A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA OBTENÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES SUJEITO Á RESTRIÇÕES

Educação Matemática no Ensino Superior – GT 12 12

Paulo Xavier Pamplona
Universidade Federal de Campina Grande
pxpamplona@ccta.ufcg.edu.br

Danilo Lopes Fernandes
Universidade Federal de Campina Grande
danilolopes10@hotmail.com

Eduardo Alencar Santos
Universidade Federal de Campina Grande
eduallencar@hotmail.com

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos uma proposta de estudo de resolução de problemas de máximos e mínimos de funções, sujeito à restrições, usando o *software* Geogebra e aplicaremos esta proposta de ensino a alunos de Cálculo I e Cálculo III do curso de Engenharia Ambiental do Centro de Ciências e Tecnologia Ambiental da Universidade Federal de Campina Grande, campus de Pombal. Em geral, o uso do Geogebra aparece com frequência nos conteúdos de matemática do Ensino Fundamental e Médio. Nossa proposta aqui é fazer uso deste *software* para explorar conteúdos do Ensino Superior que, em geral, são abordados em sala de aula de modo tradicional, isto é, utilizando-se apenas o quadro negro e o giz. Nosso objetivo é proporcionar aos professores, uma forma adicional, e mais agradável, de exploração do conteúdo acima citado e, aos alunos, uma forma de aprendizagem mais atraente. Esperamos que este artigo possa incentivar o uso do *software* Geogebra, como também de outros *softwares*, de modo que o ensino e a aprendizagem tornem-se muito mais atraentes e satisfatórios tanto para os professores quanto para os alunos.

Palavras-chaves: Softwares, Geometria Dinâmica, Extremos de Funções.

1. Introdução

Tendo em vista a formação inicial e contínua do professor, e a importância de um estudo a respeito de conteúdos que podem ser explorados pelos softwares presentes no mercado, o artigo aqui pretendido, propõe apresentar uma exploração de um conteúdo matemático aplicado em uma fase do ensino superior. Para isto, utilizaremos o software Geogebra.

O Geogebra é um software gratuito de geometria dinâmica que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e Judith Hohenwarter com o objetivo de facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos vistos em sala de aula. No Geogebra pode ser explorado os recursos da geometria, da álgebra e do cálculo. Com isso, pode-se ver ao mesmo tempo, a representação geométrica e a representação algébrica de um objeto através deste software.

O Geogebra é um software que explora, principalmente, os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio. Neste trabalho, veremos que este software também pode ser utilizado na compreensão de conteúdos do Ensino Superior. Mostraremos como é possível determinar máximos e mínimos de funções, sujeito à restrições, apenas usando as ferramentas do Geogebra. Apresentaremos exemplos de problemas envolvendo funções de uma e duas variáveis. Problemas estes que, normalmente, são solucionados com o uso do teste da primeira derivada ou com o teste da segunda derivada, no caso de funções de uma variável, e com o uso dos Multiplicadores de Lagrange, no caso de funções de duas variáveis.

Nosso objetivo é mostrar que é possível trabalhar esses conceitos do cálculo de forma geométrica usando a dinâmica do Geogebra, o que facilita a aprendizagem e motiva o aluno a um interesse maior na disciplina de cálculo. Por outro lado, queremos mostrar que podemos fazer uso da tecnologia para melhorar o processo de ensino-aprendizagem e a interação professor-aluno.

2. Referencial Teórico

Um grande problema encontrado pelos professores que lecionam a disciplina de matemática, nos ensinos fundamental, médio e superior, é a dificuldade dos alunos em assimilar os conteúdos em sala de aula. Uma justificativa para este fato é que, o recurso mais utilizado pelo professor ainda continua sendo a aula expositiva. Muitas pesquisas em Educação Matemática procuram mostrar caminhos na tentativa de reverter esse e outros problemas relacionados à disciplina de matemática. Um desses caminhos tem sido a utilização de softwares matemáticos no auxílio à resolução de problemas e na assimilação de conceitos matemáticos.

