

HISTÓRIA DA PROPORÇÃO ÁUREA

História e filosofia da Matemática e da Educação Matemática

EDCARLOS JOSÉ DE OLIVEIRA BARBOSA
Universidade Estadual da Paraíba
edcobarbosa@gmail.com

Resumo.

O presente trabalho tem como objetivo destacar como a matemática relaciona-se com as atividades humanas na sociedade em que vivemos, enfocaremos como estudo principal o número phi, (número Áureo), desde sua história até sua aplicação dentro da matemática e de outras áreas do conhecimento, além de explicar como a proporção áurea foi desenvolvida, quais matemáticos há estudaram a sua relação com a natureza, arquitetura, música e arte. A metodologia utilizada foi uma pesquisa bibliográfica em sites, livros, artigos, e vídeos. Com esse trabalho observamos a grande quantidade de fractais existentes na natureza, que poderá nos ajudar há abranger nosso estudo sobre o tema em questão, além de nos dar suporte para responder as indagações que muitos alunos fazem ao longo de sua vida escolar, como pra que estudar matemática? A matemática seve pra que? Assim esse artigo poderá servir de respostas para as indagações dos nossos leitores.

Palavras chaves: Proporção Áurea, Número Phi, Número de Ouro.

1.Introdução

Para que haja um estudo do número Φ (phi) é necessário que antes conheçamos uma figura que para muitos povos e religião é considerada como símbolo de perfeição e para outros é dita como o símbolo maléfico condenado pela igreja, essa figura é o pentagrama, que foi estudado por alguns matemáticos como Euclides, Fibonacci, Pitágoras, Johannes Kepler, entre outros homens. Segundo Contador (2007) “o pentagrama é a figura onde podemos encontrar a maior quantidade de razões áureas nas suas medidas, mas o que é razão áurea”?

A proporção áurea surgiu há muito tempo e não se sabe ao certo aonde ela foi usada pela primeira vez, pois a razão áurea está inserida em muitas artes e arquitetura ao longo do tempo. No Egito a uma lenda citada no livro de Contador (2007) e descrita por Heródoto que diz que “as grandes pirâmides do Egito foram construídas de modo que a área de uma de suas faces inclinadas é igual ao quadrado de sua altura”.

Sabem-se que a pirâmide de Queóps de Gise foram construída por volta de 5750 a.C. (Contador 2007) isso é um grande indicio que os egípcios por volta desse ano já utilizavam a proporção áurea.

Segundo Contador:

Em desenhos primitivos ou rupestres encontra-se a proporção áurea, não que os nossos ancestrais tivessem tal consciência geométrica, mas com certeza a instruíram, na especulação de beleza e na forma das proporções. (Contador, 2007, p. 97)

Em várias partes do Egito foram encontradas construções e artefatos que exibem a proporção áurea em suas medidas, exemplos dessas construções são o templo egípcio

Osiriom, a crípta de khesira, além do tumulo egípcio encontrado em 1919 que pertencia ao sacerdote Petosiris e sua família.

Não só no Egito, mas em outros lugares houve a presença da proporção áurea, pois uma das características da razão áurea é a auto propagação, pois vários povos a utilizaram sem terem trocado informações matemáticas, um exemplo disso é os pitagóricos que não podiam falar sobre suas descobertas, outro artefato que possui a presença de proporções áureas em suas medidas foi um tablete de escrita cuneiforme encontrado na Babilônia.

2.O número phi

Começaremos o nosso estudo com um matemático que estudou e elaborou uma forma para obter o número phi, ele foi Pitágoras. O nome phi foi utilizado “*a partir do século XX, o matemático americano Mark Barr (1899) passou a usar a letra grega phi ϕ , a primeira letra do nome Fídias ou phidias, em homenagem ao grande e talentoso escultor grego que viveu por volta de 490 a.C. a 430 a.C.*”,(86, Contador), ele é resultado da proporção áurea ,também chamada razão áurea ou razão dourada ou até mesmo na literatura matemática mais antiga encontramos o número phi designado pela letra grega τ derivada da palavra $\tau\alpha\mu\eta$ que significa seção ou corte.

