A DIALÉTICA ENTRE O CONCRETO E O ABSTRATO NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Luís Havelange Soares
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB)
luis.soares@ifpb.edu.br ou havelan@gmail.com

Rogéria Gaudêncio do Rêgo
Universidade Federal da Paraíba
rogeriaedumat@gmail.com

RESUMO

Apresenta-se reflexão sobre os conceitos de concreto e de abstrato analisando como são concebidos no processo de ensino de Matemática. Usaram-se bases teóricas da Filosofia da Matemática, da Educação e da História da Matemática. Os dados foram coletados com entrevistas aplicadas a um grupo de professores em atuação. Ficaram evidenciadas concepções, sobre tais conceitos, próximas das do senso comum, sem evidências de promoção de relação dialética entre eles. Os docentes consideram que a maioria dos objetos matemáticos estudados na Educação Básica são representáveis por objetos concretos e que o processo de representação é fundamental para a compreensão dos conceitos. Sugerem-se outras concepções para o concreto e para o abstrato, defendendo-se que a concretude e a abstração de um objeto não só depende dos aspectos sensitivos, mas, da realização de um processo de ensino pautado numa relação dialética entre o concreto (material ou cognitivo) e o abstrato.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Relação concreto e abstrato; Dialética no ensino de Matemática.

Introdução

Concreto e abstrato são conceitos polissêmicos que exigem significações cuidadosas quando se busca relacioná-los aos processos de ensino. Usualmente fala-se de concreto como algo que existe em forma material, de consistência mais ou menos sólida, enquanto que, o abstrato é referido ao que expressa uma característica separada do objeto a que pertence.

As referências a esses termos, em geral, são baseadas em convenções do senso comum. Usa-se ‘concreto’ para referenciar a realidade, as coisas perceptíveis. Já o ‘abstrato’ é adotado como ‘imaginário’, algo ‘desmembrado da realidade’, de compreensão difícil.

Há indicativos que as práticas de ensino são assentadas em concepções de concreto e de abstrato presas a significados pontuais. Por um lado, uma corrente defende modelos de aula centrados no cotidiano do aluno, propondo conteúdos ‘concretos’ e evitando às ‘abstrações’. Por outro, há os defensores do formalismo, que ignoram as associações ao contexto, aos materiais manipuláveis e atuam com metodologias que não contemplam os objetos da realidade.

Para Lefebvre (1979), esse entendimento fragmentado e individualizado das coisas, como no caso dos termos concreto e abstrato, tem origem no falado “milagre grego”, que culminou com a distinção entre contemplação (entendida como abstração) e ação (entendida como concreto). Daí deriva o pensamento simplista sobre muitos conceitos, influenciando a forma de conceber vários campos do conhecimento, dentre eles, o conhecimento matemático.

É preciso ultrapassar os limites da trivialidade. Nesse sentido, Wilensky (1991) entende que sobre qualquer objeto ao qual se faz referência, sempre há mais do que aquilo que se vislumbra no primeiro momento, sejam palavras, ideias, sentimentos, histórias, descrições. “Quando um objeto é considerado como objeto concreto, não estamos nos referindo a um objeto "lá fora", mas sim a um objeto "aqui dentro", das nossas construções pessoais do objeto” (p.3)

Nesse texto faz-se uma discussão sobre as concepções de concreto e de abstrato e suas relações no conhecimento matemático e no ensino de matemática. Busca-se compreender, a partir de entrevistas aplicadas a um grupo de 7 (sete) docentes em atuação, as concepções de professores sobre esses conceitos, observando como se concebe a relação entre o concreto e o abstrato nas práticas de ensino e tentando encontrar indícios de uma relação dialética entre eles. Com base nas reflexões e nos dados observados, propõe-se um novo arranjo conceptivo para esses conceitos no âmbito do conhecimento e do ensino de matemática.

1. O Concreto e o Abstrato no ensino de Matemática

As concepções de concreto e de abstrato estabelecidas no senso comum colocam no campo da abstração todos os objetos de estudo da Matemática. Há que se ultrapassar essa barreira conceitual para dar a esses conceitos uma perspectiva teórica mais aprofundada centrada numa dialética onde qualquer objeto possui, simultaneamente, um nível de concretude e de abstração que varia de sujeito para sujeito.

