

(RE)DESCOBRINDO O TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E MATERIAL CONCRETO

GT 10

Eliane Dias Martins GUERRA

E.E.E.F.M. José Rodrigues de Ataíde

emartins.prof@gmail.com

Kátia Maria de MEDEIROS

Universidade Estadual da Paraíba

katiamedeirosuepb@gmail.com

RESUMO

Este relato de experiência é resultado de uma pesquisa realizada numa escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de Itatuba no Estado da Paraíba, numa turma do 1º ano do Ensino Médio. O objetivo foi desenvolver investigações matemáticas em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, estimulando o raciocínio lógico-dedutivo de cada aluno e a reflexão sobre as aplicações deste teorema. Além disso, buscamos também oferecer um ambiente de aprendizagem com compreensão no qual os alunos proponham, explorem e investiguem demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto; descrever como as investigações de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, utilizando material concreto, contribuem para aprendizagem dos alunos; identificar quais as modificações que acontecem na relação professor/aluno com o uso das investigações matemáticas; propor uma reflexão acerca da relevância deste teorema no que se refere às suas aplicações. Utilizamos o Painel Integrado no trabalho em grupos.

Palavras-chave: Investigações Matemáticas, Teorema de Pitágoras, Material Concreto

1. Introdução

Os conhecimentos matemáticos geralmente são trabalhados em sala de aula quase sempre sem aplicações à realidade ou às demais ciências, ficando, desse modo, restrito às aplicações dentro da própria Matemática, primando por uma busca de saberes teóricos, descontextualizados e fixos, tratando a Matemática apenas como um acúmulo de fórmulas. Diante disso, atualmente, surge a necessidade de desenvolver uma aprendizagem Matemática com compreensão para os alunos.

Ao considerarmos a proposta de trabalhar a Matemática de forma contextualizada, tendo por finalidade preparar os alunos para utilizá-la em sua vida social e profissional é preciso que o aluno seja o centro do processo de ensino-aprendizagem.

A pesquisa que realizamos propõe o uso de atividades de investigações matemáticas para contribuir no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Estas atividades oferecem desafios aos alunos, permitem a elaboração e discussão de diferentes estratégias, permitindo que os alunos possam expor suas ideias, compreender e respeitar as ideias dos outros. Através desse relato de experiência apresentamos algumas atividades de investigações em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, utilizando material concreto, fazendo com que o ensino-aprendizagem desse conteúdo adquira mais significado para os alunos.

As investigações matemáticas permitem aos alunos a formulação de conjecturas e a escolha dos testes adequados para validá-las ou rejeitá-las. Admitem ainda que os alunos busquem argumentos que demonstrem as suas conjecturas, resistindo a sucessivos testes e levantando novas questões para investigar. Simulando, assim, o trabalho desenvolvido pelos matemáticos profissionais. Nas atividades com investigações matemáticas, as situações apresentadas aos alunos são abertas, com questões não totalmente formuladas, o que permite um maior envolvimento dos alunos na aula. Por este caráter mais aberto, as investigações matemáticas favorecem o envolvimento de todos os alunos, cada um dentro das suas possibilidades.

A relevância deste trabalho justifica-se pelo fato das investigações matemáticas de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras para turmas do 1º ano do Ensino Médio, poder desenvolver conhecimentos matemáticos de forma a estimular nos alunos a capacidade de pensar, refletir e entender os fenômenos usando a Matemática, além de desenvolver habilidades e estratégias para serem aplicadas em outras áreas do conhecimento, preparando-o para realizar-se como cidadão em uma sociedade submetida a constantes mudanças.

A pesquisa teve como objetivo geral desenvolver investigações matemáticas em algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem estimulando o raciocínio lógico-dedutivo de cada aluno, e a reflexão dos alunos sobre as aplicações deste teorema. E, como objetivos específicos, oferecer um ambiente de aprendizagem com compreensão em que os alunos proponham, explorem e investiguem demonstrações do Teorema de Pitágoras que utilizam material concreto; descrever como as investigações de algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras utilizando material concreto, contribuem para a aprendizagem dos alunos; identificar quais as modificações que acontecem na relação professor/aluno com o uso das investigações matemáticas; propor uma reflexão acerca da relevância deste teorema no que se refere às suas aplicações.

