

O ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO UTILIZANDO OS OSSOS DE NAPIER COMO RECURSO PEDAGÓGICO

Lenaldo de Castro Leitão

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Castrolenaldo4@gmail.com

Hyasmin Dália de Paiva Texeira

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Hyasmin06@gmail.com

Jeneffe Vivian dos Santos Fonseca

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

jeneffevivian@gmail.com

Resumo

A necessidade de quantificar e fazer contas existe desde a antiguidade e ao longo dos anos vem se aprimorando, principalmente por causa das calculadoras e do computador. O ramo da Matemática que lida com os números e suas operações é a Aritmética. No que se refere ao seu ensino, percebemos que em sua maioria é feito exclusivamente por meio do livro didático, e quando se opta por outros recursos pedagógicos, estes são quase sempre: o ábaco e o material dourado. Embora, esses instrumentos sejam alternativas interessantes de ensino, principalmente por que oportuniza o aprendizado dos conhecimentos aritméticos através do lúdico, seu grau de eficiência diminui quando o intuito é trabalhar as operações de multiplicação e divisão. Diante desta constatação, a nossa proposta com essa pesquisa é apresentar mais uma ferramenta para o ensino das operações aritméticas chamada de Ossos ou Barras de Napier, este utensílio foi criado por John Napier, o criador dos logaritmos, no fim do século XVII. Assim como o ábaco, os Ossos de Napier foi bastante utilizado por mercadores, pois facilitava os cálculos de números muito grandes envolvendo multiplicação, divisão e até extração de raiz quadrada. Portanto, diferente dos outros instrumentos tradicionalmente utilizados, este apresenta bastante eficiência no ensino da multiplicação e divisão, tanto é que a proposta é trabalhar exatamente essas duas operações. Diante do exposto, a pesquisa tem como objetivo; abordar os Ossos de Napier como ferramenta pedagógica, no ensino das operações de multiplicação e divisão. Para alcançar o desejado, o trabalho foi idealizado da seguinte forma; iniciamos explanando um pouco da história de John Napier, em seguida explicamos detalhadamente como foram criadas as barras, e de que forma são dispostos os números inscritos nelas. Paralelamente a explicação, temos como pode se construir suas próprias barras e de que tipo de materiais utilizarão para sua produção, passamos a resolução de atividades envolvendo as operações de multiplicação e divisão, se utilizando das barras e obtendo os resultados de forma rápida e prática.

Palavras-chaves: Aritmética, Ossos de Napier, Ensino-aprendizagem, Operações.

1 INTRODUÇÃO

A matemática é a ciência dos números e dos cálculos. Desde a antiguidade, o homem utiliza a matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. A matemática foi usada pelos egípcios nas construções de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia. Os gregos antigos também desenvolveram vários conceitos matemáticos. Atualmente, esta ciência está presente em várias áreas da sociedade como, por exemplo, arquitetura, informática, medicina, física, química etc. Podemos dizer que em tudo que olhamos existe a matemática. Com o passar dos tempos às ciências desenvolviam-se em todos os países. Graças à imprensa, as obras gregas e árabes estavam disseminadas em todos os centros culturais e repercutiam em vários campos como na cartografia, na arte, na ótica, na contabilidade, na mecânica.

Na álgebra a matemática europeia registrava notáveis avanços no início da era moderna: solução das equações de 3º e 4º grau, aceitação dos números negativos, simbologia para notações algébricas, progresso na teoria das equações, aprimoramento e sistematização da trigonometria, construção de excelentes tábuas das seis funções trigonométricas, notação atual das frações decimais, padronização dos cálculos com numerais indo-arábicos. A aplicação de todos estes conhecimentos aos campos nos quais os cálculos numéricos eram importantes como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra, serviam para incentivar os cientistas a construir uma teoria matemática mais crítica do que os modelos clássicos. Nesta etapa do Renascimento, Napier ocupou um lugar importante na matemática moderna.

2 UM POUCO SOBRE JOHN NAPIER



Figura 1: John Napier.

Fonte: <http://www.fameimages.com/john-napier>

John Napier nasceu em Edimburgo, Escócia, em 1550. Seu pai, Archibald Napier, Barão de Merchiston, era um rico proprietário de Edimburgo e sua mãe, Janet Bothwell, era irmã de Adam Bothwell - primeiro bispo de Orkney (Escócia) e amigo do rei Jaime VI. A família Napier possuía grande influência política e financeira na Escócia, era uma das vinte maiores fortunas da Europa.