Defende-se, com base em Giardinetto (1999), que a não relação da Matemática com as aplicações do mundo real, vendo-a como uma estrutura de conhecimentos acabados e exatos, pode levar a uma série de problemas para o ensino na Educação Básica.

> [...] [O]s conceitos escolares, na medida em que não apresentam uma relação imediata com a vida dos alunos, são regidos por procedimentos de ensino arbitrários, como que um amontoado de regras sem nexo que são impostas aos alunos (GIARDINETTO, 1999, p.04).

Porém, basear as práticas de ensino exclusivamente no cotidiano do aluno resulta numa limitação perigosa do conhecimento. “Da necessária valorização do conhecimento cotidiano, viu-se ocorrer uma supervalorização desse conhecimento perdendo-se de vista à relação com o saber escolar” (GIARDINETTO, 1999, p.05).

Kaminski *et al* (2008), buscando entender a importância da ligação de conceitos abstratos da Matemática com problemas do mundo real para a aprendizagem, defenderam que essa forma de tratar o ensino de Matemática não traz benefícios para a compreensão dos conceitos. Para eles, o problema com os exemplos do mundo real é que eles obscurecem a Matemática subjacente, e os estudantes não são capazes de transferir o conhecimento para novos problemas. No entanto, tais considerações se deram a partir do entendimento superficial do concreto, concebendo-o apenas como algo que está ao alcance do sujeito. Entende-se que a análise dessa relação a partir de concepções abreviadas compromete qualquer estudo.

Maia (2001) observou que são definições do senso comum que justificam o uso das categorizações ditas como 'matemática abstrata' e 'matemática concreta'. Ela percebeu que o concreto está associado ao cotidiano e manipulável, enquanto o abstrato está ligado ao raciocínio e a lógica. Para ela, o ensino de matemática é guiado pelo apego ao seu estado mais abstrato, no sentido de não apresentar qualquer ligação com o concreto material, quando muito, exploram-se apenas as relações triviais do conhecimento matemático com o cotidiano.

Para Machado (2011, p.54), o processo de conhecimento, de uma maneira geral, desenvolve-se numa ascensão do concreto ao abstrato, da realidade aos modelos teóricos. Após o fracasso do Movimento da Matemática Moderna fortaleceu-se a crença de que, partindo da manipulação de objetos concretos, a criança naturalmente desenvolveria o raciocínio abstrato. Com isso, surgiram expressões do tipo, "primeiro trabalha-se o conceito no concreto para depois trabalhá-lo no abstrato", ou seja, concreto e abstrato se caracterizando como dois elementos dissociados.

Essas interpretações reducionistas e disjuntas se constituem em equívocos relativos às concepções de concreto e de abstrato e permeiam os espaços escolares, interferindo diretamente no processo de ensino. Um erro conceptual diz respeito à responsabilidade que é atribuída a Matemática pelos processos de abstração no âmbito da escola. Justificam-se, quase sempre, as dificuldades no percurso do ensino e da aprendizagem, por essa via de análise.

No entanto, de acordo com as concepções do senso comum, não só a Matemática, mas, todas as Ciências são constituídas de processos abstratos, por mais que seus objetos de estudo sejam elementos do mundo físico. O elemento 'abstração' deve ser concebido como natural nos processos de ensino, pois seria impossível avançar em termos de conhecimento, em qualquer nível de escolaridade, sem se adentrar no mundo da abstração.

Defende-se, como Kosik, que "[A] práxis utilitária imediata e o senso comum a ela correspondente colocam o homem em condições de orientar-se no mundo, de familiarizar-se com as coisas e manejá-las, mas não proporcionam a compreensão das coisas e da realidade" (KOSIK, 1985, p. 10).

Outro equívoco é não considerar as capacidades do ser humano inerentes ao processo de simbolização (representação) e, em um estágio adiante, de abstração. Pensar que a aprendizagem pode ser prejudicada pelo aspecto abstrato dos conhecimentos e conceitos científicos significa desconsiderar a capacidade do ser humano em lidar com abstrações desde a sua infância. O simbolismo, demarcado essencialmente pela representação é a primeira capacidade desenvolvida pelo ser humano e é essencial para o desenvolvimento do processo abstrato. (DEVLIN, 2006)

Para Piaget (1978; 1990), o pensamento é a inteligência interiorizada que não mais se apoia sobre a ação direta no objeto, mas em imagens mentais, no simbolismo, na abstração. Ele considera que a partir dos sete anos de idade, aproximadamente, o ser humano desenvolve a capacidade de representação de forma mais complexa, começando a pensar simbólica e abstratamente, a representar situações diversas através da linguagem, a considerar um objeto por meio de um símbolo, de uma imagem mental (abstração). Já nas situações de brincadeiras infantis, de acordo com Frobel (1887), a criança, naturalmente, recorre ao processo de representação simbólica. Para o autor, esse processo faz parte do desenvolvimento da criança e contribui diretamente para o amadurecimento cognitivo com base na relação entre o jogo e a brincadeira.

