AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA

Marcella Luanna da Silva Lima; Abigail Fregni Lins

Universidade Estadual da Paraíba, marcellaluanna@hotmail.com; Universidade Estadual da Paraíba, bibilins@gmail.com

Resumo: Sabemos que prova e demonstração é o coração do pensamento matemático e do argumento dedutivo. Desse modo, as habilidades de provar e demonstrar em Matemática são importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico. À vista disso, nosso artigo é um recorte de nossa dissertação de mestrado, vinculada ao Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Núcleo UEPB. Em nossa pesquisa objetivávamos investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra. Apoiamo-nos em Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003) para investigar as provas e demonstrações matemáticas, e Parzysz (2006) para os níveis do pensamento geométrico. Como pesquisa de cunho qualitativo, realizamos estudo de caso com um trio de alunos de uma escola pública da cidade de Areia, Paraíba. Utilizamos redação intitulada Provas e Demonstrações Matemáticas, observação participante, notas de campo, imagens e gravações em áudio como instrumentos de pesquisa, e a Proposta Didática, na qual analisamos 8 das 18 atividades. Utilizamos a técnica de triangulação para a organização e análise dos dados, uma vez que possuíamos diferentes fontes que nos auxiliaram em uma descrição rica e detalhada de nosso objeto de estudo. Quanto aos resultados, observamos que o trio de alunos possuía um conhecimento superficial dos assuntos presentes nas atividades analisadas, Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos, como também não são incentivados a argumentar, justificar e provar suas ideias e teoremas matemáticos. Quanto aos tipos de provas, o trio de alunos utilizou o Empirismo Ingênuo e a Justificativa Pragmática (caso particular para validar um teorema), e a Justificativa Gráfica (construção de um triângulo e seus ângulos internos para validar um teorema). No que diz respeito aos níveis do pensamento geométrico, o trio de alunos se encontra nos dois níveis da Geometria não-axiomática: a Geometria concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que esses alunos só utilizaram as observações e constatações para justificar as características físicas das construções presentes nas atividades, e, para isso, a validação foi feita somente na percepção. Os resultados de nossa pesquisa faz-nos afirmar a ausência do pensamento e argumentação matemáticos no ensino da Matemática a nível escolar, o que faz-nos apontar a urgente necessidade de mudança e reformulação em nossas práticas enquanto professores de Matemática da educação básica.

Palavras-chave: OBEDUC, Educação Matemática, Provas e Demonstrações Matemáticas, Pensamento Geométrico, GeoGebra.

Introdução

Nosso artigo tem como objetivo apresentar resultados de atividades realizadas na pesquisa de mestrado intitulada *Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de Alunos do 2º ano do Ensino Médio nos ambientes lápis e papel e GeoGebra*, vinculada ao Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Núcleo UEPB e desenvolvida no Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* PPGECEM da UEPB.

Ao analisarmos os diversos documentos que norteiam a estruturação do currículo escolar, percebemos que a Geometria aparece como um dos elementos de grande importância (REIS e LINS, 2010). Porém, é dada pouca relevância a esta disciplina quando ensinada no Ensino Fundamental e Médio, assim como é senso comum entre professores e alunos desprezá-la, nos dando a impressão, conforme argumenta Lorenzato (2006) de que a *Geometria é a parte da Matemática cujo ensino tem sido boicotado pelos professores*. Nesse sentido, as provas tem um papel importante na Matemática, uma vez que é a partir delas que confirmamos se algo é válido ou não. Almouloud (2007) afirma que a demonstração em Matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o Ensino Fundamental e Médio, como parte integrante do currículo da escola básica. Além disso, mesmo sendo as provas e argumentações uma das competências indicadas nos PCN, avaliações internas no Brasil, como a Prova Brasil e o ENEM, e avaliações internacionais, como o PISA, mostram que nossos alunos não dominam a Matemática (AGUILAR JR e NASSER, 2012).

À vista disso, pensamos na realização de uma pesquisa que motivasse os alunos a argumentarem, justificarem e provarem com mais frequência alguns enunciados da Geometria, aliando a sua verificação no aplicativo GeoGebra. Nesse sentido, buscamos responder *Que tipos de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º ano do Ensino Médio?* Desse modo, a pesquisa foi realizada com um trio de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual situada na cidade de Areia, Paraíba, a qual objetivávamos investigar que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio podem ocorrer a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e GeoGebra (LIMA, 2015).