Os softwares são ambientes que promovem reflexão sobre significados matemáticos a partir da resolução de problemas em situações de interação professor-estudante-tecnologias na sala de aula. Em particular, o *software* Geogebra tem um dinamismo que proporciona uma aula cheia de descobertas agradáveis e surpreendentes. Segundo JORDÃO (2011), o uso do *software* Geogebra pode levar o aluno à aquisição e domínio de saber, dando significado ao objeto matemático, oferecer diferentes representações inerentes a esse objeto, expandir o conhecimento dos diferentes saberes relacionados entre si e, visualizar representações gráficas em diferentes posições. Para CHICON (2011), com o uso do Geogebra, a aula torna-se dinâmica, o aluno tem a liberdade de ver a matemática em movimento e o professor deixa sua aula correr em torno das questões que o educando levanta ao movimentar o gráfico.

Os softwares no ensino de matemática podem se constituir em uma importante ferramenta auxiliar no trabalho pedagógico, aprimorando nossas formas de ministrar aulas, tornando-as mais dinâmicas. Com a utilização destes recursos no ensino está ocorrendo uma reconstrução das teorias e práticas pedagógicas e uma interação crescente entre professores e alunos.

Acreditamos que é possível, e cada vez mais indispensável, que alunos e professores se familiarizem e disponham dessas ferramentas, tanto em sala de aula presencial como através do ensino a distância, com o objetivo de estabelecer alguns indicativos do que se pode fazer em termos educacionais com softwares educativos, utilizando suas vantagens e procurando superar suas limitações.

O trabalho de inclusão de tecnologias informáticas no ensino de matemática requer a escolha de softwares adequados e potentes, preparação, incorporação e engajamento por parte do professor. Sendo que, simplesmente usar as ferramentas tecnológicas para pedagogicamente reproduzir livros didáticos não culmina em transformações significativas de aprendizagem para os estudantes. Nesse caso, faz-se uso de um novo método para o mesmo processo de ensino, centrado no conhecimento científico presente nos livros didáticos.

A presença das tecnologias, principalmente do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas frente ao processo de ensino e de aprendizagem. Essa educação necessitará de um professor mediador do processo de interação tecnologia/aprendizagem, que desafie constantemente os seus alunos com experiências de aprendizagem significativas, tanto presenciais como a distância.

Durante os últimos anos, diversos pesquisadores tem contribuído com trabalhos significantes na busca pela melhoria no processo ensino aprendizagem. Dentre eles destacamos MACHADO (1995), BORBA e PENTEADO (2001), SCHEFFER (2002), SCHEFFER e DALLAZEN (2005) e outros. Em seus trabalhos, o uso das tecnologias é colocada como forte aliada no ensino de Matemática e que deve ser explorada na complementação das aulas.

3. Metodologia da Pesquisa

O presente artigo procura desenvolver formas de explorar conteúdos específicos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral estudadas no Ensino Superior. Faremos uso do software Geogebra para explorar problemas de determinar máximos e mínimos de funções sujeito à restrições. Faremos isto através de problemas propostos, cuja resolução é colocada em forma de passos a serem seguidos. Os resultados de cada problema são colocados na forma de figuras copiadas do Geogebra. A proposta de ensino aqui apresentada, será testada com alunos de Cálculo I e Cálculo III do curso de Engenharia Ambiental do Centro de Ciências e Tecnologia Ambiental da Universidade Federal de Campina Grande, campus de Pombal. O objetivo principal é avaliar o desempenho do aluno diante das atividades propostas usando o software Geogebra e confrontá-lo com o desempenho do mesmo diante do processo manual usando a teoria do Cálculo.

4. Dados da Proposta

Os problemas colocados abaixo são, em geral, aplicados em sala de aula nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo III e quase sempre são resolvidos usando as definições e teoremas relacionados aos conteúdos específicos de cada problema. São problemas de determinação de máximos e mínimos de funções, de uma e duas variáveis, com restrições e são, em geral, provenientes de problemas de otimização.

Vejamos a seguir os problemas dados e os passos que devem ser seguidos no Geogebra para determinar a solução de cada problema.

Problema 1: Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^2 + 2x + 2$, no intervalo [-2,1].

