DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: EXPLORANDO PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS
Título do GT – GT 10

Leonardo Lira de BRITO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba.
leonardoliradebrito@gmail.com

José César NASCIMENTO AFRO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba.
luis.soares@ifpb.edu.br

Paulo Cezar de SOUZA
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba.
cezarifpb@gmail.com

Luís Havelange SOARES
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba.
havelan@gmail.com

RESUMO
Apresenta-se estudo desenvolvido com um grupo de dez professores de Matemática com o objetivo de analisar o entendimento deles sobre demonstrações e a forma como as exploram na educação básica. Deu-se ênfase ao estudo de geometria a partir de quatro propriedades que temas importantes de Matemática na educação básica. Realizou-se uma entrevista com os docentes que estão em atuação no nível de ensino fundamental e/ou médio para a investigação de questões sobre as demonstrações. Os resultados indicaram que o entendimento dos professores sobre demonstração está muito limitado às concepções construídas nos cursos superiores, o que os impede de explorar os processos de demonstração em sala de aula, pois, entendem que os discentes não possuem condições de compreensões de tais processos.

Palavras- chaves: Demonstração, Ensino, Geometria.

1. Introdução

Uma das questões que vêm sendo estudadas no âmbito da educação matemática, em especial na última década, diz respeito aos processos de demonstrações no ensino de Matemática na educação básica. Vários estudos, entre eles o de Machado (2005), têm apontado que esse processo vem se realizado de formas diversas, dependendo de fatores temporais e locais: umas mais teóricas, outras mais práticas; umas partindo de teoremas apresentados pelo professor, outras partindo de conjecturas formuladas pelos alunos.

Porém, se nos detivermos ao ensino de Matemática no Brasil, temos uma realidade que destoa da maioria dos países do mundo, conforme mostrou Pietropaolo (2005) em sua tese de doutorado. Segundo ele, em países como França, Portugal, Inglaterra e Alemanha, o sistema de ensino no nível comparável ao que se entende por ensino fundamental no Brasil, já coloca em sua estrutura curricular que as demonstrações matemáticas devem ser exploradas pelos professores durante as aulas de Matemática. Diferentemente disto, no Brasil, o processo de demonstrações e provas no ensino de Matemática fica restrito, quase que completamente, aos cursos superiores de Matemática – os cursos de Licenciatura e de Bacharelado.

Em linhas gerais há opiniões conflituosas no que se refere a essa temática. Muitos pesquisadores defendem que as demonstrações já sejam introduzidas no ensino de Matemática desde as séries inicias. Porém, há também um forte grupo de estudiosos defensores do pensamento de que as provas e as demonstrações só devem ser exploradas pelos professores em níveis de escolaridade mais elevados, alegando eles que o estudante precisa estar com sua estrutura cognitiva "preparada" para compreensão de pensamentos mais abstratos.

Distante de um consenso sobre tal discussão, muitas investigações estão sendo desenvolvidas em todos os níveis de ensino trazendo no seu cerne o desejo de avançar numa direção que indique o melhor caminho para as práticas docentes de Matemática. Isso leva, inevitavelmente a um estudo mais epistemológico do entendimento do que realmente deve ser considerado como *"demonstração"*, quais os seus objetivos, quais suas categorizações e sua importância para a aprendizagem de Matemática. Mas, essas questões não são temas fáceis e, assim como ocorre com muitos outros enfoques dentro da educação matemática, trazem uma carga de polissemia o que faz com que seja necessário que definamos qual concepção estamos seguindo.

Tendo ciência das dificuldades de convergência conceitual para *"demonstração"* e para direcionamentos desta no que se refere ao ensino básico, apresentamos os resultados de um estudo desenvolvido a partir de questionários aplicados com dez professores de Matemática, em três escolas de educação básica, onde investigamos como os docentes apresentam (ou exploram) as demonstrações relativas às propriedades ou teoremas de Matemática relacionados a Geometria da educação básica nas suas aulas. Partimos da hipótese de que a exploração de demonstrações matemáticas na educação básica se faz necessária, mesmo que, utilize-se para tal, um entendimento de *"demonstração"* diferente do que se usa nos cursos de Licenciatura e Bacharelado.