Pitágoras e a escola pitagórica que tinham como símbolo o pentagrama estrelado, que segundo Cyrino (cap.4, pg. 38), foi explorado desde sua característica geometria e suas associações metafísicas, além de ser considerado pelos Pitagóricos como um símbolo de aliança.

Para Pitágoras “os números governam o mundo” esse era o lema dos pitagóricos, uma vez que consideravam como chave do conhecimento há aritmética. A aritmética grega foi criada pelos pitagóricos, que desenvolveram a noção de números incomensuráveis, além de estudar vários problemas desde sequências e séries de um número, números irracionais que para Pitágoras era uma grande frustração, pois segundo Contador:

Para os Pitagóricos, toda a natureza podia ser representa por números, mas quando o triângulo cujos catetos são iguais a 1 ,gerou uma hipotenusa igual à raiz de 2 , apareceu um profundo descontentamento entre eles. (Contador, 2007, p. 57-58).

Segundo Contador se não existissem os números irracionais descobertos pelos pitagóricos e que para a geometria grega significa um seguimento incomensurável, não existiria a proporção áurea.

O estudo das proporções também foi alvo de análises e pesquisas pelos pitagóricos,

proporções essas que variam segundo a quantidade de seus termos, em seguida verão como Pitágoras conseguiu chegar ao número de ouro, número obtido pelo retângulo áureo, retângulo esse que os gregos utilizavam em sua arquitetura, como é visto, mas adiante nas aplicações do número phi, porém utilizaremos uma demonstração de melhor entendimento, mas que tem a mesma lógica da demonstração de Pitágoras.

3. Obtendo um segmento áureo

Para obter-se um segmento áureo precisamos primeiro traçar um segmento de reta cujos extremos sejam do tipo AB e possua um ponto médio M.

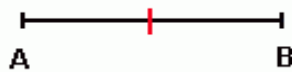


Figura 1

Em seguida utilize o ponto médio entre o segmento AB para tomar como medida para traçar um segmento de reta perpendicular a AB que possua uma distância igual a AM como mostra a figura abaixo.

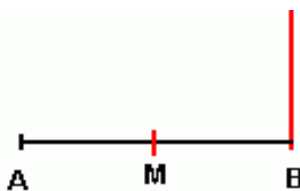


Figura 2

A segunda parte é traçar com um compasso um arco que saia de M e vá até o ponto C do segmento perpendicular a BC, ponto C deverá ser unido com A, formando assim um triângulo retângulo ABC, em seguida com um compasso em C e B crie um arco que vai até um ponto em AC formando assim a seguinte figura:

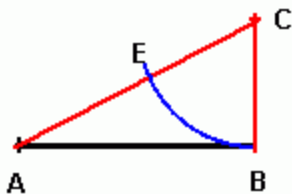


Figura 3

A terceira parte é criar um arco com a ponta do compasso no vértice A, abra-o até o novo ponto E marcado na hipotenusa. D será um ponto formado pelo cruzamento da circunferência e o cateto AB. Este ponto é o ponto que divide o segmento AB em duas partes.

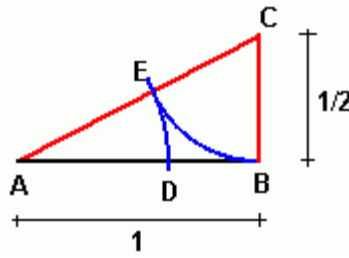


Figura 4

Para obtermos o número áureo usaremos o desenvolvimento de **Ulysses Sodré e Sonia F.L.Toffoli**.(agosto de 2010).

Como podemos justificar este procedimento do ponto de vista matemático? Se o lado AB do triângulo mede 1 unidade de comprimento, então o lado BC mede a metade e obtemos a medida da hipotenusa com o teorema de Pitágoras.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 1^2 + (1/2)^2 = 1 + 1/4 = 5/4 \Rightarrow$$

$$AC = (\sqrt{5})/2$$

$$AE = AC - EC \Rightarrow AE = (\sqrt{5})/2 - 1/2 = (\sqrt{5}-1)/2$$

Como $AE = AD$ é temos que o valor de $AD = 1,6180339887\dots$ ou $\phi = 1,6180339887\dots$

Além desse, existem diversos outros métodos para obtenção do número dourado.