Solução: Resolvendo este problema usando os conceitos de derivadas, mais precisamente, o teste da primeira derivada, veremos que o máximo e o mínimo de f, no intervalo [-2,1], são respectivamente, $f(1)=5$ e $f(-1)=1$. O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa os gráficos das retas $x=-2$ e $x=1$ e da curva $y=x^2+2x+2$;

2º Passo: Determine as interseções das retas com a curva dada;

3º Passo: Escreva $z=0$ (ou outro valor diferente de zero) e depois $y=z$;

4º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões: Fazendo variar o valor de z, observamos que o gráfico da função f, para valores de x no intervalo [-2, 1], atinge valor mínimo $z=1$ no ponto A(-1,1) (ver Figura 1) e valor máximo $z=5$ no ponto C(1,5) (ver Figura 2).

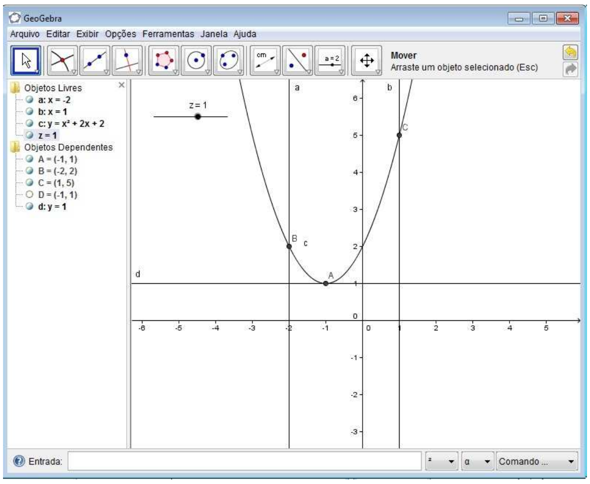

Figura 1 - Mínimo para a função

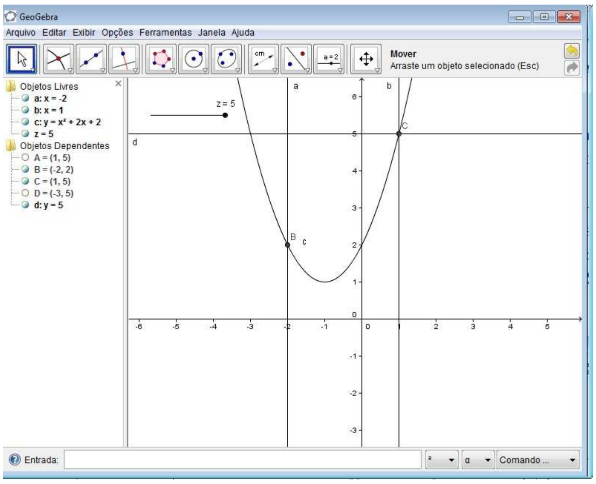

Figura 2 - Máximo para a função

Problema 2: Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x)=x^4-4x^2+2$, no intervalo [-1,2].

Solução: Resolvendo este problema usando o teste da primeira derivada ou o teste da segunda derivada, veremos que o máximo e o mínimo de f, no intervalo [-1,2], são respectivamente, $f(0)=f(2)=2$ e $f(\sqrt{2})=-2$. O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa os gráficos das retas $x=-1$ e $x=2$ e da curva $y=x^4-4x^2+2$;

2º Passo: Determine as interseções das retas com a curva dada;

3º Passo: Escreva $z = 0$ (ou outro valor diferente de zero) e depois $y = z$;

4º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões:

Fazendo variar o valor de z, observamos que o gráfico da função f, para valores de x no intervalo [-1, 2], atinge valor mínimo $z = -2$ no ponto D(1.41, -2) (ver Figura 3) e valor máximo $z = 2$ nos pontos B(2,2) e D(0,2) (ver Figura 4).

