ESTUDO DAS SITUAÇÕES DE VOLUME COMO GRANDEZA NO ENSINO MÉDIO SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (EMAIEFEM) – GT 10

Leonardo Bernardo de MORAIS
Universidade Federal de Pernambuco
leonardob.morais@gmail.com

Ana Paula Nunes Braz FIGUEIREDO
Universidade Federal de Pernambuco
apnbf@yahoo.com.br

Paula Moreira Baltar BELLEMAIN
Universidade Federal de Pernambuco
paula.baltar@terra.com.br

RESUMO

Neste trabalho, de natureza teórica, apresentamos um estudo sobre o conceito de volume sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e colaboradores, tendo como objetivo analisar tipologias de situações que dão sentido a volume. Adotamos como hipótese didática que volume deve ser considerado como grandeza. Tal hipótese é herdada das pesquisas de Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian sobre área de figuras planas. Foram elaboradas tipologias de situações que dão sentido ao conceito de volume, tomando como exemplo a situação de medida. Dentre os resultados, para a compreensão de volume como grandeza, observou-se a necessidade de se trabalhar os diversos tipos de situações, bem como o uso de representações variadas como a gráfica, as vistas planas e o nome do sólido em linguagem materna.

Palavras- chaves: grandezas e medidas, volume, teoria dos campos conceituais.

1. Introdução

O trabalho com comprimento, área e volume no ensino fundamental e médio foi marcado durante um longo período por uma ênfase exagerada na conversão de unidades e na utilização de fórmulas. Pesquisas em Educação Matemática (DOUADY e PERRIN-GLORIAN, 1989; BARROS, 2002; OLIVEIRA, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; LIMA e BELLEMAIN, 2010, por exemplo) vem sinalizando a existência de entraves na aprendizagem desses conteúdos e sugerem que a abordagem de comprimento, área e volume como grandezas contribui para superá-los.

As grandezas geométricas são estudadas na escola ao longo de toda a educação básica, desde a educação infantil até o ensino médio, partindo de uma abordagem mais intuitiva e pouco a pouco conduzindo a consolidação, ampliação e aprofundamento das habilidades e das competências do aluno a respeito deste campo.

A inclusão desse campo no currículo do ensino fundamental e médio é justificada por sua relevância social, por possibilitar a integração entre os vários tópicos programáticos da matemática escolar (sistema de numeração, medidas, operações com números racionais, geometria) e por favorecer a integração da matemática com outras disciplinas como a física e a química, por exemplo.

Para cumprir esse papel, é preciso que a abordagem de comprimento, área e volume seja robusta, o que inclui compreender a relação delicada entre os aspectos geométricos, numéricos, algébricos e aqueles próprios da noção de grandeza. A partir do trabalho das pesquisadoras francesas Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) e estudos posteriores como Oliveira (2002) e Lima e Bellemain (2010), por exemplo, defende-se que é preciso dissociar e articular esses aspectos para favorecer a construção de conhecimentos sólidos sobre as grandezas geométricas. Privilegiar demasiadamente os aspectos numéricos e algébricos não permite ao aluno lidar com a amplitude de problemas postos no campo em foco.

Apesar disso, ainda se observa nos livros didáticos do ensino médio de acordo com a avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011) que problemas que envolvem volume ainda dão ênfase a aplicações da álgebra, o que permite ao aluno pouca visualização espacial para compreensão de volume. O guia do livro didático sugere que seria interessante explorar outras perspectivas para representação dos objetos, pois algumas ilustrações apresentam falhas que dificultam a visualização.

É evidente que as fórmulas são ferramentas importantes para o cálculo de volume e de outras grandezas geométricas. Mas seu uso mecânico, sem a compreensão de seu significado, bem como a aplicação exagerada destas na resolução de problemas envolvendo perímetro, área e volume têm se mostrado ineficazes e geradores de entraves, como por exemplo, a omissão ou o uso inadequado de unidades de volume (OLIVEIRA, 2002).

Este trabalho propõe uma discussão teórica sobre a construção do conceito de volume sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) e se apoia nas hipóteses didáticas que provêm das pesquisas desenvolvidas por Douady e Perrin-Glorian (1989), as quais distinguem três quadros para compreensão do conceito de área como grandeza: o quadro numérico, o quadro das grandezas e o quadro geométrico.