2. Conceito de demonstração

O termo "demonstrar" possui diversos significados: "provar com um raciocínio convincente" ou "descrever e explicar de maneira ordenada e pormenorizada, com auxílio de exemplos, espécimes ou experimentos" (FERREIRA, 1986). Sabemos que, em se tratando de conhecimento matemático, nem sempre as definições contidas nos dicionários são coerentes com o que se define na comunidade acadêmica. Para muitos matemáticos a demonstração é uma forma de mostrar que certo teorema ou afirmação matemática esta realmente certa. Mas, será que a demonstração só serve para provar se alguma coisa está certa?

Segundo Lilian Nasser e Lucia A (2003) A demonstração tem diversas funções. A mais usada é a de validar um resultado, isto é comprovar que é verdadeiro. Essa função é, sem dúvida alguma, fundamental na matemática, mas nem sempre é motivadora para os alunos da escola básica. Muitas vezes o resultado é óbvio para eles, que não veem necessidade alguma de verificar sua veracidade. Essa função se torna altamente motivadora quando há alguma duvida, ou seja, quando é preciso validar ou refutar uma conjectura. Além disso, de acordo com Hanna e Jahnk (1996)

> Estudos recentes confirmam que é crucial para o professor tomar parte ativa em ajudar os estudantes a compreender por que uma prova é necessária e quando ela é válida. (p.87)

Outra função da prova é a de explicar ou elucidar, isto é mostrar por que o resultado é verdadeiro. Algumas provas são perfeitamente aceitas, mas não dão nenhum indício do motivo pelo qual a afirmativa vale. Por exemplo, as provas por absurdo, ou às por indução. Segundo De Villiers (1991),

> em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos. (p.261).

Alguns pesquisadores, como Bell (1976), enfatizam a função da prova de sistematizar, isto é, preparar para o domínio do processo dedutivo. Nesse sentido, acompanhando as demonstrações apresentadas pelo professor, o aluno vai tomando conhecimento das estruturas da matemática, para, no futuro, dominar o processo dedutivo, e até, em alguns casos, ser capaz de fazer demonstrações por si mesmo. Para isso, é necessário que o professor não esconda dos alunos as dificuldades encontradas e o motivo de certos passos tomados no desenvolvimento de uma demonstração. Bell cita ainda as funções da prova de descoberta (a descoberta de novos resultados) e comunicação (a tramitação do conhecimento matemático). Ele enfatiza o caráter educativo da troca de conjecturas e a sua discussão. Assim elaborou também uma espécie de classificação das demonstrações de alunos adolescentes em duas categorias: Demonstração empírica e Demonstração dedutiva.

Produzindo exemplos que hoje já são considerados clássicos e que deram inicio a outros estudos análogos, inclusive em tempos recentes [para o estudo desse interessante ponto, ver Malara (1996), no qual há uma tabela ilustrativa com as escalas de classificação de Bell]. Bell, de acordo com a classificação de suas demonstrações faz uma listagem de dois termos que se tornam necessários para se chegar a um resultado matemático a *Explicação* e a *prova.* A explicação é o ato ou um processo concebido por si mesmo, com meios próprios e pessoais, e com base em competências pessoais, mas já dirigido a uma explicação futura destinada a outros; trata-se, de todo modo, de um fato pessoal, interno. A prova é a fase sucessiva, socialmente compartilhada, ainda não definitiva, mas em evolução. As provas podem ser pragmáticas ou intelectuais.

Outro estudo importante sobre esse tema é o artigo de Balacheff (1988b). Nesse artigo, parte-se de analises históricas que levam a considerar o processo demonstrativo como uma progressão ligada a uma metodologia por prova e erro, no qual a interação social é de importância relevante.

As leituras desses trabalhos nos levam a considerar que precisamos fazer uma diferenciação sobre os tipos de demonstração que se pode considerar no ensino de Matemática, tomando para tal classificação o nível de ensino em que estivermos atuando. Nessa perspectiva, estamos considerando que uma demonstração realizada num curso superior de Matemática pode ser explorada na educação básica, mas, de um modo diferente, sem se levar em conta o rigor, o formalismo e a simbologia que, entendemos ser essenciais para os cursos superiores, porém não tão relevantes no nível da educação básica. É nessa direção que fazemos uma espécie de "classificação" das demonstrações, como mostraremos a seguir.

2.1. **Tipos de demonstrações**

Do ponto de vista dos matemáticos, as demonstrações segue todo um formalismo, partindo do pressuposto que é a hipótese. É através do raciocínio lógico com a ajuda de lemas, colorários ou ate mesmo utilizando um resultado de um teorema já demonstrado que se chega a um resultado que se quer mostrar que é verdadeiro, nesse caso chamamos de tese. Esse modelo é chamado de prova formal. O que observamos é que a maioria dos alunos não domina esse tipo de demonstração nem quando chegam às faculdades nos cursos superiores.