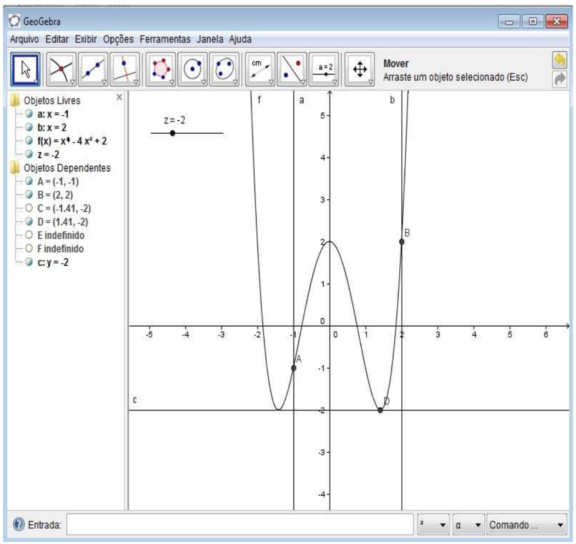

Figura 3 - Mínimo para a função

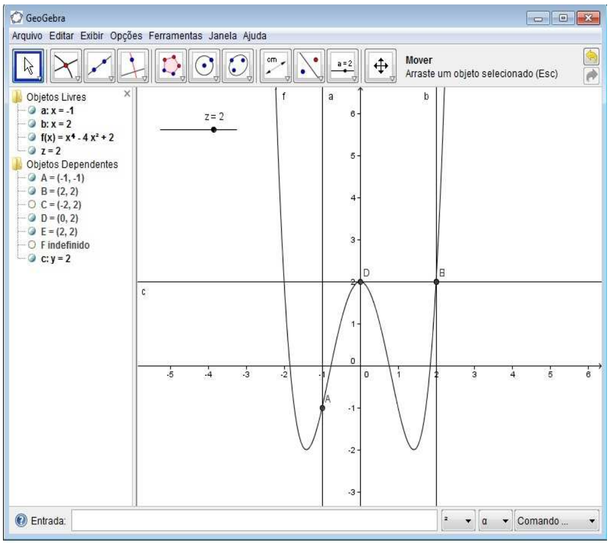

Figura 4 - Máximo para a função

Problema 3: Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, no intervalo [-1,2].

Solução: Resolvendo este problema usando o teste da primeira derivada veremos que o máximo e o mínimo de f, no intervalo [-1,2], são respectivamente, $f(2) = \dfrac{1}{2}$ e $f(-1) = -1$.

O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa os gráficos das retas $x = -1$ e $x = 2$ e da curva $y = \dfrac{x}{x+2}$;

2º Passo: Determine as interseções das retas com a curva dada;

3º Passo: Escreva $z = 0$ (ou outro valor diferente de zero) e depois $y = z$;

4º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões:

Fazendo variar o valor de z, observamos que o gráfico da função f, para valores de x no intervalo [-1, 2], atinge valor mínimo $z = -1$ no ponto A (-1, -1) (ver Figura 5) e valor máximo $z = 0.5$ no ponto B(2, 0.5) (ver Figura 6).

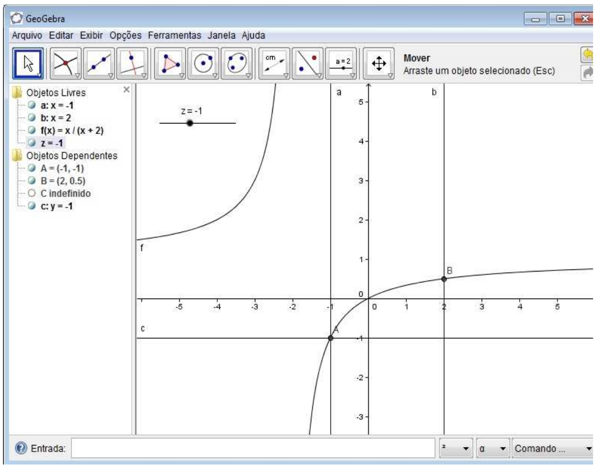

Figura 5 - Mínimo para a função

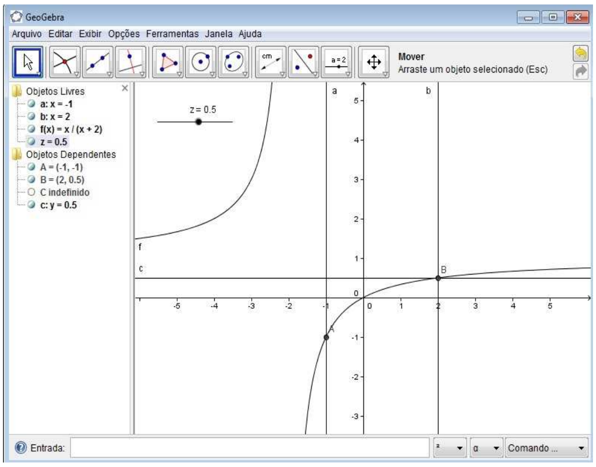

Figura 6 - Máximo para a função

Problema 4: Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$, no retângulo $R = \{(x,y); 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

Solução: Resolvendo este problema usando as noções de derivadas de funções de duas variáveis, veremos que os pontos (0,0) e (2,2) são pontos de mínimo e o mínimo é 0. Já o máximo é atingido no ponto (3,0) e é 9. O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa o retângulo ABCD, cujos vértices são A(0,0), B(3,0), C(0,2) e D(2,2).