2. Concepções de conhecimento matemático presentes nas práticas de ensino

Constatou-se que as concepções dos docentes sobre o conhecimento matemático têm grande marca daqueles que foram seus formadores, fato já ressaltado por Cury (1994) ao enfatizar que "[e]sse professor tem, então, suas crenças primitivas reforçadas pelo consenso da comunidade e pela autoridade dos mestres" (p.33).

Quando se solicitou que classificassem alguns objetos da Matemática em cinco níveis[1], encontraram-se indícios da relação entre o conteúdo preferido na docência e a concepção que é adotada pelo professor. Há uma objeção pela maioria em lecionar conteúdos classificados como "objetos sem representação", talvez por considerarem que a manipulação (ou a possibilidade de múltiplas representações) facilita o processo de ensino. Sobre isto, Maia (2001), sugere que há uma concepção associando a Matemática concreta (na perspectiva de representação por manipuláveis) à facilidade e a Matemática abstrata (na perspectiva de conceitos não representáveis), à complexidade.

1 Níveis: Objeto concreto manipulável; Objeto concreto, mas, não manipulável; Objeto abstrato de fácil representação; Objeto abstrato de difícil representação; Objeto abstrato sem possibilidade de representação.

Os professores consideram os conceitos e/ou objetos matemáticos que possuem os elos mais fortes com o cotidiano como os de maior possibilidade de compreensão por parte dos estudantes. Isso está associado à ênfase que tem sido dada ao uso de manipuláveis no ensino, conforme mostrou Giardinetto (1999).

Foi apresentada aos docentes uma lista de objetos e se pediu para que classificassem cada objeto como concreto ou abstrato, objetivando, com essa classificação, ter indícios da concepção do professor sobre algo ser concreto ou ser abstrato. (Quadro 1)

Quadro 1: Classificação dada pelos professores aos objetos

Objeto	Professores						
	Carmem	César	Sebastiana	Samuel	Valmiro	Armando	Urânio
Um pensamento, uma ideia	A	A	A	A	A	A	A
A equação da área de um círculo	A	A	A	A	A	A	A
Um círculo	C	A	A	C ou A	C	A	A
Um cubo	C	C	C	C ou A	C	C	A
O número 8	A	A	A	A	A	A	A
As forças que atuam num corpo	A	A	A	C	C	A	C
Uma cadeira	C	C	C	C	C	C	C
As letras do alfabeto	A	A	A	A	C	C	A
Uma reta	A	A	A	A	A	A	A

A – Abstrato; C – Concreto.

As considerações dos professores estão relacionadas ao entendimento do senso comum. Para eles, em geral, algo é concreto se pode ser visto, tocado, enquanto o abstrato está ligado à imaginação, às ideias. Tais posicionamentos tem um caráter intuitivo, superficial, muitas vezes não reflexivo sobre o sentido amplo de um conceito. "As primeiras associações com o concreto sugerem algo tangível, sólido. Você pode tocá-lo, cheirá-lo, chutá-lo, é real. Um olhar mais atento revela uma certa confusão nesta noção intuitiva". (WILENSKY, 1991, p.3).

Para eles a 'abstração' não é um fator limitador do processo de aprendizagem. Entendem que os processos metodológicos são os fatores mais significativos. Sobre as concepções inseridas na atuação docente, observaram-se dois modelos lineares distintos de ensino: um Modelo A no qual se atua a partir de uma concepção completamente ligada ao concreto (manipulável), e se vai, aos poucos, distanciando-se da realidade, chegando-se ao abstrato geral, totalmente desconectado do concreto e um Modelo B aonde se começa pelos aspectos formais abstratos, entendendo-se que, assim, será possível compreender o concreto.