2. Metodologia

Para operacionalizar os objetivos da pesquisa, utilizamos instrumentos para coletar dados qualitativos. Neste sentido, realizamos atividades de investigação matemática, utilizando materiais concretos e uma técnica de trabalho em grupo denominada Painel Integrado, numa turma do 1º ano do Ensino Médio, composta de 25 alunos, em uma escola da rede estadual de ensino localizada na cidade de Itatuba, no Estado da Paraíba.

A pesquisa, foi planejada para ser desenvolvida em três momentos: Pré-Teste, realização de cinco atividades de investigações matemáticas de demonstrações do Teorema de Pitágoras, feito através de cinco encontros e Pós-Teste¹. Além disso, utilizamos notas de campo.

No primeiro encontro, foi aplicado o Pré-Teste com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios que dos alunos com relação ao Teorema de Pitágoras. Os resultados da análise do Pré-Teste contribuiu para o planejamento das aulas. Do segundo ao sexto encontro foi realizada, a cada aula, uma atividade de investigação matemática com uma demonstração do Teorema de Pitágoras. Em cada atividade era explorada uma demonstração diferente, usando material concreto. Dentre a mais de 370 demonstrações que existem do Teorema, foram escolhidas para serem exploradas pelos alunos: *a demonstração de Bhaskara, a demonstração Hindu, a demonstração usando semelhança de triângulos, a demonstração feita pelo presidente Garfield, e a demonstração utilizando a área do semicírculo.*

Em todas as aulas de investigações os alunos foram divididos em grupos, utilizamos uma técnica de trabalho em grupo, o Painel Integrado. Em cada aula foi utilizada uma demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando material concreto.

O Painel Integrado foi dividido em três momentos. No *1º momento* conforme a Figura 1 os alunos numa quantidade de 25, foram divididos em 5 grupos de 5 alunos. A partir daí foi dado a cada grupo a tarefa de investigação sobre uma demonstração do Teorema de Pitágoras, que deveriam explorar. No *2º momento*, depois de explorar bem a tarefa proposta, de formular suas conjecturas, os grupos foram desfeitos para serem formados novos grupos, conforme a Figura 2. Esses grupos eram formados por um componente de cada grupo, ou seja, um componente do grupo 1, um do grupo 2, um do grupo 3, um do grupo 4, um do grupo 5. Neste momento, cada componente das equipes explicaram como chegaram às suas conjecturas e como as validaram mostrando suas estratégias. O *3º momento* conforme a Figura 3 foi a finalização do Painel

¹ O Pré-Teste e o Pós-Teste foram iguais.

Integrado. Neste momento, os alunos ficaram sentados em um só grupo e foi desenvolvido um debate sobre todos os acontecimentos da aula, sobre a mediação do professor, e os alunos colocaram seu ponto de vista sobre a aula.