Napier foi educado até os treze anos em casa como eram comum entre os nobres, com os melhores mestres da Escócia. Desde pequeno Napier mostrava-se diferente dos demais jovens da sua classe social. Em vez de se dedicar à caça e a guerra, preferia as atividades intelectuais: revelava-se brilhante estudioso, péssimo caçador e desajeitado guerreiro. Em 1563 ingressou na Universidade de Saint Andrews e foi recebido com honras como convinha ao filho de um nobre; ali estudou teologia e ao deixar a Universidade de Saint Andrews viajou pela Europa e estudou na Universidade de Paris, na Itália e na Holanda. Em 1571 regressou a Escócia, era então um teólogo reconhecido e um dos homens mais ricos da Escócia. Em 1572 mandou construir um castelo nas terras de Gartness, no qual em 1574 ele e sua esposa passaram a viver.

Napier se dedicava então a cuidar de suas propriedades e transformou seu castelo em uma residência para cientistas e artistas; usava sua grande fortuna para manter a sua volta inventores, matemáticos, astrônomos, poetas, pintores, literatos. Ele mesmo era um grande inventor e conseguia vários resultados no campo da agricultura, os quais aplicavam diretamente em suas terras; criava fertilizantes e substâncias que ajudavam a controlar as pragas e melhorar as colheitas. Ele estudava matemática como um simples passatempo e seus livros e publicações sobre o tema eram sempre precedidas de uma desculpa por serem pouco profundos, seus argumentos porque nunca tinha tempo suficiente para dedicar-se plenamente a esta disciplina, já que as questões políticas e religiosas consumiam suas principais horas. Passou para a história como um célebre matemático pela invenção dos logaritmos e por várias

contribuições em diferentes ramos da matemática: na geometria, na trigonometria, na álgebra e no que se chamava naquela época "matemáticas comerciais".

Segundo Eves (2011) Napier Gastou grande parte do seu tempo em controvérsias políticas e religiosas, era violentamente Anticatólico e defensor das causa de John Knox e Jaime I. Em 1593 publicou um libelo amargo e amplamente lido contra a Igreja de Roma intitulado *A Plaine Discouery of the Whole Reuelation of Saint Iohn*, no qual se propunha a provar que o papa era o Anticristo e que o Criador tencionava por fim ao mundo nos anos entre 1688 e 1700. O livro atingiu 21 edições, pelo menos dez ainda em vida do autor, e Napier acreditava piamente que sua reputação com a posteridade repousaria sobre esse livro.

Napier morreu em Edimburgo em 4 de abril de 1617, de ataque cardíaco, aos 67 anos de idade.

3 METODOLOGIA

3.1 DESCRIÇÃO DOS OSSOS DE NAPIER OU BARRAS DE NAPIER

São barras retangulares contendo inscrições de números que, dispostas lado a lado e seguindo determinadas regras, tornam possível fazer multiplicações, divisões e extrações de raízes quadradas de modo semimecânico. Utilizando estas barras a multiplicação se reduz a uma adição. As barras de Napier são compostas por um conjunto de onze barras, sendo a primeira a barra base que ficará fixa enumerada de 1 a 9, da segunda em diante temos as barras denominadas como auxiliares. Cada barra é dividida em 10 quadrados, nos quais, exceto no primeiro, é traçada uma diagonal do canto superior direito para o inferior esquerdo. No primeiro quadrado superior é colocado um dos números de 0 a 9. A distribuição dos números que encabeçava as faces laterais deste modelo era feita de modo que a soma dos números de topo de faces opostas é nove, da seguinte maneira: 0 1 9 8, 0 2 9 7, 0 3 9 6, 0 4 9 5, 1 2 8 7, 1 3 8 6, 1 4 8 5, 2 3 7 6, 2 4 7 5, 3 4 5 6. Do segundo quadrado em diante são inscritos em sequência os múltiplos do número colocado no primeiro quadrado; no triângulo inferior de cada quadrado é colocado o algarismo que representa as unidades e no triângulo superior o algarismo representando as dezenas. Cada barra nada mais é que a tabuada do número do primeiro quadrado.

| | | | | | | | | | | |
|----------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Auxiliares

Figura 2: Composição dos ossos de Napier.

