Generalização, Sistematização e Estratégias Bem Sucedidas: O ensino de Combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental. In: 3º. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012. Fortaleza. Anais... Fortaleza, 2012, pp. 1-13

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics: Concepts and processes.* New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Mexico: Trillas, 1991.