1º MOMENTO: 5 grupos de 5 alunos

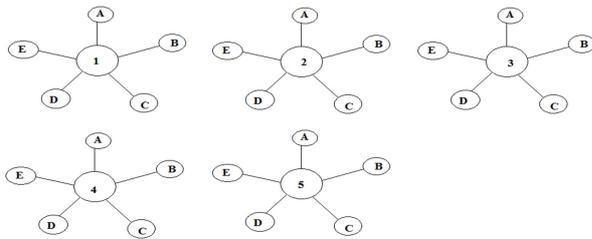


Figura 1 - Primeiro momento do Painel Integrado

2º MOMENTO: 5 equipes de 5 alunos

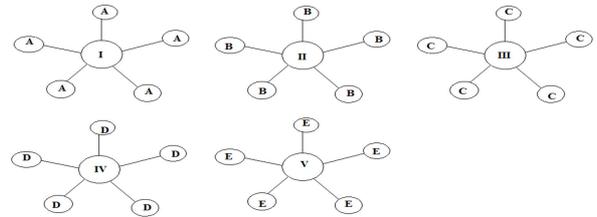


Figura 2 - Segundo momento do Painel Integrado

3º MOMENTO: 1 grupo de 25 pessoas

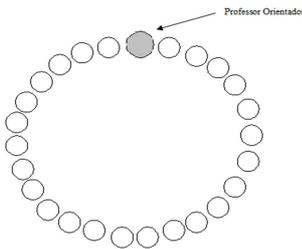


Figura 3 – Terceiro momento do Painel Integrado

3. O Desenvolvimento das Aulas

Ao analisamos o Pré-Teste percebemos a dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras. Então foram realizadas cinco atividades de investigações matemáticas sobre algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras com materiais concretos.

Para a realização das atividades, em todas as aulas cada grupo dispunha de várias tesouras, réguas, canetas, folhas de papel sulfite para as anotações e cartolinas de diferentes cores, de modo a poderem realizar a exploração da tarefa, para a exploração das atividades os alunos dispunham a cada aula de 90 minutos. O uso destes materiais concretos facilitou a realização de descobertas, possibilitou aos estudantes estabelecer relações ampliando o seu pensamento abstrato possibilitando a compreensão do Teorema de Pitágoras. A manipulação direta dos materiais concretos, por parte

dos alunos serviu para favorecer a autonomia e participação ativa dos mesmos no processo de ensino-aprendizagem.

A primeira atividade propunha a *Investigação da Demonstração de Bhaskara*:

1. Desenhe quatro triângulos iguais de catetos **b** e **c**, a hipotenusa **a**, recorte-os;
2. Desenhe e recorte um quadrado cujos lados sejam iguais a diferença entre os catetos do triângulo;
3. Com as cinco peças (4 triângulos e 1 quadrado), monte um quadrado de lado **a**;
4. Que modificações da subfigura-chave (o triângulo) são necessárias de modo que as hipotenusas dos triângulos se tornem lados do quadrado. Qual a expressão utilizada para calcular a área de cada triângulo retângulo e por que fazemos uso da mesma? E qual a expressão de área de cada quadrado?
5. Agora analisando a figura montada o que se pode concluir? Compare suas descobertas com as de seus colegas. Estabeleça conjecturas e justifique-as.

No início da apresentação da tarefa, os alunos tiveram um pouco de dificuldade, pois nunca tinham trabalhado com investigações matemáticas. No entanto, no decorrer da aula os alunos foram se envolvendo na atividade, começaram a explorar a tarefa e, aos poucos, entenderam que deveriam se esforçar para não pedir ajuda à professora. Além disso, procuraram discutir as suas dúvidas com os colegas no grupo e as decisões que tinham que tomar para validar as suas conjecturas.

Os alunos começaram a recortar os triângulos e o quadrado e, logo em seguida, de acordo com o que era pedido na tarefa, foram desenvolvendo suas explorações. Com a manipulação dos materiais os alunos montaram um quadrado de área a^2 e o quadrado menor de área $(b - c)^2$. Em seguida, encontraram a área do triângulo, uma aluna destacou que: “Com dois triângulos retângulos conseguimos formar um retângulo, então isto nos mostrou que cada triângulo retângulo é a metade do retângulo, então como a área do retângulo é $b \cdot c$ a área de cada triângulo vai ser $\frac{b \cdot c}{2}$.”.

Nessa fase em outro grupo os alunos além de intuir que a área de cada triângulo retângulo era $\frac{b \cdot c}{2}$, notaram que havia 4 triângulos retângulos, então asseguraram que sua área seria $4 \frac{b \cdot c}{2}$. Todos os grupos mostraram que chegaram a seguinte expressão: $a^2 = (b - c)^2 + 4 \frac{b \cdot c}{2}$.

Dando continuidade à validação de suas conjecturas, os alunos que já haviam chegado à expressão citada anteriormente, perceberam que dava para resolver o produto notável que havia na

expressão. Então, resolvendo o produto notável chegaram à seguinte relação $a^2 = b^2 + c^2$, perceberam que chegaram à expressão do Teorema de Pitágoras.