Portanto, este artigo objetiva analisar tipologias de situações que dão sentido ao conceito de volume e, mais especificamente, identificar variáveis e estratégias que intervém na resolução das tarefas relativas a volume, tomando como exemplo situações de medida.

2. Referencial teórico

Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

Um campo conceitual, segundo Vergnaud (1990), é um conjunto de situações que requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. O campo conceitual em foco nessa pesquisa é o das grandezas geométricas e suas medidas, o qual inclui comprimento, área, volume, procedimentos de resolução de problemas relativos a esses conceitos e representações simbólicas em jogo nos problemas sobre esses conteúdos.

Para a análise do objeto de estudo levamos em consideração a organização conceitual elaborada por Douady e Perrin-Glorian (1989) para a construção do conceito de área e transposta em pesquisas posteriores (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008; LIMA e BELLEMAIN, 2010) para o conceito de volume, conforme a seguir:

Quadro geométrico: constituído por objetos geométricos tridimensionais.

Quadro numérico: constitui a medida, que também pertence ao conjunto dos números reais não negativos.

Quadro das grandezas: lugar próprio do conceito de volume, o qual é caracterizado como classes de equivalência de objetos de mesmo volume.

O volume não corresponde ao objeto geométrico, pois diferentes sólidos podem ter mesmo volume, embora sejam qualitativamente diferentes. O volume também não é um número, pois ao alterar a unidade de volume se obtém medidas distintas para um mesmo solido embora seu volume não se altere. A proposta das pesquisas supracitadas é que no ensino se deve situar o volume como grandeza, como atributo de figuras tridimensionais passível de ser medido, com diferentes unidades de volume e que, portanto deve se distinguir ao mesmo tempo dos sólidos e das medidas.

Ao medir o volume de um objeto, será necessário atribuir um número que irá compor o campo numérico e uma unidade de medida escolhida para a medição que irá compor o campo das grandezas geométricas. Desta forma, podemos observar que para a construção de um conceito de grandeza geométrica é importante para o aluno saber relacionar os campos numérico e geométrico e associá-los ao campo das grandezas.

Outro aspecto importante é que a compreensão de volume exige que os alunos distingam as diferentes grandezas geométricas e que ao mesmo tempo sejam capazes de articula-las, por exemplo, ao utilizar as fórmulas que envolvem as diferentes grandezas.

A partir de trabalhos anteriores (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008) podemos observar alguns entraves na compreensão de volume: confusão entre as grandezas (natureza, instrumento de cálculo ou variação), uso inadequado de unidades ou ausência do uso de unidades, desconhecimento da fórmula, dificuldade na identificação das medidas a serem utilizadas no cálculo, dificuldades no cálculo numérico e dificuldades no manejo com números racionais.

Na busca de melhor entender a construção do sentido de volume, vamos utilizar a noção de conceito proposta dor Vergnaud (1990). Para ele, a constituição de um conceito depende de três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas. O conceito é, então, definido por C= {S, IO, Σ}, onde:

– S = conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);
– IO = conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), sobre os quais se apóiam a operacionalidade dos esquemas (variável psicológica);
– Σ = conjunto de representações simbólicas utilizadas/possíveis, tanto para apresentação quanto para resolução do problema (possibilidade de representação simbólica do conceito).

Desta maneira, o conceito é um conjunto constituído por situações de referência, por invariantes operatórios e sistemas de representação simbólica.

Isso implica que para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente, ou seja, não se pode reduzir o significado nem aos significantes nem às situações. Assim, um único conceito não se refere a um só tipo de situação e uma única situação não pode ser analisada com um só conceito.

Segundo Vergnaud (1990) esquema é a organização da conduta para certa classe de situações. Teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operatórios, logo, são componentes essenciais dos esquemas, são os conhecimentos contidos nos esquemas. Teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante.

Estudo de situações que dão sentido a volume

Diante de um levantamento sobre situações em estudos que tinham como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008), classificamos as situações que dão sentido a volume em:

- **Comparação**: consiste em determinar, entre um dado conjunto de sólidos, qual deles tem maior/menor ou igual volume;
- **Medida**: trata-se de atribuir um número ao volume de um sólido;
- **Produção**: caracteriza-se pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado;
- **Transformação de unidades**: consiste em medir um sólido usando unidades diferentes e/ou transformar uma unidade de volume dada em outra;
- **Operacionalização de volumes**: consiste em adicionar/subtrair volumes ou efetuar uma multiplicação/divisão de volume com um escalar.