2º Passo: Escreva $z = 0$ (ou outro valor diferente de zero) e depois $z = x^2 - 2xy + 2y$;

3º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões:

Fazendo variar o valor de z, observamos que o gráfico da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$, com (x, y) no retângulo R, atinge a fronteira do retângulo com valor mínimo $z = 0$ nos pontos

A (0, 0) e E(2,2) (ver Figura 7). Por outro lado, o gráfico de f atinge a fronteira do retângulo com valor máximo $z = 9$ no ponto B (3, 0) (ver Figura 8).

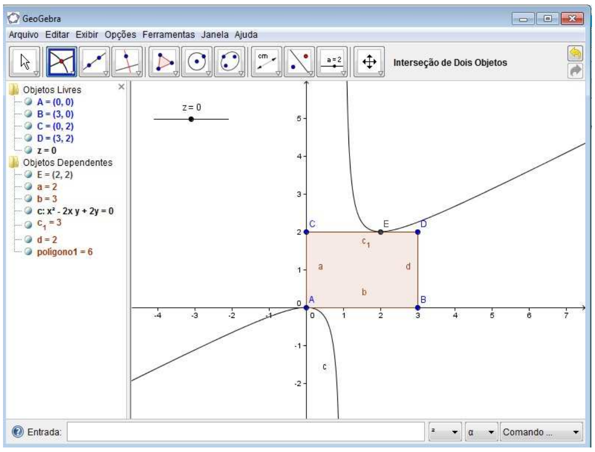

Figura 7 - Mínimo na fronteira do retângulo

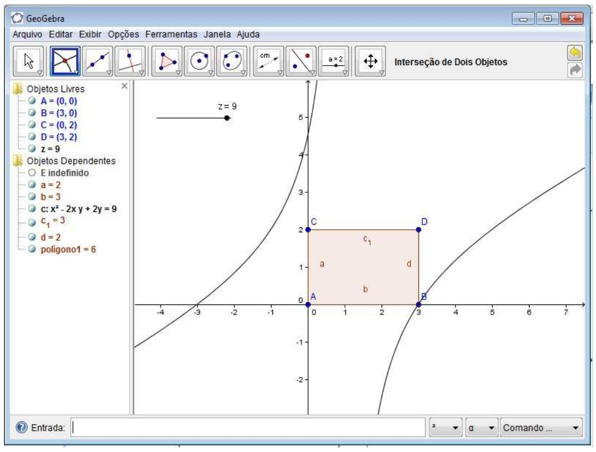

Figura 8 - Máximo na fronteira do retângulo

Problema 5: Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, no disco $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \le 1\}$.

Solução: Resolvendo este problema usando Multiplicadores de Lagrange, veremos que os pontos (0,0) e (2,2) são pontos de mínimo e o mínimo é 0. Já o máximo é atingido no ponto (3,0) e é 9. O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

2º Passo: Escreva $z = 1$ (ou outro valor diferente de um) e depois escreva $x^2 + 2y^2 = z$;

3º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões:

Fazendo variar o valor de z, observamos que o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, para cada ponto (x, y) no disco D, atinge a fronteira do disco com valor mínimo $z = 1$ nos pontos A (1, 0) e B(-1,0) (ver Figura 9). Por outro lado, o gráfico atinge a fronteira do disco com valor máximo $z = 2$ nos pontos A (0, -1) e D(0, 1) (ver Figura 10). No interior do disco, o valor mínimo $z = 0$ é atingido no ponto (0,0).