Não foram detectadas considerações que pudessem estar associadas ao o uso de uma relação dialética entre o concreto e o abstrato. Ambos os modelos são limitadores da aprendizagem, em virtude de considerar o concreto e o abstrato como elementos que não dialogam. Pauta-se o processo apenas em um dos focos, sem associação entre eles.

Entende-se que a relação entre o concreto e o abstrato deve ser concebida de modo mais aprofundado, de modo que, atuar na perspectiva de um único modelo (A ou B), nos parece um equívoco do sistema de ensino. As dificuldades de aprendizagem matemática não se acabam com a simples opção entre um modelo ou outro, como sendo eles mutuamente excludentes, mas podem ser minimizadas pela relação dialética e permanente entre o concreto e o abstrato.

No contexto das concepções superficiais de concreto e de abstrato, uma das possibilidades para que se desenvolva essa relação se dá na associação entre o conhecimento matemático escolar, os conceitos (ou objetos) matemáticos, e as questões práticas da vida do estudante, com seus objetos perceptíveis, reais, captados pelos sentidos. Esse fato tem sido característico no conhecimento matemático.

Ao longo da história da humanidade, conforme mostram Bergamini (1965), Boyer & Merzbach (2012) e Davis & Hersh (1985), os primeiros estudos em Matemática se deram para atender as necessidades da sobrevivência humana. A associação de objetos de estudo da Matemática aos objetos manipuláveis era um processo natural, realizado com base no diálogo entre o concreto e o abstrato.

Ernest (1991) entende que os conceitos matemáticos, são construções históricas sociais e, assim sendo, apesar da ausência de materialidade, possuem ligações com o cotidiano, com a realidade das pessoas. Mesmo os conceitos matemáticos mais complexos, através de uma cadeia de significações, podem ser relacionados a objetos matemáticos mais simples de fácil percepção das suas representações com os objetos concretos.

Ao se questionar sobre a existência da Matemática no mundo que os cerca, os professores reforçaram as concepções de que a Matemática, na essência, lida com o abstrato, mostrando uma consonância com o pensamento de Devlin (1997). “A matemática torna o invisível visível. (...) A matemática é a ciência dos padrões” (p.33 e 34).

O Quadro 2 apresenta os modos como os professores concebem diferentes objetos de estudo de Matemática, em termos de concreto e abstrato. Majoritariamente, eles entendem que os objetos da Matemática são abstratos, mas, de fácil representação, especialmente aqueles estudados no âmbito da educação básica.

Quadro 2: Classificação dada pelos professores para alguns objetos matemáticos

Objeto matemático	Professores

	Carmem	César	Sebastiana	Samuel	Valmiro	Armando	Urânio
Número natural	F	F	F	F	F	F	F
Número complexo	S	D	S	D	S	D	D
Ponto, um vértice.	F	M	F	F	F	F	F
Par ordenado	F	F	D	F	S	D	F
Segmento de reta	F	M	F	F	F	S	F
Conjunto numérico	D	F	D	F	D	S	D
Figura geométrica	F	F	F	F	F	S	F
Expressão algébrica	D	F	F	F	D	D	D
Equação	S	D	F	F	D	D	F
Conjunto dos Reais	S	F	D	D	D	S	D
Função	F	F	D	F	F	S	F
Gráfico de uma função	F	M	F	F	F	D	F
Matriz	F	F	F	F	F	D	D
Cilindro	M	M	F	F	M	F	F
Vetor	D	F	D	F	D	D	F
Espaço vetorial	S	N	S	S	D	S	D
Espaço amostral	S	F	D	F	D	S	D
Medida (10 metros)	F	F	F	F	F	D	M
Esfera	M	M	F	F	M	F	F
Algarismo	F	D	D	F	N	F	F

M - Objeto concreto manipulável; N - Objeto concreto, mas, não manipulável;
F - Objeto abstrato de fácil representação; D - Objeto abstrato de difícil representação;
S – Objeto abstrato sem possibilidade de representação.

A classificação de que muitos objetos matemáticos, apesar de abstratos, podem ser representados facilmente, reforça a constatação que eles consideram que o ensino deve ser pautado com base nessa associação, com metodologias dentro dessa perspectiva.

O uso de vários registros de representações no processo de ensino de Matemática é apontado por Duval (2012) como essencial para a compreensão dos conceitos. Em contraposição a esse fato estariam às práticas educativas que vislumbram a Matemática como desconectada da realidade e, em relação aos problemas reais, uma ciência neutra.