Para exemplificar este estudo trataremos as situações de medida, as quais de acordo com a revisão de literatura são as mais trabalhadas em sala de aula.

Situações de medida de volume permitem a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. Ao calcular o volume de um sólido, o aluno passa do quadro geométrico para o numérico e ao reconhecer a medida como sendo da grandeza volume, passa pelo quadro das grandezas. Nesse tipo de situação, o cálculo de volume pode ser resolvido por meio de estratégias como: contagem de unidades (sólidos unitários), fórmula, princípio de Cavalieri, imersão, preenchimento e transvasamento.

3. Metodologia da pesquisa

Os problemas seguintes exemplificam situações de medida. Esses problemas foram elaborados por Figueiredo (2012)[1] e aplicados ao um grupo de 18 alunos de uma escola da rede privada da cidade do Recife. Os dados obtidos ilustram as estratégias e as variáveis das situações de medida e permitem identificar os invariantes em jogo.

1) Um tanque em forma de paralelepípedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque? Justifique sua resposta:

Nessa atividade não há representação gráfica do sólido, trata-se de um sólido comum, uma vez que no ensino fundamental os alunos já lidam com problemas dessa natureza, apresenta uniformidade das unidades de medida e o domínio numérico são os números inteiros positivos. O fato de as medidas de comprimento serem inteiras permite a estratégia de decompor mentalmente o paralelepípedo em cubinhos unitários e contar camadas, linhas e colunas.

Dentre os possíveis erros, pode haver respostas sem a unidade de medida, com unidade de medida de área (m^2) ou de comprimento (m), indicando entrave na passagem do quadro numérico para o quadro das grandezas. O aluno pode ter dificuldade em reconhecer um paralelepípedo retângulo, confundindo-o com outro sólido geométrico ou até mesmo não o reconhecendo, o que mostra dificuldades em relação ao quadro geométrico.

2) A base de uma pirâmide é um quadrado de lado 5 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide mede 6 cm, calcule o volume dessa pirâmide. Dada a fórmula do volume da pirâmide:

$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$**. (onde:** S_b **é a área da base e** ***h*** **é a altura)**

[1] Dissertação de mestrado em construção no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

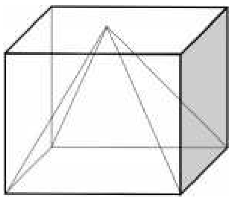
Justifique sua resposta:

A natureza dos números (números naturais) e a homogeneidade da unidade dos comprimentos (há apenas o centímetro como unidade de medida de comprimento) são variáveis relevantes para a resolução do problema.

Esta atividade não mostra a representação gráfica da pirâmide, mas apresenta a fórmula do seu volume e com isso, caso os alunos consigam articular os quadros geométrico, numérico e das grandezas, conseguirão resolver a questão corretamente. Porém, para resolução da mesma, fica evidente a independência da representação simbólica do sólido geométrico, pois se trata exclusivamente da interpretação da fórmula de volume e do uso correto das unidades de medida.

A estratégia utilizada pelos alunos para a resolução deste problema é o emprego da fórmula de volume da pirâmide. Se o aluno consegue empregar corretamente a fórmula dada, chegará ao resultado de $50cm^3$, correspondendo ao volume da referida pirâmide. Porém, se desconhece a fórmula da área da base da pirâmide, poderá considerar apenas o comprimento de um lado de sua base e a sua altura, ficando desta forma: $V = \frac{1}{3} \cdot 5.6 = 10$.

3) Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):



a) 200
b) 2,5
c) 370
d) 7,5
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

O aluno pode resolver o problema através da relação entre os volumes da pirâmide e do prisma, obtendo como resposta aproximadamente 2,5 milhões de metros cúbicos que equivale a um terço do volume do prisma. A ordem de grandeza (milhões) também pode interferir na resolução da atividade.

4) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8m de comprimento, 5m de largura e 120 cm de profundidade. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

a) 48 000 litros.

b) 48 litros.

c) 133 m^3.

d) 14,2 m^3.

e) OUTROS.

Justifique sua resposta:

Nesse problema o aluno precisa reconhecer a fórmula de volume de um paralelepípedo retângulo e aplicar a transformação das unidades de medida. Assim, há a passagem do quadro numérico para o quadro das grandezas (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989). Algumas dificuldades podem emergir da heterogeneidade das unidades, das medidas racionais e da ausência da figura. Portanto, podem ocorrer os possíveis erros: não atribuição da unidade de medida ou seu uso inadequado, pois embora a fórmula de volume do paralelepípedo retângulo seja usual, mas se faz necessário aplicar a transformação das unidades de medida de volume. Também pode utilizar erroneamente o princípio aditivo para o cálculo do volume.

