# OS NÚMEROS IRRACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE DO CONTEXTO DIDÁTICO E SEU ENSINO

João Lino Neto[1]
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB
*j.lino-matemaluco@hotmail.com*
José Joelson Pimentel
jjmat@uepb.edu.br

## RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo realizado em duas coleções de livros didáticos do ensino fundamental de como se dá o tratamento do conteúdo números irracionais e como este é apresentado aos alunos. Aspiramos com esta pesquisa incentivar professores e interessados em melhorias na qualidade do ensino a refletirem sobre a eficiência de novas ferramentas somadas ao livro didático na prática de ensino do conjunto dos irracionais. Discutimos a contextualização dos números irracionais e a importância do seu aprendizado como base para conteúdos subseqüentes. Apresentamos sua história desde seu surgimento, sua ocultação, e sua aceitação pelos matemáticos. Situamos de forma geral, o tratamento e a relevância destes números no ensino e observamos baseados em concepções de autores especialistas em Educação Matemática como também nos PCN a abordagem deste tema. Averiguamos uma defasagem nos métodos de ensino adotados pelas coleções, a qual abre lacunas que podem ser preenchidas com a criatividade do professor.

**Palavras – chave**: Números irracionais, Livro didático, Educação Matemática.

## 1. Introdução

As dificuldades apresentadas por grande número de alunos do ensino fundamental em compreender e diferenciar os conjuntos numéricos, especificamente o conjunto dos números irracionais, influencia consideravelmente o aprendizado destes nos conteúdos que lhes serão apresentados posteriormente. Os métodos utilizados pelos professores de matemática ainda não alcançaram os modelos desejados de educação. No entanto, qualquer que seja a metodologia utilizada, o livro didático é certamente uma das principiais fontes de pesquisa em sala de aula.

Os números irracionais são números quase imaginários na matemática, que utilizamos ao fazermos compras, pagarmos ou recebermos dinheiro, olharmos a hora no relógio; enfim

[1] Graduando no curso de matemática (UEPB campus VI).

na matemática que utilizamos diariamente. Porém, o estudo destes números é fundamental para a compreensão de diversos casos que corriqueiramente poderemos ser afrontados. Considerando os livros didáticos como uma das mais importantes ferramentas no ensino fundamental, e conseqüentemente uma das maiores fontes de estudo dos números irracionais, realizamos uma pesquisa em duas coleções de livros destinados ao ensino de matemática no ensino fundamental com o intuito de analisar como se dá a abordagem destes números.

## 2. Do surgimento dos números aos irracionais

A história da matemática nos indica o surgimento dos números como formas de representar grandezas ainda na idade pré-histórica. Eves (2004) aponta que há cerca de 50.000 anos o homem já contava. E ainda, que junto com a evolução do pensamento humano e a formação do seu meio social era necessário também que se idealizassem novos símbolos que representassem grandezas maiores.

Essa necessidade foi superada perto da Idade Média quando já se utilizava a contagem com os números inteiros, contagem com bases e por agrupamento simples e logo depois com o sistema de agrupamentos multiplicativos.

Com a expansão e o avanço das civilizações e a revolução agrícola, as necessidades de desenvolver métodos para o cultivo e outras atividades relacionadas ao meio social impulsionaram o desenvolvimento da capacidade de manipulação prática dos números e das grandezas. Criando assim, uma inter-relação entre estes, e estimulando o avanço da matemática como ciência. Eves (2004) expõe:

> A matemática primitiva necessitava de um embasamento para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. (...) Assim pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do oriente antigo como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos. (EVES, 2004, p.57).