Ao se limitar o processo metodológico à possibilidade de representação (associação) dos objetos da Matemática aos objetos concretos, considerando-se o concreto e o abstrato a partir desse enfoque superficial, do senso comum, estarão ficando à margem conceitos matemáticos que não possuem possibilidades de associação aos objetos concretos.

Aceitando a significância desse grupo de conceitos para a formação do indivíduo tem-se que atuar admitindo a impossibilidade de representá-los concretamente (no sentido comum do termo) e pautar o processo com base numa dialética entre o concreto e o abstrato, mas, concebendo o concreto de modo diferente.

3. Outras concepções para o Concreto e para o Abstrato

A ressignificação dos conceitos de abstrato e de concreto será dada a partir de uma abordagem segundo os princípios do materialismo histórico-dialético que faz emergir uma concepção qualitativamente superior do processo de conhecimento. A dicotomia entre abstrato e concreto na Matemática e no seu ensino será superada com a adoção de uma concepção que entende o conhecimento de modo dinâmico e relacional.

A dialética que se defende pauta-se na tese de que o nível de abstração e de cada objeto matemático tem um caráter relativo, uma vez que a concepção de abstrato é idiossincrática, o que garante que o objeto não possui o mesmo nível de abstração para todas as pessoas. A antítese desse processo dialético está no fato de que a formação inadequada dos professores, com respeito a esse aspecto epistemológico da Matemática, contribui para a fragilização no processo de construção de conceitos matemáticos na escola.

A síntese é definida pela afirmação de que é possível haver construção significativa de conceitos matemáticos, desde que os professores sejam devidamente preparados para atuar compreendendo a relatividade da abstração dos objetos matemáticos.

O processo dialético retira a presunção de um entendimento unidimensional de cada conceito. Machado (2004) afirma que é necessário entender tais conceitos com mais profundidade para dar mais significado às relações desses conceitos nos processos de ensino.

Defende-se que o entendimento de concreto ou de abstrato, para um objeto dado, é estabelecido pelo grupo de significações que este objeto tem para o sujeito, fato que está ligado ao cabedal de construções cognitivas tomadas a partir dos conhecimentos prévios que o sujeito já possui do referido objeto. A base cognitiva do indivíduo é que determina o que é concreto para ele.

Samara e Clements (2009) defendem que há dois tipos de concreto, o concreto sensorial, característico das fases iniciais da aprendizagem, e o concreto integrado, que é adquirido por diferentes vias, numa combinação de vários elementos, aspectos dos objetos físicos, interligados em uma forte estrutura mental.

Mesmo compreendendo-se a idiossincrasia do processo, entende-se que os objetos matemáticos possuem diferentes níveis de abstração. Os menos abstratos são aqueles com representações que têm ligações diretas aos objetos reais manipuláveis. Os mais abstratos são aqueles que possuem representações que não se inserem no contexto real, legitimadas pela linguagem, simbologia, dentre outros e que necessitam, conforme Ernest (1991) de uma cadeia de significações para associá-los aos manipuláveis.

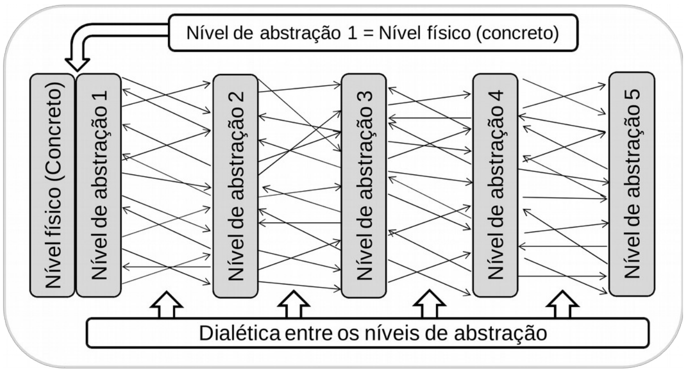
O processo de abstração é relativo, pois, depende de vários aspectos. Um deles, é que a abstração de um objeto não está relacionada apenas à sua complexidade, mas depende da estrutura cognitiva de quem o explora. Outro elemento importante é a natureza de suas representações. Se um objeto matemático possui representações com repercussão no mundo físico ele terá um nível de abstração menor que um objeto que só possui representação no campo da simbolização. Além disso, deve-se observar o lugar desse mesmo objeto na rede intradisciplinar, ou seja, como ele se relaciona com os demais objetos matemáticos. Numa primeira instância, quanto mais significados o objeto possuir, maior será o seu nível de abstração.