Uma aluna de um grupo concluiu dizendo que o Teorema de Pitágoras diz que “a medida do quadrado da hipotenusa é igual à medida da soma dos quadrados dos catetos”. A validação de suas conjecturas estava claramente relacionada a conteúdos que já haviam estudado anteriormente.

A segunda atividade propunha a *Investigações da Demonstração Hindu do Teorema de Pitágoras*:

1. Desenhe e recorte um triângulo retângulo qualquer. Não importa as medidas de seus lados. Represente a medida dos lados por letras: **a** é a medida da hipotenusa; **b** e **c** são as medidas dos catetos. Em seguida, recorte outros três triângulos iguais ao primeiro.
2. Agora desenhe e recorte um quadrado, cujo lado seja à hipotenusa **a** dos triângulos retângulos.
3. Desenhe e recorte mais dois quadrados: um lado de lado **b** e outro de lado **c**.
4. Agora com o quadrado de lado **a** e os quatro triângulos, forme um quadrado. O que você conclui? Anote.
5. Usando agora os mesmos quatro triângulos e os dois quadrados de lados **b** e **c**, forme outro quadrado. O que você conclui? E qual a relação com o primeiro quadrado? Anote. Se você eliminar os quatro triângulos do primeiro quadrado, o que acontece? E se você eliminar os quatro triângulos do segundo quadrado, o que sobrar?
6. Comparando os dois quadrados, o que você conclui?
7. Escreva suas conjecturas e justifique-as?

A apresentação desta atividade foi mais tranquila, pois eles já haviam feito a primeira e já sabiam como deviam prosseguir no decorrer da mesma, sabiam que deveriam explorá-la sem pedir a orientação da professora. Os alunos tiveram consciência da responsabilidade de expressar os seus interesses, questões e compreensão da atividade proposta. Além disso, puderam explicar suas estratégias e responder acerca de sua legitimidade. À professora coube a tarefa de criar um ambiente em que os alunos focaram a sua atenção na elaboração de conjecturas e na sua validação.

Com a manipulação dos materiais, os alunos perceberam que o primeiro quadrado formado com os quatro triângulos e o quadrado de lado **a** tinha como medida de lado a soma dos catetos dos triângulos, ou seja, cada lado media **b + c** e usando os mesmos triângulos e os dois quadrados de

lados b e c , formaram outro quadrado de lado $b + c$. Concluíram, então, que os quadrados eram iguais, pois os seus lados tinham a mesma medida.

Continuando com a atividade, os alunos fizeram o que pedia o item 5 e eliminaram os quatro triângulos do primeiro quadrado. A professora os questionou o havia restado, os alunos perceberam que sobrava um quadrado de lado a e que sua área seria a^2 .

Após esta afirmação, a professora questionou se todos os grupos conseguiram chegar a esta afirmação e todos afirmaram que sim. Prosseguindo com a atividade, os alunos retiraram do segundo quadrado, que era igual ao primeiro, os mesmos quatro triângulos e todos os grupos perceberam que sobravam dois quadrados de lados b e c . Concluíram ainda que assim como o quadrado de lado a tem área igual a^2 , os outros têm área igual à b^2 e c^2 e que a soma de suas áreas era igual a $b^2 + c^2$. A partir daí, concluíram que $a^2 = b^2 + c^2$.

A terceira atividade propunha a *Investigação da Demonstração do Teorema de Pitágoras Usando Semelhança de Triângulo*

1. Desenhe um triângulo retângulo e nomeie seus elementos:

- Vértices?
- Catetos?
- Hipotenusa?
- Altura relativa à hipotenusa?
- Projeções dos catetos sobre a hipotenusa?

Observe a figura. O que consegue detectar? Anote

2. Agora desenhe separadamente o que você detectou o que pode identificar? Faça suas conjecturas.
3. A partir daí, que relações você pode estabelecer entre as medidas deste triângulo. Investigue razões e proporções, adição dos membros e igualdade entre as relações encontradas.
4. Faça suas conjecturas e escreva-as.
5. Justifique as suas conjecturas.