Mas a demonstração formal não é o único tipo de prova. Alguns pesquisadores como Hanna (1990), do Canadá e Balacheff (1988), da França, defendem a demonstração ingênua, isto é uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano da escolaridade do aluno. De acordo com a idade e a escolaridade do aluno Rezende e Nasser (1994), afirmam ter quatro tipos de demonstrações que são: justificativa pragmática, recorrência a uma autoridade, exemplo crucial e a justificativa gráfica. Na justificativa pragmática o aluno testa a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares. Já a correspondência a uma autoridade consiste em o aluno afirmar que um resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro ou em um texto. O exemplo crucial pode ser compreendido como o momento em que o aluno desenvolve, a partir de um exemplo ou um exercício o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral. Já a justificativa gráfica é entendida como sendo a atividade onde o aluno mostra numa figura porque o resultado é verdadeiro.

Esses elementos ou ideias sobre demonstrações levam a alguns enfrentamentos acadêmicos entre grupos de professores de Matemática. Aqueles que vêm de uma formação especialmente ligada à pesquisa matemática, que são considerados como professores com formação em matemática pura e os professores de formação em educação matemática, que são docentes com formação mais voltadas para questões pedagógicas, de um modo mais geral, para a didática da Matemática. O embate se dá pelo fato do primeiro grupo entender que só deve ser considerado como demonstração as provas que são obtidas de forma algébrica e não de forma geométrica. Além disso, para estes, deve-se ter sempre o simbolismo predominante e universal da Matemática, a escrita matemática padrão, com toda sua formalidade.

Já para o segundo grupo, àqueles mais direcionados para a didática da matemática, o entendimento difere em alguns pontos. Estes compreendem que as decisões sobre formalidade, simbolismo e escrita matemática, podem ser relativizadas a depender do nível de ensino em que se esteja atuando. São estas questões que trazem olhares diferentes sobre os processos de demonstração em Matemática. Para que fiquem ainda mais esclarecidas essas diferenciações, apresentamos uma atividade possível numa aula de Matemática.

Imaginemos que durante uma aula de Geometria o professor apresente para os alunos o seguinte teorema *"Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."* Para investigar esse teorema o docente entrega a cada aluno uma folha de papel e pede que cada discente desenhe um triângulo retângulo qualquer cujos catetos medem, numa dada unidade, ***a*** e ***b***, e a hipotenusa mede ***c***. Agora, construam dois quadrados iguais de lados ***(a + b)***. Depois num dos quadrados pede que construam quatro triângulos e no outro, dois quadrados e quatro triângulos, conforme a figura 1.

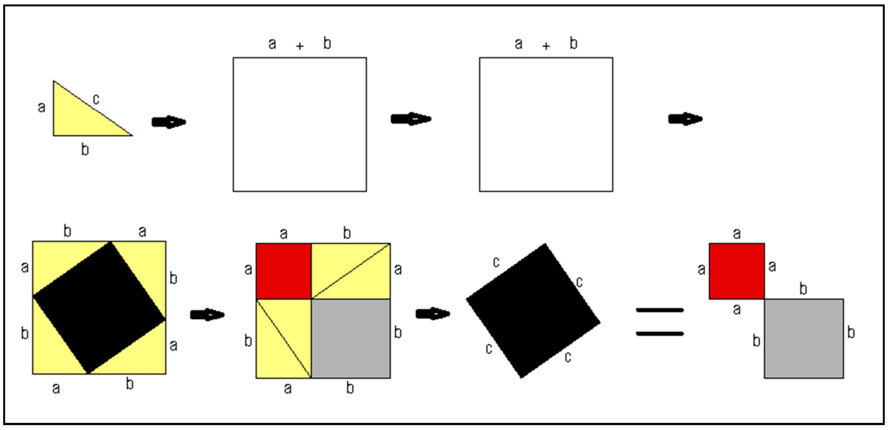

Figura 1 Sequência metodológica sobre a demonstração do teorema de Pitágoras

Ora, mas em cada figura, o quadrado inicial tem de lado ***(a + b)***. Um dos quadrados foi dividido em quatro triângulos e um quadrado com medida de lado igual a ***c*** (a medida da hipotenusa do triângulo considerado inicialmente). O outro quadrado foi também dividido em quatro triângulos iguais aos do quadrado anterior.