Acompanhando o crescimento das civilizações, a matemática como instrumento facilitador e prático crescia de acordo com as necessidades de cada região. Civilizações como os babilônios, egípcios, romanos e outras mais que cresceram às margens dos rios Nilo e Eufrates são referência no estudo, criação e desenvolvimento da geometria, aritmética, sistemas de pesos e medidas, agrimensuras, engenharia, astronomia e comércio. Entretanto, foi na sociedade grega que a matemática recebeu um tratamento à parte da matemática utilitária praticada pelos outros povos. Segundo D'Ambrosio (2010):

> Os gregos praticavam uma matemática utilitária semelhante àquela praticada pelos egípcios. Mas, ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato com objetivos religiosos e rituais. Começa assim um modelo de explicações que vai dar origem as ciências, à filosofia e à matemática abstrata. É importante notar que duas formas de matemática, uma que poderíamos chamar de utilitária e outra, matemática abstrata (ou teoria de explicações) conviviam e são perfeitamente distinguíveis no mundo grego. (D'AMBROSIO, 2010 p. 35).

A civilização grega tinha uma organização social além das demais civilizações da região do Mediterrâneo. Ela foi exemplo em economia, educação e filosofia. E isto favoreceu o crescimento da matemática, o reconhecimento e avanço dela como ciência. Por volta de 600 a.C. surgiram escolas filosóficas com objetivo da análise, experimentação e pesquisa baseadas na fundamentação crítica e na racionalidade.

Sócrates, Platão, Aristóteles, Pitágoras, filósofos, pensadores e matemáticos, desenvolveram teorias educacionais baseadas na experimentação, criaram escolas e academias. Atribui-se à escola dos pitagóricos várias das grandes descobertas matemáticas daquela época. A escola pitagórica era uma irmandade centrada no estudo filosófico, matemático, e das ciências naturais. Dedicava-se também à música.

A filosofia dos pitagóricos apoiava-se na idéia de que tudo podia ser explicado através dos números inteiros. Segundo Cyrino (2006, p. 38), "os números governam o mundo" era o lema dos pitagóricos. A contribuição da descoberta da escola pitagórica é abundante e abrange várias áreas do conhecimento matemático, tais como: a geometria, a música, a astronomia, lógica, teoria dos números, aritmética, etc. A mais famosa dessas contribuições é conhecida como o "Teorema de Pitágoras". Este assegura que em um triângulo retângulo a medida do maior lado elevado ao quadrado tem a mesma medida da soma das medidas dos outros dois lados também elevados ao quadrado.

Nos estudos de geometria os pitagóricos descobriram medidas as quais não poderiam representar como inteiros. Perceberam ainda que, o número que representava a grandeza dos segmentos não poderia ser representado como quociente da divisão de dois inteiros quais chamavam de racionais. A grandeza racional até então satisfazia o cálculo de medidas de agrimensuras, de pesos e volumes. Ou seja, na matemática utilitária os inteiros eram suficientes para efetuar os cálculos. Os pitagóricos preferiram ocultar a existência das grandezas incomensuráveis.

Garcia (2005) em sua dissertação “ensino dos números irracionais no nível fundamental” destaca: “os gregos negaram a existência dos números irracionais”. Para eles a reta onde se marcava todos os racionais era contínua; admitir os irracionais era imaginá-la cheia de buracos.” (GARCIA, 2005, p. 11). A descoberta das grandezas incomensuráveis abalou a crença dos matemáticos gregos uma vez que eles defendiam os inteiros como explicação para tudo o que existia. Além do mais, a situação colocava em cheque toda história e teoria pitagórica.

O conceito dos números irracionais tornava-se uma das mais ambiciosas respostas e pesquisas na época. A escola platônica criada após a morte de Pitágoras já considerava os números incomensuráveis. Porém, pouco conseguiu desenvolver-se naquele período. Eudoxo, por volta do ano 370 a.C. apresentou a teoria das proporções e o método da exaustão; a partir daí, os segmentos incomensuráveis passaram a ser compreendidos e aceitos geometricamente. Serviram de base para a elaboração do livro “os elementos” de Euclides e o estudo do cálculo diferencial. Durante séculos matemáticos trabalhavam com os números incomensuráveis; contudo, uma definição do ponto de vista matemático só foi apresentada no século XIX pelo matemático alemão Dedekind, o qual apresentou o conceito de limite em sua obra “continuidade e números irracionais”, desenvolvida através da aritmética sem o uso da geometria como guia.