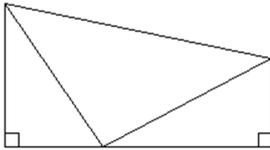
Após desenhar o triângulo, os alunos começaram a nomear seus elementos. A primeira dificuldade encontrada foi determinar a altura do triângulo relativa à hipotenusa e projeção dos catetos sobre a hipotenusa. A professora então lhes incentivou a desenhar o triângulo de outras formas pra ver se seria mais fácil de ver a altura do mesmo. Quando eles conseguiram encontrar a altura do triângulo e nomeá-la, encontraram e nomearam as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e também o vértice relacionado à altura do triângulo.

Em seguida, os alunos, perceberam que havia não apenas um, mas três triângulos retângulos e os desenharam separadamente, porém, foi notória a dificuldade que os alunos tiveram para perceber que os triângulos eram semelhantes.

Depois de algum tempo, um grupo conseguiu perceber e mostrar que os triângulos eram semelhantes, os outros grupos demoraram um pouco mais, mas chegaram à mesma afirmação. Ao saber que os triângulos eram semelhantes apenas um grupo conseguiu chegar à relação pitagórica que é validada para todo triângulo retângulo.

A quarta atividade propunha a *Demonstração do Teorema de Pitágoras feita pelo presidente Garfield*

1. Desenhe e recorte dois triângulos retângulos de mesma medida, determine seus catetos **b** e **c**, e sua hipotenusa **a**;
2. Monte a seguinte figura



3. Qual figura você obteve? Determine a área dessa figura. Que outra maneira pode-se encontrar a área desta figura? Que relação existe entre as áreas?
4. O que você conclui? Escreva suas conjecturas. Explique-as. Por que elas te parecem verdadeiras?

Os alunos ao recortar os dois triângulos de catetos **b** e **c**, e hipotenusa **a**, perceberão que ao coincidir dois vértices dos triângulos notaram que para terminar a montagem da figura deveriam desenhar e recortar um novo triângulo que se formava ao fechar a figura, então empolgados eles começaram a desenhar e recortar o novo triângulo. A professora, ao perceber a descoberta dos dois alunos, os incentivou a mostrar que tipo de triângulo se tratava. Os alunos perceberam que se tratava de um triângulo retângulo.

Em seguida, quando já tinham montado a figura, os alunos começaram a explorar a atividade. O material os ajudou a visualizar que a figura montada era um quadrilátero, pois tinha quatro lados. Perceberam que a figura era um trapézio, depois dessa descoberta os alunos deveriam mostrar como se calculava a área do trapézio, muitos alunos não recordavam mais como se calculava a mesma, a professora vendo a dificuldade dos grupos fez uma intervenção, os incentivou a observar bem a figura e identificar nela algumas características.

Depois da intervenção, os alunos deram início a uma nova etapa da investigação. Nesta etapa, depois de algum tempo, uma aluna expôs para o seu grupo que no trapézio havia a altura e também as bases, procuraram então quem era altura do trapézio, após muitas tentativas chegaram à conclusão que a altura media $b + c$. Logo em seguida, após muita exploração, chegaram à conclusão de que as bases desse trapézio eram b e c . Para encontrar a área da figura a professora teve que intervir, pois os alunos tiveram muita dificuldade e nenhum grupo havia chegado à área do trapézio. A professora pediu que se desenhasse um trapézio qualquer em uma folha de papel sulfite e, em seguida, explorassem a figura desenha.

Dando continuidade a atividade, os alunos fizeram o que a professora sugeriu e chegaram à área do trapézio. Após todos os grupos ter encontrado como se representa a área de um trapézio, perceberam que área da figura montada era igual à soma das áreas dos triângulos. Escreveram a seguinte igualdade $\frac{(b+c)}{2} \cdot (b + c) = \frac{2bc+a^2}{2}$, ao desenvolve-la encontraram a relação do Teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$.

Na quinta aula, foi proposto aos alunos uma atividade que os ajudassem a *generalizar o Teorema de Pitágoras*.