Se compararmos as áreas dos quadrados que restam temos:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

Como cada aluno, possivelmente, construiu um triângulo diferente (em termos de comprimento dos lados ou de medidas dos ângulos) eles (alunos) chegarão à conclusão de que em qualquer triângulo retângulo isso se verificará. Agora, convém levantar a seguinte questão: o que foi realizado nessa sequência didática foi uma demonstração ou parte do processo de uma demonstração?

Se seguirmos o pensamento de Boavida (2001) entenderemos que ocorreu parte de uma demonstração. Pois segundo ele,

> uma demonstração é realizada quando são apresentados argumentos, matematicamente válidos, para cada uma das afirmações que enunciaram, usaram factos conhecidos e anteriormente aceites como verdadeiros para bases das suas justificações (…), encadearam os argumentos uns nos outros de tal modo que uma ideia fluía da anterior sem deixarem "pontas soltas" ou contradições e deduziram, logicamente, uma conclusão. (p.13)

Pensamos que as demonstrações devem ser postas para os alunos em sala de aula como algo que, independentemente do maior ou menor formalismo que se apresente, expressem através de um raciocínio lógico que mostre a verdade ou falsidade de uma determinada conjectura ou propriedade e que seja aceita por todos os membros da comunidade sala de aula. Nessa perspectiva, estamos considerando o entendimento de demonstração diferente do que é defendido por muitos autores que têm seus trabalhos em bases mais voltadas para a "Matemática Pura"[1], e que têm um pensamento de demonstração conforme expressa Pietropaolo (2005):

> A demonstração envolve a utilização de uma formalização abstrata e simbólica e exige um perito com conhecimento prévio bastante razoável do assunto e domínio da linguagem utilizada. (DAVIS E HERSH, 1985, citados por PIETROPOLO, 2005).

De fato, para muitos matemáticos que não desempenham atividades nos ensino Fundamental e/ou Médio, simples constatações visuais, conforme a sequência apresentada anteriormente, não podem ser entendidas como demonstrações, ou na melhor das hipóteses, como partes de uma demonstração. Esta constatação foi realizada também por Cury (2001) que ao estudar as concepções dos formadores de professores de Matemática, observou que muitos deles são oriundos dos programas de Pós-Graduação em Álgebra ou Análise, e quando muito, desempenham funções docentes apenas nos corsos superiores de Licenciatura, nos cursos de Mestrados e de Doutorado em Matemática e, por isso, o entendimento deles sobre o conceito de "demonstração" é completamente diferente daquele que deve ter um professor de Matemática que atua na educação básica.

2.2. **Porque desenvolver atividades de demonstração na sala de aula?**

Van Hiele (1996) estabelece níveis hierárquicos de raciocínio ao longo da aprendizagem. De acordo com ele, num primeiro estágio (visual), o julgamento é baseado na

[1] Estamos considerando o termo "Matemática Pura", como a área de estudos da Matemática, especificamente voltada às pesquisas desenvolvidas no âmbito da própria Matemática. Nessa perspectiva, estamos usando o entendimento dessa área dado por Cury (2001).

observação, e não faz sentido pedir justificativas. No nível seguinte, o raciocínio é analítico, na medida em que o aluno observa as propriedades e os elementos de uma figura, mas não estabelece relação entre elas. Já no terceiro nível, o aluno percebe quando uma propriedade é consequência de outra, isto é, ele entende que há uma cadeia de relação entre as figuras e suas propriedades. O processo dedutivo é dominado no nível seguinte, quando os alunos conseguem compreender uma prova formal.

Baseado nesse entendimento, Galbraith (1981, p.4) apresentou uma lista de componentes necessários para a compreensão, construção e avaliação de demonstrações: entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares; detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação; utilizar uma cadeia de inferência a fim de se convencer do resultado a ser alcançado; reconhecer o domínio de validade de uma generalização; Interpretar corretamente condições e afirmativas; apreciar e perceber a distinção entre implicação e equivalência; reconhecer a arbitrariedade e propriedades de uma definição; ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento.

Segundo Lilian Nasser e Lucia A (2003), essa relação de competências confirma nossa crença de que os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo. Isto é, se não os ajudarmos a resolver habilidades como as citadas por Galbraith, como garantir que serão capazes de argumentar satisfatoriamente? É claro que essas habilidades são adquiridas aos poucos, dependendo da experiência e da maturidade do aluno. De qualquer modo, o professor deve ter ciência de que precisa explorar em suas aulas de matemática atividades que tenham como objetivo ajudar ao aluno a desenvolver tais habilidades.