Provas e Demonstrações Matemáticas

Sabemos que a prova é característica essencial da Matemática e que ela produz uma nova compreensão matemática, uma vez que ela possibilita que o aluno produza novas ligações conceituais e novos métodos para resolver determinados problemas. Os PCN nos recomendam que o currículo de Matemática deva propiciar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento de conjecturas e a formulação e a comunicação de argumentos matematicamente válidos.

De acordo com Balacheff (2000), as *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para uma comunidade, mas também pode ser rejeitada por outra. Já as *demonstrações* se tratam de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras. Nesse sentido, em nossa pesquisa, consideramos que provas e demonstrações não são palavras sinônimas, isto é, tomamos a prova em um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no domínio matemático. Dessa forma, as justificativas encontradas nas produções dos alunos serão aceitas dentro do contexto escolar dos mesmos, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes estes não consigam atingir a formalização necessária. Já a demonstração ou prova formal será considerada um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo (GRINKRAUT, 2009). Balacheff (2000) identificou quatro tipos principais de provas: o *empirismo ingênuo*, a *experiência crucial*, o *exemplo genérico* e a *experiência mental*. O empirismo ingênuo consiste em afirmar a validade de uma conjectura após a observação de um pequeno número de casos. Esse tipo de prova é a mais rudimentar e é uma das primeiras formas no processo de generalização. A experiência crucial consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar. Aqui, o aluno toma a consciência de que busca por um resultado geral. O exemplo genérico consiste na busca por uma generalização baseada em exemplos, mas o aluno procura justificá-la com a teoria relacionada a esta proposição. E a experiência mental consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica. Aqui, o aluno não faz mais referência ao caso particular, a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é inteiramente sustentada na teoria.

Nasser e Tinoco (2003) nos apresentam outros tipos de provas: a *justificativa pragmática*, na qual o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em alguns casos particulares; a *recorrência a uma autoridade*, o aluno afirma que é verdadeiro porque o professor falou ou porque está no livro; o *exemplo crucial*, o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral; e a *justificativa gráfica*, o aluno mostra em uma figura por que o resultado é verdadeiro.

Portanto, segundo Grinkraut (2009), a construção da prova no contexto escolar é diferente daquela direcionada aos matemáticos na Academia, uma vez que na escola consiste em convencer alguém ou a si mesmo que determinada afirmação é verdadeira. Mas para isso, a qualidade dos argumentos necessários para tal convencimento, como também o nível de generalidade de uma prova é variável, já que um aluno pode se convencer da validade de um teorema apenas utilizando casos particulares. Isto quer dizer que os argumentos ou justificativas produzidas pelos alunos devem ser considerados como objetos de ensino e não apenas como respostas inconsistentes, mesmo que muitas vezes os alunos utilizem argumentos que não constituem uma demonstração ou prova formal aceita pela comunidade matemática.

Níveis do pensamento geométrico

Parzysz (2006) buscou desenvolver um quadro teórico para estudar o raciocínio geométrico dos sujeitos, tentando estabelecer uma articulação entre a percepção e a dedução. Dessa forma, ele tomou como base a natureza dos objetos que são estudados na Geometria e seu tipo de validação. Assim, ele considera dois tipos de Geometria: a não-axiomática e a axiomática.

De acordo com Dias (2009), nas Geometrias não-axiomáticas, o estudo é voltado para uma situação concreta, os objetos são modelos da realidade, se referem a eles, ou a uma representação deles por meio de maquetes ou desenhos. A validação de uma afirmação é feita por meio da percepção, isto é, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe. Já nas Geometrias axiomáticas, os objetos são teóricos e podem se referir ao real. A validação é feita por meio de teoremas e axiomas. Diferentemente da não-axiomática, nesta Geometria uma afirmação que origina-se de uma observação da realidade ou não, só será verdadeira se puder ser demonstrada. Desse modo, Parzysz (2006) propôs um quadro teórico que comporta um total de quatro paradigmas:

Quadro 1 - Síntese da classificação da Geometria segundo Parzysz

	Geometrias não-axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipos de Geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria spatio-graphique (G1)	Geometria proto-axiomática (G2)	Geometria axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validação	Perceptiva		Dedutiva	

Fonte: Parzysz (2006)

Parzysz (2006) afirma que os elementos que repousam sobre sua proposta são, por um lado, a natureza dos objetos em jogo (físico vs teórico) e, por outro, os modos de validação (perceptiva vs dedutiva). Nesse sentido, Dias (2009) afirma que as Geometrias não-axiomáticas estão subdivididas em duas outras: a Geometria concreta (G0) e a Geometria spatio-graphique (G1). Em G0, os objetos são físicos e suas características físicas influenciam as observações e constatações. Aqui a validação é somente a percepção. Já em G1, os objetos ganham uma representação gráfica, podendo ser um esboço ou um desenho construído por processos geométricos. Dessa forma, essa ação já é um primeiro passo para o processo de abstração, uma vez que os alunos necessitam reconhecer as propriedades que são características do objeto para determiná-los e, assim, fazer sua representação gráfica. Aqui a validação é baseada na comparação visual e sobreposições.

Como afirma Dias (2009), as Geometrias axiomáticas se subdividem em Proto-axiomática (G2) e Axiomática (G3). Em G2, o aluno ainda pode recorrer a objetos físicos, mas a sua existência é garantida pelas definições, axiomas e propriedades entre figuras. A validação em G2 se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do enunciado do problema. Já em G3, os objetos são teóricos e se tentarmos representa-los poderá haver deformações do objeto representado. Aqui a validação é teórica, baseada em axiomas, definições e teoremas.

Metodologia

O Projeto OBEDUC Núcleo UEPB, coordenado por Dra. Abigail Fregni Lins, composto de 20 membros, 5 mestrandos, 7 professores da educação básica e 8 graduandos, foi organizado em 4 equipes, sendo elas iniciadas pelas propostas de dissertação de 4 mestrandos. Cada equipe formada por um mestrando, dois professores da educação básica e dois graduandos. Fizemos parte da Equipe *Provas e Demonstrações Matemáticas*, na qual trabalhamos de forma colaborativa, ou seja, foi um trabalho onde todos tiveram oportunidade igual e negociação de responsabilidades, em que todos os participantes têm voz e vez em todos os momentos da pesquisa, podendo expressar livremente suas ideias, interpretar e descrever práticas e teorias, abordando suas compreensões, concordâncias e discordâncias em relação aos discursos dos outros participantes (IBIAPINA, 2008). Desse modo, estudamos vários artigos e livros referentes à utilização das provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica; à utilização de aplicativos nas aulas de Matemática, em especial o GeoGebra; e o desenvolvimento de um trabalho colaborativo entre equipes de pesquisadores, professores e alunos das universidades.

De cunho qualitativo, nossa pesquisa contempla uma metodologia de investigação que destaca o uso da descrição, da indução, da teoria fundamentada e do estudo das percepções pessoais (BOGDAN e BIKLEN, 2003). Além disso, Stake (2011) afirma que seu raciocínio se baseia principalmente na percepção e na compreensão humana. Ou seja, o pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos e ao desempenhar uma função subjetiva no estudo, uma vez que ele se utiliza da sua experiência pessoal em fazer interpretações.