3.1.Método para se obter geometricamente o retângulo áureo.

Outra figura geométrica que é comumente associado com Phi é o retângulo de ouro. Este retângulo particular tem lados A e B que estão na proporção da Razão Áurea. Tem sido dito que o retângulo de ouro é o mais agradável retângulo ao olho.

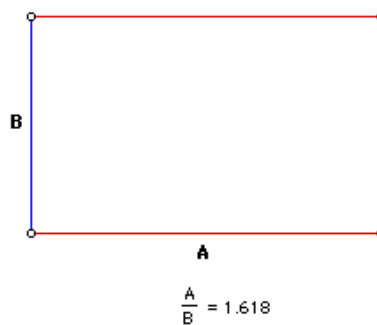


Figura 5

3.2.Seguimento áureo no círculo.

Se inscrever um decágono regular em um círculo, a razão de um vértice do decágono para o raio do círculo forma o seguimento áureo, ou seja $r/s = 1,618033988\dots$

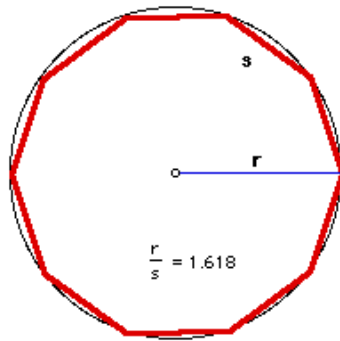


Figura 6

Se dividirmos uma circunferência em dois arcos na proporção áurea, o ângulo central do arco marcado fora do ângulo de ouro é 137,5 graus.

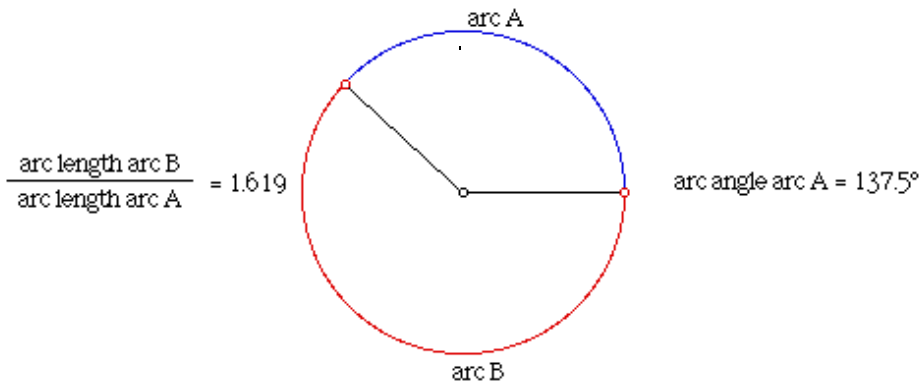


Figura 7

3.3. Seguimento áureo no pentágono.

Podemos usar a secção de ouro para a construção de um pentágono regular.

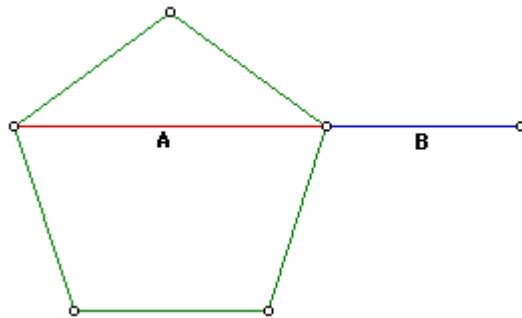


Figura 8

Se ligar os vértices do pentágono regular, podemos obter dois triângulos dourados. O triângulo azul tem seus lados em relação dourada com a sua base, e o triângulo vermelho tem a sua base em relação dourada com um dos lados.