3. As demonstrações matemáticas: com a palavra os docentes

As ideias iniciais para investigar como as propriedades (ou teoremas) geométricas são justificadas pelos professores nas aulas de Matemática da educação básica, nos levavam,em princípio, a nos questionar como os docentes davam ênfase aos processos de demonstração referentes aos conteúdos matemáticos ali apresentados. Para realizar esta investigação tivemos que adentrar, mesmo que brevemente, no entendimento de concepções dos professores sobre os processos de demonstração. Porém, com o decorrer dos encontros, nos veio o desejo de examinar, além desses fatores já destacados, o modo como às demonstrações geométricas eram exploradas pelos docentes. Ou seja, pensamos em investigar, como as demonstrações são exploradas fazendo uma ligação do modelo de demonstração com o nível de escolaridade em que ela está sendo trabalhada tentando identificar nos processos de demonstração as funções destacadas por De Villiers (2002).

Nos primeiros encontros, apresentávamos interesse que ia muito além das nossas possibilidades temporais e logísticas pertinentes ao nosso projeto de pesquisa. Assim, entendendo a necessidade de limitar o nosso objeto de investigação, definimos então as propriedades matemáticas que deveríamos investigar. A tabela 1 mostra as quatro propriedades que foram objeto da investigação e que servirão de base para os questionamentos que fizemos aos docentes.

Tabela 1 – Conteúdos e propriedades matemáticas

Temáticas	Propriedade
Bissetrizes internas de um triângulo	Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos que são proporcionais aos lados adjacentes.
Teorema de Pitágoras	Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos
Ângulos internos de um Polígono	A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de lado n é igual ao produto de (n-2) por 180°
Relação fundamental da Trigonometria	Para qualquer número real x, temos que: $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$

Utilizamos como instrumento de pesquisa uma entrevista semiestruturada na qual buscávamos compreender o entendimento dos docentes sobre o processo de demonstração na educação básica e investigar a prática pedagógica do professor para verificar como este explora o processo de demonstração em suas aulas. A entrevista era composta (a priori) por seis perguntas.

Na primeira pergunta buscamos saber como o professor definia uma *“demonstração matemática”*. Com isso pensávamos em compreender em qual categoria elencada por Hanna (1995) o professor estava inserido, se pensava em demonstração como um processo formal, explorado com mais veemência no ensino superior ou, se entendia como um processo que podia ser explorado para fins escolares. Nesse aspecto nos chamou a atenção o fato de que a maioria dos docentes apresentou um entendimento de demonstração mais próximo de um processo formal que tem no rigor a característica principal. Essa característica já foi também pesquisada por Cury (2001). Porém, ela investigou a concepção dos professores formadores, mostrando que ainda predomina nos cursos de formação em Matemática costumes das décadas de 70 e 80 que supervalorizam a formalidade da Matemática, especialmente a álgebra e os processos de demonstrações mais abstratos.

Com a segunda questão – *como os alunos reagem ao processo de demonstração em sala de aula* - nosso objetivo era verificar se o professor explorava ou não a demonstração durante a aula de Matemática. Nesse ponto, percebemos que a realidade do ensino de Matemática na educação básica não dispõe de procedimentos de demonstração. Alguns docentes expuseram que, quando tentaram apresentar demonstrações, os alunos reagiram de modo bastante contrário e alegaram muitas dificuldades de compreensão.

Num terceiro momento apresentamos para os docentes a sequência metodológica exposta pela figura 1 e pedimos que dissessem se "aquilo" era uma demonstração, justificando sua resposta. Mais uma vez houve divergências de pensamentos, pois, para quatro docentes a sequência não representava uma demonstração enquanto que para os outros com aqueles passos didáticos a propriedade estava bem demonstrada.

No quarto questionamento, apresentamos para os docentes as quatro propriedades do quadro 1 e perguntamos se eles lembravam de ter explorado os processos de demonstração dessas propriedades em suas aulas. Em caso de resposta afirmativa pedíamos para descrevessem como faziam isso em sala de aula. Nesse aspecto destacamos o fato de que todos os docentes disseram ter demonstrado as propriedades referentes ao ensino fundamental, enquanto que apenas dois deles também afirmaram ter demonstrado a propriedade relativa ao conteúdo estudado no ensino médio. Sobre a forma como os docentes realizaram as demonstrações nos pareceu que o modelo formal e com forte vertente algébrica foi majoritário.