Fonte: Autor

Para facilitar a identificação da barra a qual estamos nos referindo, chamaremos de "barra n ", $0 \leq n \leq 9$, a barra em cujo topo há o número n ; por exemplo, a barra encabeçada pelo número 7. Vamos olhar a barra 7, a seguir:

| | |
|-------------------|----------|
| | 7 |
| $7 \times 2 = 14$ | 1 / 4 |
| $7 \times 3 = 21$ | 2 / 1 |
| $7 \times 4 = 28$ | 2 / 8 |
| $7 \times 5 = 35$ | 3 / 5 |
| $7 \times 6 = 42$ | 4 / 2 |
| $7 \times 7 = 49$ | 4 / 9 |
| $7 \times 8 = 56$ | 5 / 6 |
| $7 \times 9 = 63$ | 6 / 3 |

Figura 3: Barra 7.

Fonte: Autor

No 2º quadrado, referente ao 3º múltiplo do 7 o algarismo 4 corresponde às unidades e o 1 às dezenas de $7 \times 2 = 14$. Seguindo a sequência, no 10º quadrado temos inscrito o número 63, o 3 representando as unidades e o 6 as dezenas de $7 \times 9 = 63$. O que acabamos de descrever é na verdade a tabuada do 7.

Se olharmos os conjuntos de barras a seguir, podemos observar que na barra 1 está a tabuada do 1, na barra 2 está a tabuada do número 2 e assim sucessivamente até o 9; teremos então a tabuada de todos os algarismos. Observe que o conjunto das dez barras é a tabuada completa de 0 a 9, com os algarismos que representam as unidades inscritas abaixo das diagonais e os das dezenas acima das diagonais.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 0 | 1 | 4 | 1 | 6 | 8 | | | | | | |
| 3 | | 3 | 6 | 9 | 1 | 2 | 1 | 5 | 8 | 2 | 1 | 2 | 4 | 2 | 7 | | | |
| 4 | | 4 | 8 | 1 | 2 | 1 | 6 | 2 | 0 | 2 | 4 | 2 | 8 | 3 | 2 | 3 | 6 | |
| 5 | | 5 | 1 | 0 | 1 | 5 | 2 | 0 | 2 | 5 | 3 | 0 | 3 | 5 | 4 | 0 | 4 | 5 |
| 6 | | 6 | 1 | 2 | 1 | 8 | 2 | 4 | 3 | 0 | 3 | 6 | 4 | 2 | 4 | 8 | 5 | 4 |
| 7 | | 7 | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 8 | 3 | 5 | 4 | 2 | 4 | 9 | 5 | 6 | 6 | 3 |
| 8 | | 8 | 1 | 6 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | 0 | 4 | 8 | 5 | 6 | 6 | 4 | 7 | 2 |
| 9 | | 9 | 1 | 8 | 2 | 7 | 3 | 6 | 4 | 5 | 4 | 6 | 3 | 7 | 2 | 8 | 1 | |

Figura 4: Barras de Napier.

Fonte: Autor

3.2 CONFECÇÃO DOS OSSOS DE NAPIER

O nome Ossos de Napier deve-se ao fato de que eram gravadas em pedaços de ossos com formato de paralelepípedo, nas quatro faces laterais. Porém poderia ser construído com outros materiais como: madeira, ferro e bronze. Hoje já podemos utilizar materiais mais simples para fazer a representação desse instrumento de calcular, utilizando papel, lápis, régua, borracha e tesoura. A partir desses materiais iremos mostrar como construir os Ossos de Napier de forma simples e fácil.

Materiais: Papel A4 peso 60, régua, lápis grafite, borracha e tesoura.

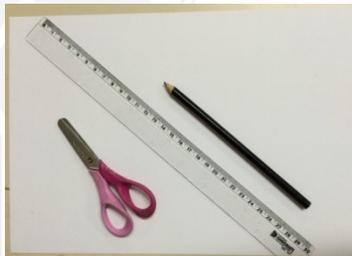


Figura 5: Materiais Simples.

Fonte: Autor

Passo 1: De inicio vamos utilizar o papel em modo paisagem, em seguida fazemos pontos na forma de colunas com espaçamento de 2 centímetros de distância entre um ponto e outro. Serão marcados pontos suficientes para fazer 12 colunas. Depois traçamos linhas nas referidas marcações.