Nossa pesquisa qualitativa se mostra como estudo de caso, o qual consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico (BOGDAN e BIKLEN, 2003). Além disso, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo, desde a lógica de planejamento incorporando abordagens específicas até a coleta e a análise de dados. Portanto, de acordo com Yin (2001), o estudo de caso não é nem uma tática para coleta de dados nem meramente uma característica de planejamento, mas sim uma estratégia de pesquisa abrangente. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: redação sobre provas e demonstrações matemáticas, observação participante, notas de campo, imagens e gravações em áudio e a Proposta Didática. A redação sobre Provas e Demonstrações Matemáticas teve como objetivo traçar o perfil dos alunos sobre o que pensam serem provas e demonstrações matemáticas. Desse modo, eles receberam uma folha composta por linhas e com o título *Provas e Demonstrações Matemáticas*, onde estavam livres para escreverem ou não o que sabiam a respeito desse tema. Utilizamos a observação com o intuito de a mesma nos ajudar a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos pesquisados não têm consciência, mas que orientam seu comportamento. As notas de campo nos auxiliaram a ter uma descrição fidedigna das atividades, conversas, acontecimentos, problemas e dificuldades encontradas no decorrer da aplicação das atividades da Proposta. A opção de gravar em áudio se deu no momento do trabalho dos alunos no desenvolver das atividades da Proposta, uma vez que houve uma maior interação nas argumentações das resoluções dessas atividades. A Proposta Didática foi elaborada pelos cinco componentes da nossa Equipe e versa sobre três importantes assuntos da Geometria, os quais são *Teorema de Pitágoras*, *Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo* e *Teorema do Ângulo Externo*.

Trabalhamos em nossa pesquisa com as Atividades 8 da Parte I, 1 e 2 da Parte II e cinco da Parte IV, todas referentes ao Teorema de Pitágoras e ao Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Essas atividades fazem com que os alunos justifiquem e argumentem as suas respostas, a raciocinarem bastante e a refletirem sobre as propriedades e conceitos inerentes ao passo a passo e às construções. Pretendia-se, com isso, que os alunos percebessem que não é necessário decorar esses teoremas, uma vez que são ferramentas utilizáveis na resolução de inúmeros problemas da Geometria.

Realizamos a pesquisa com 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio do turno da tarde e dividimos essa pesquisa em três momentos, desenvolvidos em três tardes. A escolha desses alunos do Ensino Médio se deu pelo fato de já terem estudado os assuntos que estavam sendo contemplados na nossa Proposta Didática. Escolhemos alunos do Ensino Médio pressupondo que eles já detinham algum conhecimento sobre os três assuntos explorados na Proposta.

No primeiro momento, explicamos aos alunos nosso intuito da pesquisa e pedimos a colaboração dos mesmos, para que a mesma fosse feita da melhor forma possível. Logo após foi proposto que os alunos redigissem uma redação sobre *Provas e Demonstrações Matemáticas*, na qual os alunos estiveram livres para escreverem o que pensam e sabem a respeito desse tema. Além disso, fizemos uma pequena intervenção com a turma, na qual explicamos o que é um objeto matemático, a definição de Teorema e a explanação de uma demonstração, como também revisamos alguns conteúdos relacionados a triângulos, como definição, classificação quanto aos lados e ângulos, tipos de ângulos, entre outros. Salientamos que nessa intervenção não trabalhamos com os três assuntos que norteiam a nossa Proposta, visto que pretendíamos observar os conhecimentos que estes alunos tinham a respeito dos mesmos. Ainda nesse primeiro momento, fizemos outra intervenção com essa turma, na qual apresentamos o aplicativo GeoGebra, explicando o que é o aplicativo, quem desenvolveu, o layout do mesmo, as opções de ferramentas presentes na barra de botões, etc. Além disso, realizamos algumas atividades utilizando as ferramentas disponíveis na barra de botões e uma construção referente à função afim, na qual observamos o que acontece com o gráfico da função ao movimentarmos os seletores a e b.

No segundo momento, aplicamos as Partes I e II da Proposta Didática, que diz respeito aos assuntos de Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Nesta tarde, os alunos divididos em 10 duplas foram orientados a resolverem as onze primeiras atividades da Proposta. No último momento, trabalhamos as Partes III e IV, que versam sobre o Teorema do Ângulo Externo e atividades a serem realizadas no GeoGebra. Desse modo, os alunos foram orientados a resolverem as últimas oito atividades da Proposta. Nesse último momento, só contamos com a presença de 7 alunos, uma vez que nesse dia foi ponto facultativo nas outras escolas estaduais do município de Areia e, por conta dos alunos serem da zona rural, não havia ônibus para a maioria ir à escola. Desse modo, esses 7 alunos foram divididos em duas duplas e um trio. Como esses 7 alunos participarem de todos os momentos da Proposta, então consideramos as atividades dos mesmos. Desses 7, escolhemos o trio de alunos para analisar as suas oito atividades, uma vez que foram as mais ricas em termos de tentativa de responder a todas as perguntas/atividades. Baseamo-nos em

Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003), quanto às provas e demonstrações matemáticas, e Parzysz (2006), quanto ao nível do pensamento geométrico.