4. Dados e resultados

As quatro atividades foram analisadas a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e da modelização didática dos quadros proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989).

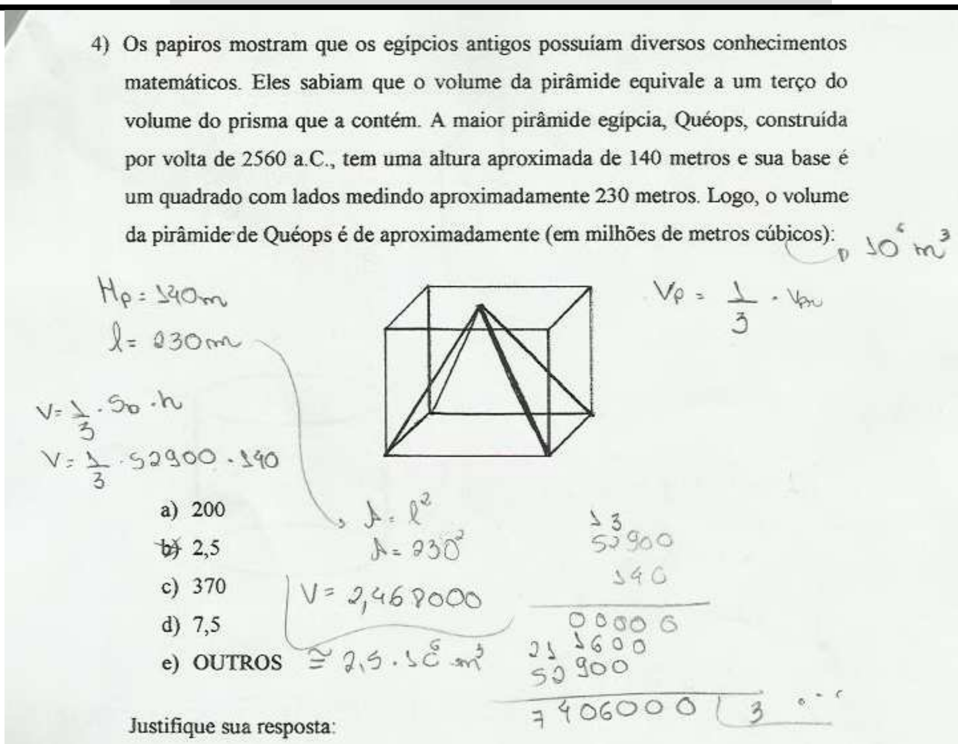
Em relação à primeira, um aluno não atribuiu a unidade de medida e outro errou nos cálculos. O não reconhecimento do sólido foi observado em dois protocolos, onde um confundiu o paralelepípedo com o cilindro e o outro com um prisma triangular. Os extratos dos alunos que confundem os sólidos podem ilustrar lacuna nos conhecimentos geométricos.

Nos acertos, quatro recorreram à representação gráfica e todos mobilizaram a fórmula como estratégia.

Na segunda, dentre as respostas erradas, $v = 10\ cm^3$ foi respondida por três alunos, dois não atribuíram a unidade de medida e um apresentou uma unidade de comprimento. Infere-se, a partir desses dados, a pouca compreensão no reconhecimento das variáveis pertinentes para resolver o problema e uma tímida compreensão de volume enquanto grandeza. A dificuldade em expressar o volume utilizando as unidades corretas ilustra a confusão entre o quadro numérico e o da grandeza.

Na atividade 3, um aluno não identificou as variáveis corretamente, embora tenham reconhecido a fórmula e a unidade de medida e três não identificaram a fórmula do volume. Nesse caso, a quantidade de erros pode ter sido decorrente da ordem de grandeza dos números (milhões), o que dificultou o cálculo do volume do sólido. Os erros de calculo remetem ao campo numérico.