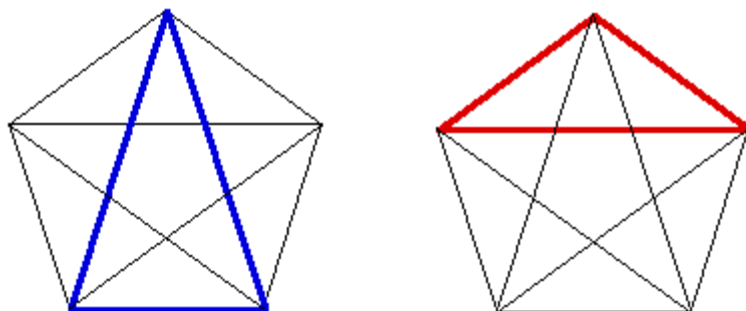


Figura 9

O método para obter-se geometricamente a espiral áurea ou espiral de mirabilis será estudar junto do grande matemático que pesquisou esse número phi, ele e Leonardo Fibonacci.

4. Sequência de Fibonacci

Outro matemático que estudou a proporção áurea e conseqüentemente o número phi cujo próprio nome originou-se dele, *segundo Contador (2007)* foi Leonardo de Pisa que nasceu em Pisa (1175-1250), que também era conhecido como Leonardo Fibonacci. Inspirado por seu pai que trabalhava na alfândega fez várias viagens ao Egito, Sicília, Grécia e Síria. Um dos problemas que Fibonacci estudou está relacionado há reprodução de coelhos, citado abaixo:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês (CONTADOR. 2007 pág. 133).

5. A sequência Fibonacci e o triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é formado por números em uma determinada sequência, e seu preenchimento é tão simples que até uma criança poderia tê-lo inventado, mas suas propriedades mostram-nos uma beleza tamanha, que o coloca como um dos trabalhos mais fantásticos desenvolvidos ao longo da história da matemática.

A relação da sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal são relacionados ao número phi, pois quando somamos as suas diagonais, as diagonais são iniciadas a partir do número 1, depois traçamos paralelas e somamos os números que a compõem, eis que surge a famosa sequência Fibonacci. Obtemos um retângulo cuja relação entre o lado maior e o lado menor está cada vez mais próximo da proporção Áurea, esse retângulo é chamado de retângulo de ouro ou retângulo áureo.



Figura 10

6. Um guia para a verdadeira beleza

Os gregos antigos que se deliciaram com seu teatro de comédia ou sofriram com suas tragédias são os mesmos que discutiam conceitos relacionados às ciências, eles não se destacam apenas com suas belas construções, também são dignas de admiração as suas esculturas e principalmente sua ciência. O formato de muitas das construções gregas não constituem um mero acaso, sua arquitetura com linhas harmoniosas, agradáveis á vista e bonitas são o resultado da aplicação da proporção áurea, muito bem conhecida por eles. A civilização da Grécia antiga parece ter encontrado, além do caminho para a sabedoria e para a razão, a fórmula para a busca da beleza.

Foi Pitágoras quem descobriu que o pentagrama estava repleto de matemática. A razão dos seguimentos de reta que forma o pentagrama sempre tem como resultado o número áureo, e é por isso que este símbolo passou a expressar a divina proporção e também se tornou o símbolo da beleza e da perfeição, ambos associados à deusa da beleza. O fato é que traçando as diagonais dessa figura, obtemos o pentagrama ou a estrela de cinco pontas, suas intersecções determinam um novo pentagrama em seu centro. O processo pode ser repetido infinitas vezes e as proporções sempre continuam as mesmas. Trata-se de uma propriedade fascinante. Para Pitágoras o mais fascinante ainda era que todas essas se organizam segundo a proporção áurea.