O conceito de corte de Dedekind conhecido como “postulado de continuidade de Dedekind” nos dá a afirmação de que qualquer ponto na reta tem uma representação numérica, isto é:

> (...) chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais: se existe um número racional a separar as duas classes, o número coincidirá com o número racional; se não

> existe tal numero, o número real dir-se-á irracional (DEDEKIND, apud SANTOS, 2007, p. 21).

O postulado apresentado por Dedekind pôs fim à obscuridade dos números irracionais que atravessou a história desde a descoberta destas grandezas pelos pitagóricos. São notáveis os obstáculos que os números irracionais atravessaram para serem aceitos e reconhecidos no contexto matemático. A sua evolução é uma das mais belas e longas historias desde o surgimento dos números, e sua representação é de extrema importância nos cálculos dos dias atuais.

## 3. Os números irracionais no ensino fundamental

Na escola os números irracionais, apesar da sua importância, são apresentados aos alunos de forma vaga. Na maioria das vezes sem a utilização de ferramentas que conduzam estes a viajar pelos conjuntos dos números reais e consigam diferenciar os números irracionais dos números racionais. Alguns professores se utilizam de números irracionais como o numero $\pi$ (PI), e a $\sqrt{2}$ para formalizar o conceito dos números irracionais a partir da negação do conceito dos números racionais. Estas situações são um retrocesso na compreensão matemática dos números irracionais. Em sua tese de doutorado Rezende (2003, apud SANTOS, 2007) compara estas situações pedagógicas com o período histórico da construção do conceito destes números, e considera como "nebuloso" o aprendizado dos irracionais no processo pedagógico. Segundo essa autora:

> Assim como os matemáticos renascentistas, os nossos alunos também são privados durante todo o ensino básico dos instrumentos que possibilitariam uma superação desse estado nebuloso do número irracional. Em verdade, a privação a que se submetem nossos estudantes é muito maior: escondem deles inclusive os problemas motivadores e as dificuldades intrínsecas à construção do significado do número irracional (REZENDE, 2003, apud SANTOS, 2007).

A ideia de ensino da matemática no Brasil tem avançado no sentido de apresentar aos alunos situações tais quais estes possam pesquisar, investigar, questionar, formular, construir assim suas próprias ideias sobre determinados conteúdos. Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) apresentados pelo governo brasileiro em 1997, apresentam propostas inovadoras de ensino reconhecendo a deficiência do processo educacional praticado em salas de aula nas últimas décadas e estabelecendo objetivos que visam melhorar a qualidade do ensino. Os PCN'S ainda orientam os professores a reverem ou formularem um currículo que primaziem a avaliação dos objetivos, conteúdos, formulação e aplicação de atividades e avaliação, reflexão sobre suas práticas pedagógicas, planejamento dos trabalhos, identificar, produzir ou solicitar novos materiais que possibilitem contextos mais significativos de aprendizagem.

Quando se refere ao ensino dos números irracionais, os PCN priorizam a identificação do número irracional como sendo expresso por infinitas ordens decimais não periódicas, a distinção entre racionais e irracionais, a identificação de números irracionais obtidos por raízes quadradas, a localização destes números na reta numérica com régua e compasso e cálculos a partir de aproximações com os racionais utilizando-se, também, a calculadora.

D'Ambrósio (2010) considera educação como uma estratégia da sociedade para facilitar que cada indivíduo atinja o seu potencial e para estimular cada indivíduo a colaborar com os outros em ações comuns para o bem comum. Ressalta ainda que no processo educacional praticado os alunos estejam sendo tratados como máquinas que passam por fases de construção e aperfeiçoamento e ao fim de algumas etapas (séries) deverão estar prontas para reproduzir os métodos que lhes foram ensinados. Ainda, classifica a educação praticada nas escolas como um treinamento de indivíduos para executar tarefas específicas em trabalhos de rotina.

Santaló (1996) observa a realidade mundial rapidamente mutável, e assim como ela, a escola deve também estar periodicamente avaliando e adaptando suas formas de ensino; sejam em conteúdos como também suas metodologias. Caso contrário, existirá um afastamento entre esta e a realidade ambiental; a visão de Santaló (1996) sobre a educação é que cabe a ela preparar as gerações futuras para a realidade que terão que viver, proporcionando-lhes um ensino necessário para o desempenho com eficiência, dentro da sociedade que conviverão.