Seis alunos recorreram à fórmula e um usou a relação entre o volume da pirâmide e do prisma, conforme extrato abaixo:



4) Os papiros mostram que os egípcios antigos possuíam diversos conhecimentos matemáticos. Eles sabiam que o volume da pirâmide equivale a um terço do volume do prisma que a contém. A maior pirâmide egípcia, Quéops, construída por volta de 2560 a.C., tem uma altura aproximada de 140 metros e sua base é um quadrado com lados medindo aproximadamente 230 metros. Logo, o volume da pirâmide de Quéops é de aproximadamente (em milhões de metros cúbicos):

a) 200
b) 2,5
c) 370
d) 7,5
e) OUTROS

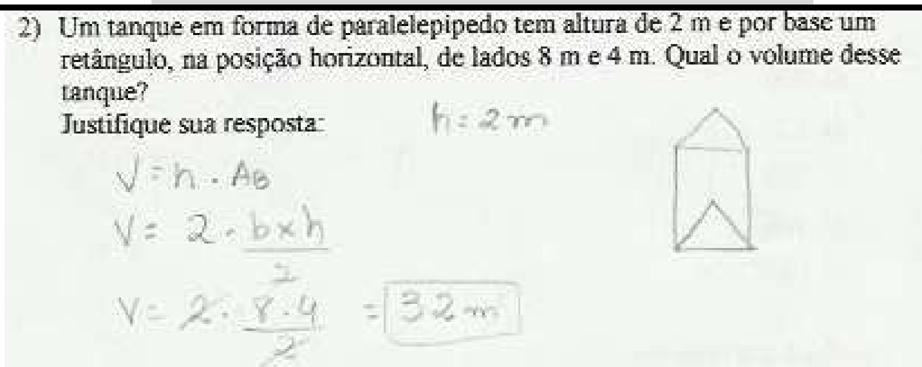
Justifique sua resposta:

Figura 1

Na atividade 4, três alunos não conseguiram converter corretamente as unidades. O princípio aditivo para o cálculo do volume foi observado em uma resposta e apenas um aluno não reconhece a fórmula de volume do sólido.

Observou-se, portanto, que em situações de medida a fórmula é a estratégia mais recorrente, sendo usada na maioria das vezes de modo correto. Os erros relacionados ao cálculo revelam dificuldades no quadro numérico.

As representações simbólicas são, de fato, importantes, pois muitos alunos durante a resolução das questões, mesmo na ausência da figura, desenharam o sólido. Foram observados também erros decorrentes da ausência da figura, uma vez que alguns sujeitos não associaram adequadamente a representação gráfica e a linguagem materna, conforme extrato a seguir:


2) Um tanque em forma de paralelepipedo tem altura de 2 m e por base um retângulo, na posição horizontal, de lados 8 m e 4 m. Qual o volume desse tanque?
Justifique sua resposta:

h = 2 m

$V = h \cdot A_B$

$V = 2 \cdot \frac{b \times h}{2}$

$V = 2 \cdot \frac{8 \cdot 4}{2} = \boxed{32\,m}$

Figura 2

As produções dos alunos ilustram alguns elementos de volume em situações de medida. A fórmula foi a estratégia mais recorrente, sobretudo pela natureza das atividades propostas.

A representação gráfica dos sólidos foi bastante mobilizada, indicando ser esse aspecto um suporte potencial para os estudantes. Nesse sentido, entendemos ser importante para a compreensão do conceito de volume uma abordagem articulada entre a representação gráfica dos sólidos e outros tipos de representação, bem como atividades que possibilitem o aluno fazer relações pertinentes entre o sólido, sua representação e a fórmula que permita calcular seu volume.

Para finalizar, entendemos serem necessárias abordagens que contemplem a tipologia de situações acima mencionada, por favorecer a construção de conhecimentos consistentes sobre a grandeza volume e, sobretudo, porque na perspectiva de Vergnaud (1990) um conceito não pode ser analisado a partir de uma única situação.

5. Referências

ANWANDTER-CUELLAR , N. Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume. FRANÇA. 2008. 96f. Dissertação (Mestrado)- Université Montpellier 2. 2008.

BARROS, J. S. de. Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório. Dissertação (Mestrado)- Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. PNLD 2012 - *Guia de livros didáticos do ensino médio* - vol. 2. Brasília: MEC/SEF, 2011.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics.1989. v. 20, n°4, pp.387-424.

LIMA, P, F. BELLEMAIN, P. M. B. Coleção explorando o ensino: Grandezas e medidas. Matemática. Brasília, DF: 2010. p. 169-201.

OLIVEIRA, G. R. F. Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso. 2002. 135 f. Dissertação (mestrado em educação) – Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. IN: Seminário_Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1°. 1990. Rio de Janeiro.