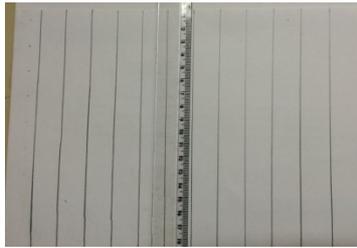


Figura 6: Primeiro passo da construção.

Fonte: Autor

Passo 2: Agora faremos marcações na forma de linhas com o mesmo espaçamento das colunas, 2 centímetros de distância entre os pontos, o suficiente para 10 linhas, em seguida traçamos as linhas nas referidas marcações formando uma espécie de tabuleiro.

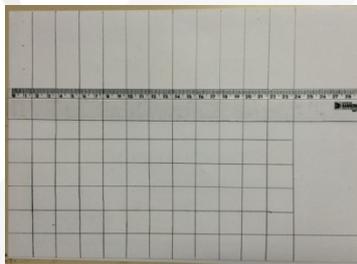


Figura 7: Segundo passo da construção.

Fonte: Autor

Passo 3: A seguir traçaremos diagonais a partir da segunda linha e segunda coluna, da direita para esquerda e de baixo para cima.

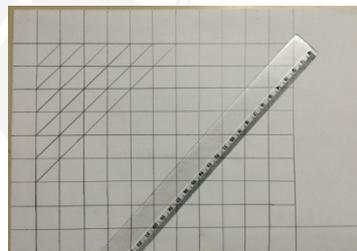


Figura 8: Terceiro passo da construção.

Fonte: Autor

Passo 4: Depois de traçar as diagonais, numeramos a primeira coluna que não tem diagonais traçadas de 0 a 9, em seguida numeramos a primeira linha que também não tem diagonais traçadas de 1 a 9, os dois espaços que sobrar serão um para o zero e um para a raiz quadrada.

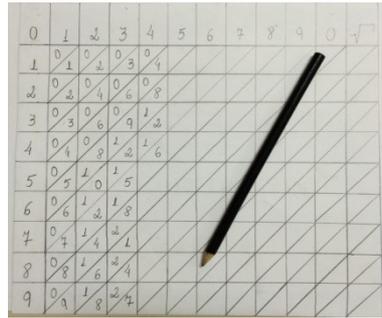


Figura 9: Quarto passo da construção.

Fonte: Autor

Passo 5: Em seguida preenchemos as colunas numeradas com a tabuada dos respectivos números acima, por exemplo, na coluna que tiver o número 1 iremos preencher os triângulos dessa coluna com a tabuada de 1, para a coluna que tem o número dois iremos preencher os triângulos da abaixo com a tabuada de 2 e assim sucessivamente até a coluna 9. Na coluna do zero devem ser preenchidos os triângulos com zeros e para a coluna que representa raiz quadrada escrevemos o resultado dos quadrados dos algarismos de 1 a 9.



Figura 10: Quinto passo da construção.

Fonte: Autor

Passo 6: Para finalizar cortamos na forma de colunas e está pronto seu Ossos de Napier;

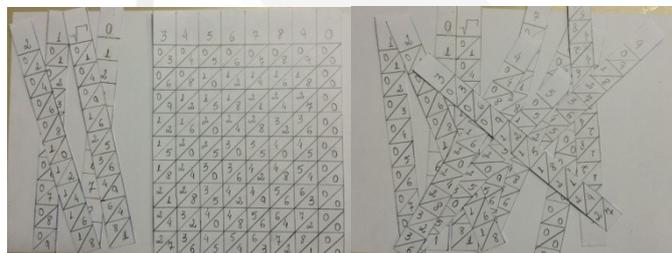


Figura 11: Construção finalizada.

Fonte: Autor

Observação: Aconselhasse fazer em outro papel o mesmo processo, apenas não será necessário fazer a primeira coluna que tem a representação numérica de 0 a 9 nem a última no caso a da raiz quadrada, isso para as operações de números repetidos.

3.3 MULTIPLICAÇÃO USANDO OS OSSOS DE NAPIER

Exemplo: 378×5

Primeiramente vamos fazer a multiplicação usando o algoritmo normal; para efetuá-la é preciso usar uma tabuada; esse conhecimento não era comum na época de Napier.

$$\begin{array}{r} 378 \\ \times 5 \\ \hline 1890 \end{array}$$

Figura 12: Operação de multiplicação.