Podemos notar nas concepções destes educadores como também nos PCN que a educação matemática deve ser tratada de forma especial como um dos pilares que conduz o indivíduo a construir a sua percepção e relação com o meio ao qual está inserido. Cabendo a ela apresentar-lhe situações que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio e de um conhecimento eficaz que lhe será útil para resolver problemas que sejam teóricos ou práticos na sua vida cotidiana. E incumbe o professor como condutor deste processo cabendo a ele usufruir da utilização de ferramentas que apresentadas aos alunos sejam auxiliadores na construção do aprendizado.

Os livros didáticos ainda são os maiores auxiliadores dos professores no ensino fundamental das escolas brasileiras. Estes são elaborados por grandes autores matemáticos e são submetidos a avaliações pelo programa nacional do livro didático (PNLD) que avalia e seleciona a qualidade dos mesmos antes que sejam adquiridos pelos professores que na rede pública de ensino podem escolher as coleções que preferem utilizar em sala.

## 4. Aspectos metodológicos da pesquisa

Segundo as orientações dos PCN e baseados nas concepções de educação de D'Ambrosio (2010) e Santaló (1996) foram analisadas duas coleções de livros do ensino fundamental aceitos pelo PNLD, que segundo o próprio PNLD estão entre os mais utilizados por professores da rede pública de ensino no Brasil. Para a realização dessa análise, foram considerados os seguintes aspectos: o ensino dos números irracionais, como se conceituam, a partir de qual momento eles são mencionados, qual a sua contextualização, como é exposto o conteúdo e quais as ferramentas utilizadas para atrair a curiosidade e compreensão dos alunos ao tema.

As coleções analisadas foram:

1- José Ruy Giovanni jr. ; Bendito Castrucci. "A conquista da matemática" editora ftd. Código do pnld: 24802 col. 02;
2- Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio machado. "matemática & realidade". Editora saraiva. Código do pnld: 24931 col. 02.

## 5. Resultados obtidos

Na coleção "A conquista da matemática" os números irracionais são definidos no 8º ano de forma bem simples e com caráter geométrico. Os autores utilizaram uma malha pontilhada na qual se podem traçar segmentos entre os pontos a critério do professor desde que em algum momento seja traçado um quadrado de lados unitários e traçando sua diagonal os alunos deverão ser questionados quanto à medida desta. Implicitamente é aplicado o teorema de Pitágoras até que cheguem ao cálculo da $\sqrt{2}$. Esta situação oferece um momento de dúvida, questionamento onde o professor pode utilizar-se dele para explorar o cálculo de uma raiz inexata.

Os autores apresentam a definição dos números irracionais e comparam este conceito com o conceito dos números racionais mostrando a diferenciação entre eles. São expostos exemplos que ensinam os alunos a diferenciarem os números irracionais dos números racionais. Em seguida os autores utilizam-se de materiais concretos como cordões, barbantes e objetos com formas cilíndricas, medindo as circunferências e dividindo pelo diâmetro até que chegue ao numero $\pi$. Por fim, definem que a união dos conjuntos dos números racionais com o conjunto dos números irracionais constitui o conjunto dos números reais.

A definição utilizada para os números irracionais é a seguinte: “número irracional é todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não periódica.” Na parte destinada ao tratamento da informação os autores apresentam exemplos com a utilização de gráficos e tabelas, estimulando os alunos a observarem as informações expostas e fazerem suas interpretações.