Diante de tantos instrumentos utilizados em nossa pesquisa, escolhemos a técnica de triangulação para a organização e análise dos dados, pois a triangulação nos permite olhar para o mesmo fenômeno, ou questão de pesquisa, a partir de mais de uma fonte de dados, nas quais contêm informações advindas de diferentes ângulos que podem ser utilizadas para corroborar, elaborar ou iluminar o problema de pesquisa (LINS, 2003).

Resultados e Conclusões

Buscamos responder *Que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º Ano do Ensino Médio?*

A Atividade 8 (Parte I) foi adaptada de Ferreira Filho (2007), a qual conduziríamos o aluno a uma prova para o Teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Nessa atividade, os alunos iriam observar um quadrilátero composto por quatro triângulos retângulos e um quadrado inscritos e chegariam a fórmula do Teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas. Nessa atividade buscamos observar em qual nível do pensamento geométrico esses alunos se encontram.

A Atividade 1 (Parte II) foi adaptada da questão G1 do AprovaME, na qual pedíamos para o trio escolher um dos cinco tipos de prova (Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu), que ele possivelmente faria e o que o professor daria a maior nota, para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Além disso, pedíamos para esses alunos justificarem a sua escolha.

Dessa forma, a resposta de Amanda diz respeito a uma experiência crucial; a de Dario, um empirismo ingênuo (forma mais rudimentar de uma prova); a de Hélia, um empirismo ingênuo; a de Cíntia, uma experiência mental; e a de Edu, um exemplo genérico. Por meio dessa atividade buscaríamos verificar o tipo de prova que eles possivelmente utilizariam para verificar a validade do Teorema.

A Atividade 2 (Parte II) foi elaborada por nossa Equipe. Nela, já havia uma demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo utilizando os conceitos dos tipos de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Fizemos alguns questionamentos sobre a demonstração e objetivávamos que o trio de alunos conseguisse chegar a outro tipo de prova para esse Teorema. Nessa atividade iríamos analisar o nível de pensamento geométrico dos alunos e qual tipo de prova eles utilizaram.

Para o trabalho no GeoGebra, disponibilizaríamos as construções para as cinco atividades, as quais foram retiradas do TubeGeoGebra. Dessa forma, para a Atividade 1 (Parte IV) disponibilizamos uma construção para a verificação do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, utilizando os conceitos de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Nessa atividade, elaboramos algumas questões para direcionar o manuseio da construção e iríamos observar o nível do pensamento geométrico dos alunos.

Para a Atividade 2 (Parte IV) disponibilizamos um triângulo com seus três ângulos internos, apresentando a soma dos mesmos. Desse modo, o trio de alunos iria movimentar os vértices do triângulo e perceber o que acontecia com a soma dos três ângulos internos. Nessa atividade, elaboramos algumas questões para nortear a movimentação da construção e iríamos observar o nível do pensamento geométrico desses alunos. Para a Atividade 3 (Parte IV) disponibilizamos uma construção que já havia alguns questionamentos relacionados às movimentações das figuras. Essa atividade é referente ao Teorema de Pitágoras e os alunos iriam levar os quadriláteros inscritos nos quadrados dos catetos para o quadrado da hipotenusa. Nessa atividade buscamos observar o nível do pensamento geométrico dos alunos.

Para a Atividade 4 (Parte IV) disponibilizamos a construção relacionada à verificação do Teorema de Pitágoras, onde os alunos iriam movimentar os seletores (ou controles deslizantes) e observar o que acontecia com os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa. Nessa atividade elaboramos algumas questões para auxiliar nas movimentações da construção e buscamos observar o nível do pensamento geométrico desses alunos.

A Atividade 5 (Parte IV) foi adaptada de Ferreira Filho (2007) e disponibilizamos a Montagem Perigal, composta por 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Nessa atividade fizemos algumas questões para orientar as movimentações da construção, como também pedíamos que eles construíssem um triângulo retângulo e verificassem a relação (Teorema de Pitágoras) observada por meio da Montagem Perigal. Nessa atividade, buscamos observar o nível do pensamento geométrico desses alunos e o tipo de prova que eles utilizam.