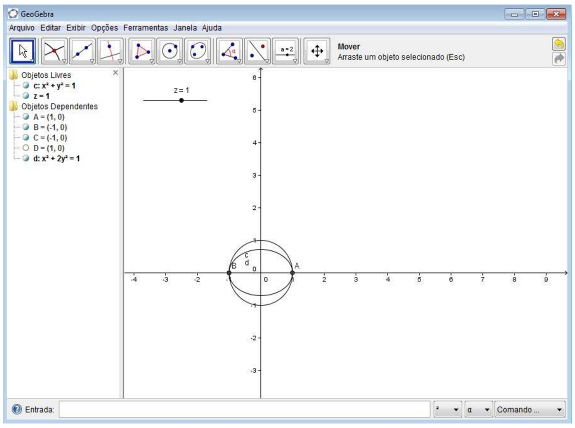

Figura 9 - Mínimo na fronteira do disco

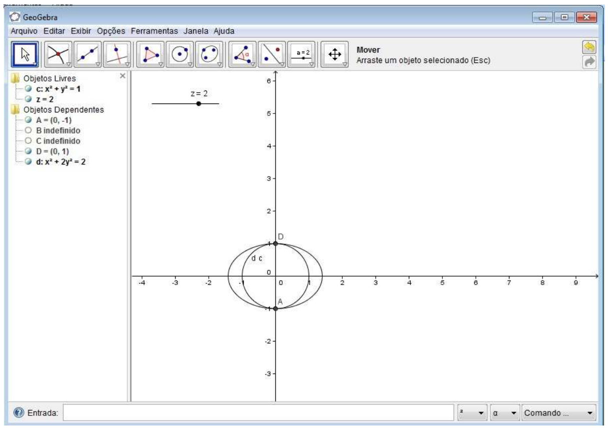

Figura 10 - Máximo na fronteira do disco

Problema 6: Determinar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x + y$, sujeitos às seguintes restrições:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 7 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Solução: Este é um problema de otimização em programação linear que pode ser resolvido pelo método gráfico ou pelo método simplex. Usando qualquer um desses métodos veremos que a função atinge valor mínimo 0 no ponto (0,0) e valor máximo 5 no ponto (3,2). O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa o gráfico das retas $a: 2x + y = 8$, $b: x + 2y = 7$, $c: y = 3$, $d: x = 0$ e $e: y = 0$;

2º Passo: Considerando essas retas como sendo as restrições dadas do problema, obtemos o polígono ABCDEA que é a região das soluções do problema;

3º Passo: Escreva $z = 0$ (ou outro valor diferente de zero) e depois escreva a curva $x + y = z$;

4º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões: O gráfico de f atinge a fronteira da região das soluções com valor mínimo $z = 0$ no ponto A (0, 0) (ver Figura 11) e valor máximo $z = 5$ no ponto C (3, 2) (ver Figura 12).