Independentemente da situação cognitiva e do objeto do conhecimento do qual se esteja tratando é possível uma classificação a partir de duas possibilidades: (1) O físico (material, palpável, sensorial) pode ser considerado como instância do primeiro nível de abstração (A_1); ou (2) O físico não representa o primeiro nível de abstração e há entre estes um "vazio de significação" ou um "obstáculo de representação".

Entende-se que a base cognitiva de qualquer pessoa, especialmente em idade escolar, já tenha alcançado níveis de abstração superiores ao nível físico. Assim, alguns elementos, abstratos inicialmente, já podem ser considerados como elementos concretos (concretos cognitivos). Pois, considera-se que, independente do objeto, do tipo de conhecimento e da sua materialidade, a partir do momento em que este se incorpora à base cognitiva do indivíduo, ele passa a ser um objeto concreto.

Os objetos de estudo da Matemática podem ser categorizados a partir de níveis de abstração, levando-se em consideração a possibilidade deles apresentarem ligações ou representações com objetos concretos. Existem elementos matemáticos que têm uma aproximação mais direta com objetos reais, sendo este enfoque o parâmetro para os níveis de abstração. Nunca se verá objetos matemáticos como reta, círculo, triângulo. Mas, podem-se construir representações associativas dessas estruturas. Esses tipos de objetos estão inseridos no que se chama de primeiro nível de abstração. A associação direta, que diz ser o físico (concreto) instância de nível de abstração 1, caracteriza a primeira possibilidade (P1) da relação entre objetos matemáticos e objetos do mundo real (Figura 7).

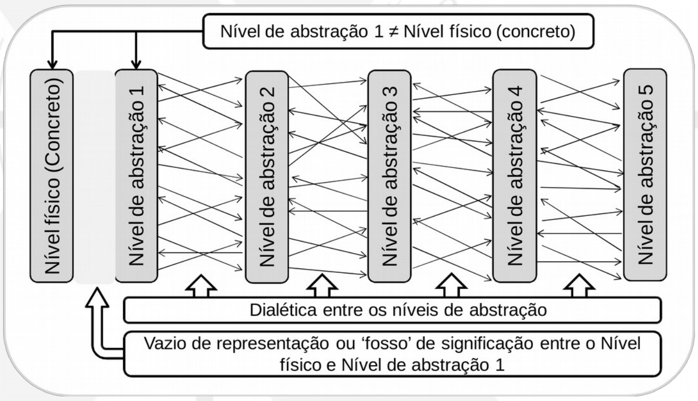
Figura 1: Níveis de abstração do conhecimento matemático



Fonte: Autoria própria (Sugerida pelo pesquisador John Andrew Fossa).

Outra possibilidade (P2) é àquela em que os objetos matemáticos inseridos no nível de abstração 1 não apresentam uma relação direta com os objetos concretos (Figura 8). Há um vazio entre o nível físico (concreto) com os objetos da Matemática. Um exemplo disso é o conceito de número. Não há como representar esse objeto com nenhum objeto do mundo real. Qualquer associação que se faça, entre um número e um objeto real, se enquadra num estágio de abstração que já tem absorvido o primeiro.

Figura 2: Níveis de abstração do conhecimento matemático.



Fonte: Autoria própria (Sugerida pelo pesquisador John Andrew Fossa).

A estruturação apresentada exige que sejam respeitadas as etapas de concretização cognitiva do conhecimento. Todo o conhecimento matemático é, por natureza, abstrato (no sentido comum do termo). Porém, ao passo que o indivíduo o compreende, (re) significando-o a partir dos elementos já constituídos em sua estrutura cognitiva, os conhecimentos prévios, que podemos chamar de objetos concretos cognitivos, ele passa a ser também um concreto cognitivo e, assim o abstrato passa a ter significado, ganha vida para o indivíduo, passa a fazer sentido.

É necessário que se leve em consideração metodologias que contemplem a dialética entre os níveis de abstração. "As relações teoria/prática, concreto/abstrato não tem se dado dialeticamente, mas, com o intuito que uma leve à outra" (GRANDO, 1999, p.07). Significa que o percurso que leva a um nível de abstração só será possível fazendo-se o diálogo com o concreto já estabelecido, seja este cognitivo ou real (material).