A coleção dos autores Iezzi, Dolce e Machado também apresenta os números irracionais no oitavo ano. Eles iniciam o conteúdo com uma revisão do cálculo de áreas de figuras quadradas; traçam a diagonal no quadrado e dão a idéia de divisão do quadrado em dois triângulos iguais. Passam por uma revisão dos números naturais e inteiros para então exporem o conteúdo dos números racionais. Os números irracionais são apresentados após o ensino da identificação dos números inteiros e dos números racionais na reta real. Os autores destacam que entre dois números inteiros não existe outro inteiro, mas que existem infinitos pontos situados entre eles. Estes pontos podem ser identificados como números racionais e outros números que representados por números não racionais. A definição dos números irracionais é apresentada de forma idêntica à coleção anterior. Porém utiliza-se a figura do quadrado na reta real e utiliza-se um compasso para transportar a medida da diagonal para a reta; estes utilizam o cálculo da área para mostrarem que o número que representa a medida do segmento não é um número racional; e não sendo racional é irracional. Logo após definem os números irracionais como "todo número representado em pontos da reta que não corresponde a números racionais. A representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica." conclui-se o conteúdo com poucos exemplos e em seguida definem número real como "todo número que é racional ou irracional".

## 6. Considerações finais

Os números irracionais foram discriminados por muito tempo talvez pela pouca necessidade do seu uso na matemática utilitária praticada nos séculos anteriores. Porém, com o avanço do conhecimento humano e o surgimento de novas necessidades que estimulavam o desenvolvimento de novas pesquisas e consequentemente de novas descobertas os números irracionais ressurgiram, senão como base, mas como apoio para teorias e conceitos de novas descobertas. Principalmente no último século, quando conceitos de educação escolar que priorizam o conhecimento como um valor adquirido e construído pelo próprio indivíduo após a concretização do conhecimento antecedidos de dúvida, questionamento, confrontamento, pesquisa e formulação do conhecimento.

Com o conhecimento adquirido desta forma, o indivíduo é capaz de utilizar este em diversas situações que lhe forem apresentadas quer sejam problemas práticos e/ou abstratos. A forma que as coleções analisadas apresentaram os números irracionais mesmo aprovados pelo PNLD satisfaz parcialmente os objetivos propostos pelos PCN'S e as concepções dos educadores mencionados. A utilização do recurso à História da Matemática é utilizada apenas na coleção "a conquista da matemática" e o tratamento da informação é muito aquém do que almejam as propostas curriculares dos educadores. A visão de que os números irracionais são apenas números representados a partir da não existência dos números racionais prevalece em todo conteúdo.

Entendemos que da forma que os conteúdos são apresentados, a compreensão e o aprendizado dos números irracionais regridem, considerando os avanços e as dificuldades que estas grandezas atravessaram durante o tempo para que além de serem compreendidas, fossem consideradas e apresentadas como números na reta dos reais.

**Referencias Bibliográficas**

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais Introdução aos parâmetros curriculares nacionais*/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.126p.**:**

CYRINO, Helio Fernando Ferreira. *Matemática & gregos*/ Helio Fernando Ferreira Cyrino, - campinas, SP. Editora átomo 2006.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática: da teoria à pratica*/ Ubiratan D'Ambrosio.- campinas, SP: papirus, 2010. (coleção perspectivas em educação matemática).

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática*, 5º, 6º, 7º, e 8º anos./ Jose Ruy Giovanni Junior, benedicto Castrucci. –Ed. renovada. - São Paulo: ftd, 2009- (coleção a conquista da matemática).

*Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática.* – Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2010. 96 p. ISBN 978-85-7783-036-7. 1. Livros didáticos. 2. Matemática. I. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. II. Título. CDU 371.671.

IEZZI, Gelson. *Matemática e realidade:* 6º, 7º, 8º e 9º anos/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado. 6º edição- São Paulo: Atual, 2009.

SANTOS, Joyce Camargo dos. *Números reais um desafio na educação básica*. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_ Real.pdf >. Acesso em: 31 outubro 2011.

SANTALÓ, Luis A. "Matemática para não matemáticos", in PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (orgs). *Didática da Matemática*: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

REZENDE, Veridiana. NOGUEIRA, Célia Maria Ignatius. *Diferenças conceituais relacionadas aos Números Irracionais por alunos de três níveis de ensino*: uma análise por meio da Teoria dos Campos Conceituais. Disponível em: <http://www.ebrapem.com.br/meeting4web/congressista/modulos/trabalho/trabalho/gt2/7cdb3d7998819d0c4a2551ce08261a71.pdf >. Acesso em: 11 novembro 2011.