1. Desenhe e recorte um triângulo retângulo qualquer. Não importa as medidas de seus lados. Represente a medida dos lados por letras: a é a medida da hipotenusa; b e c são as medidas dos catetos;
2. Agora desenhe e recorte um semicírculo para cada cateto do triângulo e um para a hipotenusa. Em seguida, sobreponha sobre cada cateto e sobre a hipotenusa um semicírculo;
3. Compare a soma das áreas dos semicírculos sobrepostos sobre os catetos com a área do semicírculo sobreposto sobre a hipotenusa;
4. Estabeleça suas conjecturas e as justifique.

Recortando o triângulo de catetos b e c , e hipotenusa a . Em seguida, usando o compasso, desenharam e recortaram os semicírculos, perceberam que a medida b e c de cada cateto do triângulo ia ser o diâmetro do semicírculo, e que a medida a era a medida do diâmetro do outro semicírculo.

Dando continuada à atividade, os alunos sobrepuseram os semicírculos sobre os catetos e sobre a hipotenusa, começaram em seguida, a explorar as áreas dos semicírculos. Muitos alunos tiveram dificuldades, mas depois de algum tempo de investigação, um grupo lembrou como se calculava a área de um círculo, então chegaram à conclusão que a área de um semicírculo é metade da área do círculo. Depois de algumas explorações chegaram a relação do Teorema de Pitágoras.

Após cada aula, quando todos os grupos tinham conseguido explorar bem a atividade e validar suas conjecturas, foi utilizada a técnica do Painel Integrado, em que cada grupo foi desfeito e montado novos grupos. Cada membro deveria expor como desenvolveram a atividade e quais as estratégias usadas para validar as suas conjecturas. Logo após a discussão em grupo, a professora coordenou uma discussão em um único grupo, onde os alunos explicaram como desenvolveram sua atividade e quais foram suas maiores dificuldades, além de expressar o que acharam desta proposta e como isso ajudou a desenvolver um pensamento matemático. No final, entregaram as anotações feitas por eles durante toda a aula.

Diante de tudo o que foi citado, a professora e os alunos fizeram um balanço muito positivo das aulas. É preciso destacar que as manipulações das figuras ajudaram os alunos na dedução do Teorema de Pitágoras e na sua validação de maneira formal.

A execução destas atividades de investigação matemática do Teorema de Pitágoras com o uso de materiais concretos produziu efeitos bastante significativos na aprendizagem dos alunos, pois estes participaram efetivamente de todo o processo, fazendo a manipulação dos materiais, descrevendo os resultados, formulando e validando suas conjecturas.

As atividades desempenhadas despertaram nos alunos um maior interesse pela Matemática, pois sua exploração contribuiu para desenvolver mais a capacidade de raciocínio e criatividade dos alunos, além de facilitar a compreensão de ideias e técnicas matemáticas, ajudou a conscientizar os alunos que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento em que o processo de investigação tem um papel fundamental.

4. Referências

AMES, P. Uma professora de olho nas aplicações. In: BUSHAW, D. et al. *Aplicações da matemática escolar*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. Pag. 10-17.

BASTIAN, I. V.; ALMOULOU, S.A. *O Teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente*. In: Educação Matemática em Revista, SBEM, nº14, p.45-53, agosto 2003

BROCARD, J. *As Investigações na Sala de Aula de Matemática: um projeto curricular no 8.º ano*. Tese (Doutorado). Universidade de Lisboa, 2001. Disponível em < <http://repositorio.ul.pt> > Acesso em 02 de Abril, 2012.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores - Campinas*. SP: Autores Associados, 2006, p. 3-37.

MATOS, J. M. & SERRAZINA, M. L. *Recursos na aula de Matemática*. In: _____. *Didática da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996. Cap.7, p.192-211

MEDEIROS, K. M. *Laboratório no ensino de matemática*. UEPB, 2003.

MELLO, E. G. S. *Demonstração: “Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino de Geometria”*. São Paulo: PUC, 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/elizabeth_g_mello.pdf> Acesso em 12 de Janeiro, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* – Brasília: MEC /SEF, 1997.

PONTE, J. P., BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RÊGO, R. M. & RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores associados, 2006