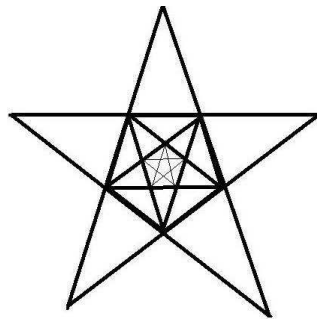


Figura 11

7. A música e os números de Fibonacci

A solução do problema de Pitágoras consistia em encontrar um número ou uma razão r correspondente ao intervalo de um semitom que após multiplicar 12 vezes uma frequência inicial correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava que significa o dobro da frequência inicial, ou melhor, adotar uma escala com doze semitons igualmente distribuída pela oitava. A esta nova escala foi dado o nome de escala temperada. A criação da escala temperada foi um dos fatores responsáveis pelo grande progresso na estética musical não só pela versatilidade de execução da música, mas talvez por está conforme a proporção secreta

usada pelos artistas da Grécia, possuindo assim uma relação entre as frequências musicais e o número de Fibonacci. Alguns instrumentos musicais como o famoso violino Stradivari tem sua construção baseada no número de ouro ou na proporção áurea.

8.A arquitetura e a seção áurea.

De acordo com Contador (2007), os arquitetos buscam a beleza tanto estética quanto harmônica, através da matemática ou da geometria em várias proporções da natureza e do corpo humano é que encontram essas qualidades.

Vitruvius Pollo estabeleceu três conceitos básicos para uma boa obra: utilidade, solidez e beleza. Hoje, o retângulo áureo cujos lados estão na razão de 1 para ϕ ou de ϕ para 1 pode ser observado na arquitetura e nas esculturas gregas, considerado pelos gregos como a *lei da beleza matemática*.

O templo Dórico construído no século V a.C e o Partemon são exemplos de construções gregas onde encontramos vários retângulos de ouro.

O partemon talvez seja o mais próximo da matemática com a arte grega, pois sua planta tem como base um retângulo com comprimento igual à raiz quadrada de cinco e largura igual a um.

Como a cultura medieval foi fortemente influenciada pela religião, a arquitetura da época destacou-se com construções de castelos, igrejas e catedrais, e tinha como base as proporções áureas, já que segundo o autor elas foram muito bem aceitas no mundo ocidental. Contador cita alguns artistas que admiravam o número de ouro, como o monge Francisco, Luca Pacioli que começou a chamar o número como proporção divina e atribui-o cinco propriedades da proporção áurea em seu trabalho, as quais estão relacionadas diretamente a deus, por ser único, depende de três elementos como a santíssima trindade: pelo fato de que como Deus não pode ser determinado por nenhuma palavra há proporção áurea não pode ser expressa por um número racional; por ter o mesmo valor independente da linha ou do tamanho do pentágono a ser dividido; e de por que deus é conferido todo cosmo através da quinta essência, esta representada pelo dodecaedro, o qual não pode ser construído sem a proporção áurea.

Outro arquiteto dessa época que também trabalhou com a proporção áurea, foi o arquiteto italiano e renascentista da antiguidade clássica *Filippo Brunelleschi*, considerado o pai da arquitetura dessa época, ele desenvolveu um trabalho baseado na seção áurea e foi o autor da catedral de Florença, a capela Pazzi de Florença e a catedral de São Lourenço, catedrais essas construídas com os formatos do quadrado e o retângulo áureo.

9. Le Corbusier

Depois da arquitetura clássica da antiguidade, surgiu uma arquitetura que fez uso de formas puras da geometria e era chamada de *Art Noveau*, onde a questão da proporção passou a ser tratada de forma particular.

Le Corbusier, pintor e arquiteto francês foi um dos primeiros a propor um sistema de medidas que iria satisfazer as exigências de beleza derivadas da proporção áurea em seus projetos arquitetônicos, por isso esse sistema recebeu o nome de *Modulor* (módulo de ouro), o qual era baseado na proporção do ser humano.

A estatura escolhida pelo arquiteto como padrão foi de 1,75m e depois passou para 1,85. O objetivo era conseguir uma escala humana universal para ser aplicada na arquitetura e na mecânica.

O *Modulor* é uma tabela baseada em três medidas básicas, 43 cm, 70 cm e 113 cm, cuja razão se aproxima do número de ouro e foi a partir do número 113 que ele construiu uma série de secções áureas a que chamou de série vermelha.