Em seguida pedimos aos docentes para que apontassem quais as maiores dificuldades que vislumbravam e que traziam barreiras para a exploração dos processos de demonstração nas aulas de Matemática da educação básica. Entre outras questões mencionadas pelos professores, destacamos: a falta de tempo para planejamento das atividades; o pouco interesse dos estudantes pela aprendizagem matemática; a linguagem matemática complicada; a ausência nos livros didáticos das demonstrações.

Por fim, buscamos na sexta questão entender, de fato, o que os docentes pensavam sobre os processos de demonstração no nível da educação básica. Pedimos que eles se colocassem na condição de pedagogo com a incumbência de direcionar as metodologias de ensino de matemática. Nessa situação, perguntamos: qual recomendação daria com relação às demonstrações para o Ensino Básico? As respostas a essa questão trouxeram implicitamente o que eles defendem sobre os processos de demonstração na educação básica. Percebemos que, apesar de muitos terem dito anteriormente que exploravam ou já teriam explorado às demonstrações durante as aulas, nesse item mostraram-se contrários ou, no mínimo, críticos ao fato de se valorizar às demonstrações na educação básica.

4. Considerações finais

Apesar da necessidade de aprofundamentos teóricos ficam evidentes algumas questões que, em nosso entendimento, devem ser consideradas como ponto de partida para investigações posteriores.

Destacamos, após as leituras realizadas e o embate teórico sobre a importância das demonstrações geométricas para o ensino de Matemática na educação básica. Ficam evidentes as divergências entre muitos estudiosos, entre usar demonstração de forma algébrica ou forma geométrica. Os que defendem o uso mais formal concebem a Matemática como uma ciência carregada de rigor e simbologia enquanto que aqueles que vislumbram outras possibilidades, entendem a Matemática de um modo mais relativo e com possibilidades metodológicas diversas, especialmente para o ensino na educação básica.

Os dados coletados e analisados indicam que os docentes de Matemática têm um entendimento de “demonstração” muito próximo das práticas docentes desenvolvidas nos cursos de Licenciatura e Bacharelado, que “pregam” a demonstração como o mais importante no conhecimento matemático. Talvez por isso, raramente realizam explorações com demonstrações nas suas práticas docentes.

Esses fatos nos mostraram a necessidade de discussões sobre o ensino de Matemática na educação básica, as práticas docentes, as metodologias utilizadas, as concepções dos docentes, entre outros. Pois, compreendemos que se fazendo uso de um entendimento baseado em Hanna (1995) e De Villiers (2002) poderemos utilizar os processos de demonstração nas aulas de Matemática, mesmo a partir das séries iniciais do ensino fundamental. Talvez assim, os estudantes passem a compreender significativamente a Matemática percebendo também a sua beleza, importância e harmonia.

5. Referências

BOAVIDA, A. M. Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. Lisboa: Revista Educação e Matemática, 2001, n. 63, p. 11-15..

BOERO, Paolo. Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In: International group for the psychology of mathematics education. 1996, n. 20.

BELL, A. A study of pupils' proof-explanation in mathematical situation. Educational Studies in Mathematics, 7,23-40, 1976.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Em D. Pimm (ed): Mathematics, Teachers and Children, 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, 1998.

CURY, Helena N. A formação dos formadores de professores de Matemática: quem somos, o que fazemos, o que podemos fazer. In: CURY, Helena (org). Formação de professores de matemática, uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

DAVIS, F. J. e HERSH, R. A experiência matemática. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

DE VILLIERS, M. Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica. Actas do ProfMat 2002 (pp. 65–72). Lisboa: APM.

FERREIRA, Aurélio B. de Hollanda. Novo Dicionário da Língua Portuguesa. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

GALBRAITH, P. Aspects of proving: a clinical investigation of process Educational Studies in Mathematics, 12, 1-28, 1981.

HANNA, G. Challenges to the importance of proof. For the learming of mathematics, 1995, n.15. p. 42-49.

LILIAN Nasser. Argumentação e prova no ensino de matemática. Tinoco. 2 ed. Rio de Janeiro:UFRJ/ projeto fundão, 2003.

MACHADO, S. A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, 2005.

PIETROPAOLO, R. C. (Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica. Tese de Doutorado. PUC – São Paulo, 2005.

REZENDE ,J. e NASSER, L. Kinds of argumentation used in geometry. Atas do PME-18,vol.1,p.66, Lisboa, 1994.

VELOSO, E. Geometria: temas actuais. Lisboa: IIE, 1998.

VAN HIELE. P. Structure and lnsight. Academic Press, Orlando, FL, USA, 1996.