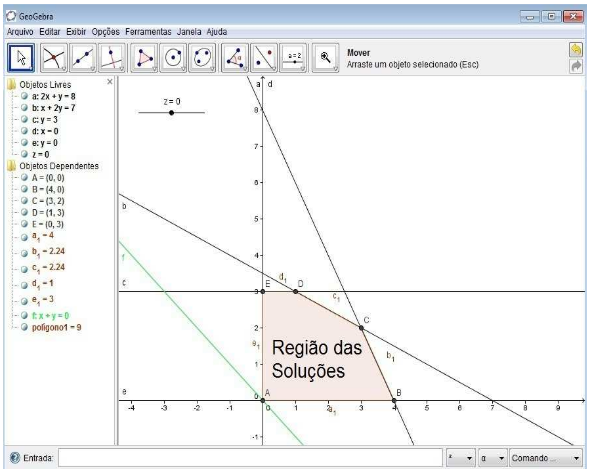

Figura 11 – Mínimo para a Função f

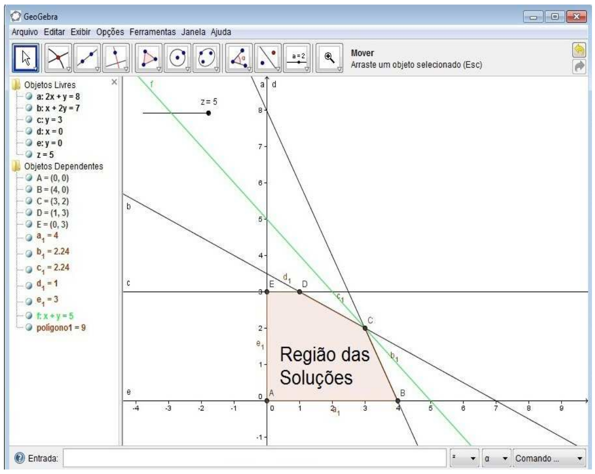

Figura 12 - Máximo para a Função f

Problema 7: Determinar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x,y) = 65x + 30y$, sujeitos às seguintes restrições:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 7 \\ 3x + 2y \geq 9 \\ x \geq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Solução: Este é um problema de otimização em programação linear que pode ser resolvido pelo método gráfico ou pelo método simplex. Usando qualquer um desses métodos veremos que a função atinge valor mínimo 155 no ponto (1,3) e não atinge valor máximo. O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo.

1º Passo: Construa o gráfico das retas $a: 2x + 3y = 7$, $b: 3x + 2y = 9$, $c: x = 1$, $d: x = 0$ e $e: y = 0$;

2º Passo: Considerando essas retas como sendo as restrições dadas do problema, obtemos a região das soluções do problema como na Figura 13;

3º Passo: Escreva $z = 0$ (ou outro valor diferente de zero) e depois escreva a curva $65x + 30y = z$;

4º Passo: Usando a ferramenta seletor, faça variar o valor de z.

Análise e conclusões: O gráfico da curva toca na fronteira da região das soluções atingindo valor mínimo $z = 155$ no ponto A (1, 3) e não atinge valor máximo, pois o valor de z cresce ilimitadamente para cada ponto (x, y) na região das soluções (ver Figura 13).

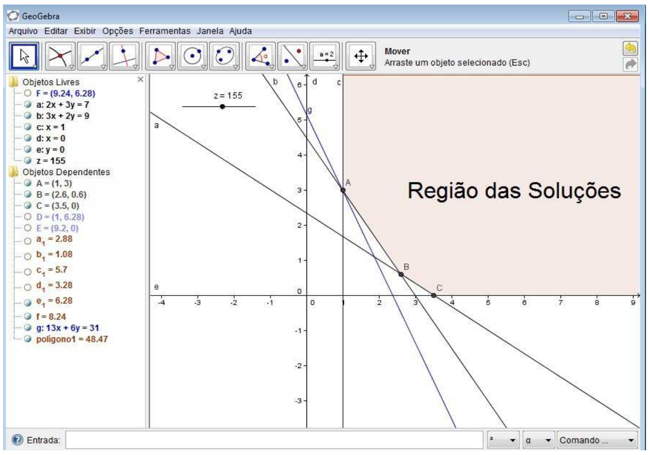

Figura 13 - Mínimo para a Função f

5. Resultados

Os problemas propostos na secção anterior foram aplicados a alunos de Cálculo I e Cálculo III do curso de Engenharia Ambiental do Centro de Ciências e Tecnologia Ambiental da Universidade Federal de Campina Grande, campus de Pombal. Os alunos mostraram grande interesse e um bom aproveitamento na resolução dos problemas propostos.

6. Referências

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CHICON, T. R.; et al. **Geogebra e o estudo da função quadrática.** In: SEMINARIO INTERINSTITUCIONAL DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, XVI. 2011.

GIRALDO, V. e CARVALHO, L. M. **Breve bibliografia comentada sobre o uso de tecnologias computacionais no ensino de matemática avançada**. In: ANAIS DO VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SBEM, 2004.

JORDÃO, A. L. I.; BIANCHINI, B. L. **Um estudo sobre a resolução de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do ensino médio.** In: IV ENCONTRO DE PRODUÇÃO DISCENTE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV. 2011. São Paulo.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**. São Paulo: Ed. Cortez, 1995. Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.

SCHEFFER, N. F. **Corpo - Tecnologias - Matemática: uma interação possível no Ensino Fundamental**. Rio Grande do Sul: EDIFAPES, 2002.

SCHEFFER, N. F. e DALAZZEN, A. B., **A matemática na sala de aula utilizando calculadora gráfica: uma pesquisa com acadêmicos**. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. SBEMRS, Número 7, Ano VII, 2005/2006.