Dessa forma, observamos que o trio de alunos quase não trabalha com os variados tipos de prova e demonstração na sala de aula e nem ouviram falar das mesmas, uma vez que, por meio das redações, observamos que esses alunos consideram as provas como as avaliações aplicadas bimestralmente pelos professores de Matemática. Além disso, percebemos que esses alunos não conseguiram interpretar corretamente o que estava sendo pedido, deixando algumas questões em branco ou afirmando que não se lembravam do assunto, como ocorreu na Atividade 8 (Parte I). Além deles não terem conseguido interpretar corretamente as perguntas, esses alunos não lembraram os conceitos presentes nas Atividades, os quais dizem respeito aos produtos notáveis, cálculo de áreas (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação, translação, rotação e intersecção, como também tiveram dificuldades em perceber que a área do quadrilátero da Atividade 8 (Parte I) podia ser vista de duas formas diferentes.

À vista disso, percebemos que esses alunos não dominam a Matemática, muito menos são incentivados a utilizar as provas e demonstrações matemáticas na sala de aula (ALMOULOUD, 2007; NASSER e TINOCO, 2003; AGUILAR JR e NASSER, 2012). Além disso, a realidade mostra que a maioria de nossos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática (NASSER e TINOCO, 2003). Dessa forma, constatamos que o trio de alunos investigado não está habituado a pensar e comunicar suas ideias e isso foi confirmado durante as aplicações da Redação e da Proposta Didática, uma vez que a maioria dos alunos não se mostrou interessado em escrever a redação e em resolver as Atividades, como também tiveram dificuldades para expressar as suas ideias e a justificar as suas respostas. Confirmamos também que esse trio de alunos não conseguiu utilizar a Álgebra para resolver problemas geométricos, uma vez que a maioria das Atividades precisava dessa ligação da Álgebra com a Geometria e os alunos não conseguiram algebrizar as áreas de um triângulo e de um quadrado para o Teorema de Pitágoras, o que confirma as ideias defendidas por Lorenzato (*apud* BERTOLUCI, 2003), o qual afirma que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é que seu ensino passou a ser algebrizado, depois do Movimento da Matemática Moderna. Ou seja, os alunos são motivados a *decorar* as fórmulas para atividades mecânicas e quando esses alunos se deparam com atividades que os motivem a refletir, justificar e provar as suas ideias, os mesmos não conseguem aplicar às fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não estão habituados a responder questões desse tipo.

Quanto aos objetivos pretendidos em cada atividade, percebemos que, em sua maioria, os alunos não o atingiram, com exceção das Atividades 1 e 2 (Parte II) e Atividade 2 (Parte IV). Nas demais atividades, os alunos conseguiram responder o que estava sendo pedido, porém não aprofundaram as suas ideias e os seus conhecimentos, uma vez que ficaram somente na percepção daquilo que estavam vendo. Além disso, tiveram dificuldades com alguns conceitos geométricos, deixando algumas questões em branco, como também não conseguiram perceber a verificação do Teorema de Pitágoras na construção e acabaram identificando outra relação na Atividade 5 (Parte IV). Portanto, quanto ao nível do pensamento geométrico do trio de alunos, percebemos que, na maioria das atividades analisadas, esses alunos se enquadram nos dois níveis da Geometria não Axiomática (PARZYSZ, 2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que o trio de alunos se utilizou de observações e constatações para justificar as características físicas das construções presentes nas atividades e, para isso, a validação feita por eles foi baseada somente na percepção. Além disso, confirmamos que os mesmos se enquadram nesses dois níveis, já que à medida que foi sendo requisitados conhecimentos mais apurados, eles tiveram dificuldades em desenvolver suas ideias, justificativas e não perceberam os conceitos e propriedades presentes na maior parte das Atividades.