4. Considerações finais

Verificou-se a preocupação dos docentes em relacionar o conhecimento matemático com os problemas do cotidiano, com o propósito apenas de introduzir os conceitos matemáticos. Não se identificou uma relação dialética entre o concreto e o abstrato. Há entendimento superficial desses conceitos, levando a considerar que o conhecimento matemático é essencialmente abstrato.

As metodologias de ensino de Matemática devem ser construídas contemplando uma relação indissociável entre o concreto e o abstrato. Os objetos do conhecimento matemático representam uma construção social e cultural, na perspectiva do que propõe Ernest (1991). Eles são construções socialmente aceitas e, assim, possuem uma relação direta com a realidade, com os problemas do cotidiano, tem um forte impacto sobre as nossas vidas.

Os objetos da Matemática podem ser classificados, em níveis de abstração, a partir da possibilidade de associação desses objetos aos objetos concretos físicos, associando uma reelaboração das concepções de concreto e de abstrato. Esse entendimento deverá definir as ações docentes com relação ao conhecimento matemático.

A relação do conhecimento matemático com a vida deve ser valorizada. No entanto, não é um modelo linear do concreto para o abstrato ou do abstrato para o concreto. Eles não são polos opostos, desconexos e incomunicáveis. A exploração do abstrato tem como base o concreto inicial, que por sua vez será transformado, passando a ter maior relevância na estrutura cognitiva do sujeito a partir da exploração das perspectivas abstratas, ascendendo para patamares de concreto cognitivo.

5. Referências

BERGAMINI, David. As Matemáticas. Tradução: José Gurjão Neto. Rio de Janeiro: Livraria José Olympio Editora S.A., 1965.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.. História da Matemática. 3. Tradução: Helena Castro. Vol. I. São Paulo: Blucher, 2012.

CURY, Helena Noronha. As concepções matemáticas dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. Porto Alegre: UFRS, 1994.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A Experiência Matemática. Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DEVLIN, Keith. Tornando o invisível visível. Cálculo, 2014: 30-36.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Revemat. Vol. 6. Tradução: M. T. MORETTI. Florianópolis, 2011.

ERNEST, Paul. The Philosophy of Mathematics Education. Oxon: Routledge Falmer, 1991.

______________. Registros de Representações Semióticas e funconamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org). Aprendizagem em matemática. Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DEVLIN, Keith. O Gene da Matemática. 3. Tradução: Sérgio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2006.

______________. O Gene da Matemática. 3. Tradução: Sérgio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2006.

FROEBEL, F. The Education of man. New York: Appleton, 1887.

GIARDINETTO, José Roberto Boetteger. Matemática Escolar e Matemática da vida cotidiana. Campinas: Autores Associados, 1999.

GRANDO, Claudia Maria. O concreto, o abstrato e o formal no discurso e na ação pedagógica dos acadêmicos de prática de ensino em Matemática da UNOESC - Chapecó. Dissertação de Mestrado PPGE/CED. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, dezembro de 2000.

KAMINSKI, J. A.; SLOUTSKY, V. M.; HECKLER, A.. The advantage of abstract examples in learning Math. Science, 320, April, 2008.

KOSIK, Karel. Dialética do Concreto. 2. Tradução: Célia Neves e Alderico Toríbio. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LEFEBVRE, Henri. Lógica Formal e Lógica Dialética. Rio de Janeiro: Civilização brasileira, 1979.

MACHADO, Nilson José. Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. 6. São Paulo: cortez, 2011.

MACHADO, Nilson José. Conhecimento e valor. São Paulo, SP: Moderna, 2004.

MAIA, Lícia de Souza Leão. O que há de concreto no Ensino da Matemática? ZETETIKÉ 9, n. 15/16 (2001): 77-98.

PIAGET, Jean. Epstemologia genética. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

_____________. Problemas de Psicologia Genética. In: Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

SAMARA, J.; CLEMENTS, D. H.. “Concrete" Computer Manipulatives in Mathematics Education. Child Development Perspectives, 2009: 145-150. Disponível em: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1750-8606.2009.00095.x/abstract

WILENSKY, Uri. Abstract Meditations on the Concrete and Concrete Implications for Mathematics Education. In: Constructionism, por I. HAREL & S. PAPERT (eds). Norwood N.J.: Ablex Publishing, 1991. https://ccl.northwestern.edu/papers/concrete/