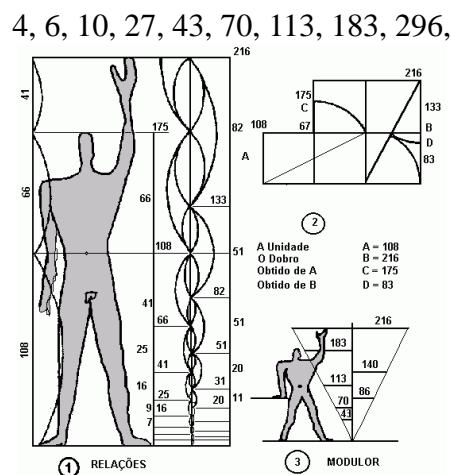


Figura 12

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>

A estatura humana referente a 183 cm corresponderia à medida que vai do solo ao umbigo sendo de 113 cm, ao joelho 14 cm, e assim por diante. Essas medidas foram tomadas para o estudo das alturas de bancadas, cadeiras, mesas, balcões, janelas, muros, portas, tetos, etc.

Um arquiteto brasileiro a orientar-se por Le Corbusier foi Oscar Niemeyer, o qual projetou a sede do Ministério da Educação e Saúde, hoje palácio Gustavo Capanema, no Rio de Janeiro.

Porém nem todos os povos se preocuparam em estudar as proporções do corpo humano, um exemplo são os muçulmanos que por questões religiosas não podem representar nem desenhar o corpo humano, contudo na cultura muçulmana está presente padrões geométricos que valoriza a simetria.

10.A arte e a secção áurea

A arte é muito antiga, desde os primórdios da civilização o homem criava sua arte, é muito difícil afirmar em que momento o homem começou a ter consciência do mundo a sua volta. As noções geométricas foram se formando a partir de observações de forma inconsciente das diferentes formas de tudo o que havia na natureza, como talvez a noção de distância que envolve o conceito de reta; ao observar a lua e o sol, figuras geométricas que trazem o conceito de círculo ou circunferência, ou uma planície cuja superfície sugere a noção de plano; ou ainda uma montanha que envolve uma grande diversidade de curvas. Um exemplo dessas observações são os desenhos primitivos e as pinturas rupestres.

Muitos autores ressaltam que a evolução dessas observações se deu exatamente como a evolução de conceitos geométricos percebidos pelas crianças que mesmo sem ter a noção de matemática conseguem criar seus primeiros desenhos. Também mais tarde passou a desenvolver de forma consciente os conceitos e definições de formas, mas das que a natureza oferecia, seja por prazer ou necessidade.

Ao passar dos séculos, durante o período medieval, eruditos e religiosos estudavam aritmética e geometria, as quais faziam parte do currículo romano e eram ensinadas em escolas monásticas desde aproximadamente o ano de 490 d.C.

As pinturas medievais sofreram influência do cristianismo, já que eram produzidas na Europa, elas não tinham a função de decorar e embelezar mosteiros e igrejas, mas de alguma forma ensinar a população um pouco de religião, já que há escrita e à leitura somente os filhos dos nobres tinham acesso, logo os pintores tiveram que educar os olhos dos homens através dessas figuras.

Segundo Contador é fácil perceber nas pinturas e esculturas a falta de expressividade dos rostos, de proporções e de profundidade deixando a imagem chapada, pois as técnicas apuradas e conceitos (como perspectiva) não faziam parte dos interesses dos pintores, porém, foi o pintor italiano Giotto di Bondone que na Europa se afastou da pintura medieval e veio a conhecer o conceito de perspectiva, criando um estilo realista em suas obras que na maioria eram temas religiosos, destacando a perfeição das figuras humanas, a expressividade dos rostos, os semblantes e os gestos dos personagens como o desespero, a piedade e a dor.

Com essas novas técnicas e experiência os pintores renascentistas conseguiram preparar o homem para olhar e compreender a nova geometria, ou seja, a geometria descritiva.