Finalmente, as poucas provas que esses alunos realizaram nas Atividades 1 e 2 (Parte II), e 5 (Parte IV) se enquadram em três tipos de provas: Empirismo Ingênuo (BALACHEFF, 2000), o qual esses alunos utilizaram casos particulares para provar a validade da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo; a Justificativa Gráfica (NASSER e TINOCO, 2003), a qual o trio de alunos construiu um triângulo com as medidas de seus ângulos internos e observou que a soma deles é igual a 180º; e a Justificativa Pragmática (NASSER e TINOCO, 2003), a qual esses alunos, além de construir um triângulo no aplicativo GeoGebra, utilizaram um caso particular para verificar que a relação encontrada na Atividade 5 vale para qualquer triângulo retângulo.

Toda essa discussão nos leva a confirmar as ideias de Nasser e Tinoco (2003) quanto à realidade dos nossos alunos ao estudar a Matemática. Esse trio de alunos é somente uma amostra da situação alarmante em que se encontra o ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas brasileiras, uma vez que validamos o que afirma nosso referencial, como também percebemos que esses alunos do 2º Ano do Ensino Médio não estão aprendendo a pensar e raciocinar os diversos conteúdos da Matemática, especialmente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e o Teorema de Pitágoras. Com relação ao trabalho no aplicativo GeoGebra, afirmamos que o trio de alunos não estava familiarizado com o mesmo e nunca trabalhou nem ouviu falar desse aplicativo, uma vez que não conseguiram construir um triângulo retângulo, tendo que pedir auxílio a um colega da sala. Dessa forma, o trabalho com o GeoGebra não favoreceu ao trio a verificação, reflexão, conjectura, justificativa e prova matemática, uma vez que seus conhecimentos estão fragmentados e mecânicos, não conseguindo desenvolver e aguçar o seu raciocínio matemático. Assim, concluímos que o trabalho com o GeoGebra poderia ter sido melhor, se os alunos já soubessem trabalhar com o mesmo.

Chegamos à conclusão que o trio de alunos possui um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, em que esses conteúdos são memorizados e não compreendidos por eles. Além disso, a forma mecânica que esses assuntos são trabalhados em sala de aula, não permite que os alunos enxerguem além do que é ensinado pelo professor. Ocasionando, assim, a falta de criatividade nas aulas de Matemática, impossibilitando que os alunos raciocinem matematicamente (NASSER e TINOCO, 2003). Por fim, à vista de toda essa discussão, acreditamos que é importante e necessário trabalhar com as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula, pois quanto mais cedo começarmos a fazer esse trabalho, de acordo com a faixa etária e os conhecimentos dos alunos, mais fácil será de formá-los cidadãos críticos e capazes de defender suas ideias e argumentos, não só matematicamente, mas também socialmente.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES pelo financiamento de bolsas de estudo, divulgação científica em congressos nacionais, internacionais e publicações, assim como material permanente e de custeio para nosso Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012.

Referências

AGUILAR JR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. In: **Vidya**, v. 32, n. 2, p. 133-147, jul./dez. 2012 – Santa Maria. Disponível em <http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/09.pdf. Acesso em 20 jul. 2014.

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **Portal do GT 19 da ANPEd** (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação). 30ª reunião. Caxambú – MG. 2007. p. 1-18. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>. Acesso em 08 jul. 2014.

BALACHEFF, N**. Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BERTOLUCI, E. A. **Ensinando e aprendendo Geometria: uma experiência com o software Cabri-Géomètre II na 5ª série do Ensino Fundamental**. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da Licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico**. 2009. 214f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras**. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional**. 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. 1ª Ed. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

LIMA, M. L. S. **Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de Alunos do 2º ano do Ensino Médio nos Ambientes Lápis e Papel e Geogebra**. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

LINS, A.F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. Tese (Doutorado PhD), Inglaterra, University of Bristol, 2003.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

PARZYSZ, B. La géometrie dans l´enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s´agit-il ? In: **Quaderni di Ricerca in Didattica**. n. 17. 2006. Italia: Universidade de Palermo.

REIS, H.G.P.; LINS, A.F. O uso do GeoGebra no auxílio à aprendizagem dos conceitos de Grandezas e Medidas Geométricas. In: **Anais do VI EPEBEM** (Encontro Paraibano de Educação Matemática), Monteiro, 2010, pp. 1-9.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: **estudando como as coisas funcionam**. Porto Alegre: Penso, 2011.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3. ed. Tradução de Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2001.