Foi após o período greco-romano que a proporção áurea deixou de ser um ente matemático e passou a fazer parte das artes. Foi através da pintura que o homem pôde exprimir as proporções do corpo e descobrir que a proporção áurea era um dos mais eficientes recursos para se alcançar a proporcionalidade, a estética e a beleza.

A partir daí a pintura deixou de serem traços reunidos de formas aleatórias numa tela, esses modelos matemáticos foram usados por vários artistas, divulgados e adotados em toda a Europa.

No Brasil, a proporção áurea passou a fazer parte da pintura com o movimento modernista, um exemplo é o trabalho de Cândido Portinari de 1935, *O café*.

Um exemplo importantíssimo do uso da matemática é a obra *O Batismo* descrito pelo pintor e matemático italiano Piero Della Francesca (1410-1492), “onde a imagem principal está contida em um quadrado representando a terra e num círculo dando forma ao céu”, o qual deu grande contribuição há renascença italiana.

Se analisado a figura e ao quadrado for atribuído o valor 1 terá o corpo de cristo na área $1 \times 3/\phi^3$ e sua altura igual a $3/\phi^3$, o espírito santo, localizado bem no centro do círculo tem uma área exatamente de $1/\phi \times 1/\phi^3$. Já a mão de João Batista está a $1/\phi^2$ de distância do umbigo assim como a púbis de Cristo está a $1/\phi^2$ de distância dos pés.

Outro a usar a proporção áurea em seus trabalhos e passou a chama-la de divina proporção é responsável pelo início do renascimento italiano foi Leonardo Da Vinci. Em seu quadro mais conhecido, *Monalisa*, há o emprego de vários retângulos áureos em torno do seu rosto e, subdividindo a linha dos olhos. Outra obra em que a figura principal está contida num retângulo áureo é, São Jerônimo.

A espiral logarítmica, conhecida como espiral equiângula, é usada por da Vinci em *Leda e o Cisne*, é encontrada na natureza mais que outras curvas. Ao unir os pontos dos retângulos áureos formados pela sequência de Fibonacci, também encontramos a espiral logarítmica, a qual foi utilizada por vários artistas e seus trabalhos, devidos a suas propriedades e beleza.

A estética a busca pelo belo não é privilégio do mundo atual isso pode ser constatado em criações de grandes escultores como Policleto que esculpia figuras de jovens atletas em bronze, considerado uma das obras primas do escultor o qual num trabalho teórico discute as proporções matemáticas ideais do corpo humano.

Outra referência à proporção áurea é a estátua de Afrodite de Nelos (ou Vênus de Milo), a qual é considerada a obra mestre da beleza feminina.

A relação entre matemática e arte existe e sempre existiu, pois assim é possível explicar o realismo, a perfeição e sentir a beleza de um passado que ainda persiste presente. (Contador, 2007)

12.Considerações finais

O presente estudo nos proporcionou um conhecimento mais aprofundado das aplicações da matemática no cotidiano, em especial o número phi que nos encantou desde o começo da pesquisa pelas suas propriedades mágicas e sua capacidade de ser inserido em qualquer ramo da matemática.

Houve muitas limitações em relação à pesquisa bibliográfica, pois há poucos trabalhos traduzidos para o nosso idioma.

A nossa pretensão é aperfeiçoar o presente estudo para apresentações em eventos futuros, e expor o mesmo para que outros o tomem como referencial teórico em seus trabalhos.

Referencias

SODRÉ, Ulysses; TOFFOLI, Sonia F.L. Alegria matemática. Disponível em:<<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm> >. acessado em 4 de agosto de 2010 às 19h29min.

LÍVIO, Mario. História do Número de ouro. Disponível em:<http://veja.abril.com.br/idade/exclusivo/181006/trecho_razao_aurea.html >.acessado em 25 de agosto de 2010 às 14horas.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins.A matemática na arte e na vida.São Paulo: Livraria da Física, 2007.

CYRINO,Hélio. Matemática & Gregos. São Paulo: Atomo, 2006