Fonte: Autor

Se houvesse mais algarismos no multiplicando, continuaríamos de forma iterativa, como fazemos normalmente hoje. Voltamos a lembrar: devemos ter uma tabuada; nos séculos XVII e XVIII só os intelectuais detinham esse conhecimento.

Agora vamos efetuar a mesma multiplicação, 378×5 usando os ossos de Napier. As barras dos algarismos do multiplicando 3, 7 e 8 são colocadas uma ao lado da outra na mesma ordem que formam o número 378. Queremos fazer a multiplicação deste número por 5, então vamos à linha 5: temos em cada barra o 5º múltiplo, ou seja, 5 vezes o algarismo que a encabeça. Observe a linha 5 das barras a seguir,

| | | | | |
|---|----|----|----|--|
| 1 | 3 | 7 | 8 | |
| 2 | 6 | 14 | 16 | |
| 3 | 9 | 21 | 24 | |
| 4 | 12 | 28 | 32 | |
| 5 | 15 | 35 | 40 | |
| 6 | 18 | 42 | 48 | |
| 7 | 21 | 49 | 56 | |
| 8 | 24 | 56 | 64 | |
| 9 | 27 | 63 | 72 | |

| | | | |
|---|----|----|----|
| 5 | 15 | 35 | 40 |
|---|----|----|----|

Figura 13: Operação de multiplicação com as barras de Napier.

Fonte: Autor

Olhando a linha 5 a seguir podemos observar que diagonais estão separando os algarismos. Somando os algarismos ao longo de linhas paralelas as diagonais, começando da direita para a esquerda, vamos obter a soma de cada posição.

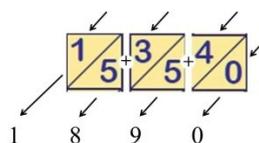


Figura 14: Operação de soma das diagonais.

Fonte: Autor

Comparando com a multiplicação efetuada hoje, descrita no início deste exemplo, veremos que os algarismos de cada linha paralela As diagonais das barras são os mesmos da coluna referente a uma posição (unidades, dezenas, etc.). Olhando da direita para a esquerda temos:

- Na 1ª linha diagonal 0 unidades
- Na 2ª linha diagonal $4 + 5 = 9$ dezenas
- Na 3ª linha diagonal $3 + 5 = 8$ centenas
- Na 4ª linha diagonal 1 milhar

Usando a notação posicional escrevemos o resultado 1890.

Utilizando as barras a multiplicação ficou acessível às pessoas que não tinham o conhecimento da tabuada e precisavam fazer esta operação no comercio. Os Ossos de Napier foram amplamente difundidos e usados em toda a Europa nos séculos XVII e XVIII.

3.4 DIVISÃO USANDO OS OSSOS DE NAPIER

Lembremos que na matemática a divisão $(a)/b$ é a multiplicação do numerador a pelo inverso do denominador $(1)/b$. Na operação de divisão o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor;

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

No exemplo a seguir mostraremos a praticidade da utilização dos Ossos de Napier para efetuarmos a divisão. As somas em diagonal nos fornecerão os múltiplos do divisor.

Exemplo – $978 \div 16$

Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anterior.

Primeiro vamos colocar as barras 1 e 6 do divisor uma ao lado da outra formando o número 16, à direita da barra indicadora das linhas. Em seguida somamos em diagonal cada linha e anotamos o resultado a direita das linhas correspondentes. Agora começamos a divisão de 978 por 16.

| | | | | |
|---|---|----|-----|----------------------------------|
| 1 | 1 | 6 | 16 | |
| 2 | 2 | 12 | 32 | $-\frac{978}{96} \overline{)16}$ |
| 3 | 3 | 18 | 48 | 01 |
| 4 | 4 | 24 | 64 | |
| 5 | 5 | 30 | 80 | $-\frac{978}{96} \overline{)16}$ |
| 6 | 6 | 36 | 96 | 61 |
| 7 | 7 | 42 | 112 | 018 |
| 8 | 8 | 48 | 128 | 16 |
| 9 | 9 | 54 | 144 | 02 |

Figura 14: Operação de divisão com as barras de Napier.

Fonte: Autor

- Montaremos o processo de divisão como hoje. Seleccionamos no dividendo o menor número formado pelos primeiros algarismos que seja igual a ou maior que o divisor 16, neste caso 97;

- Em seguida procuramos nos resultados parciais ao lado das barras o maior número que não ultrapasse 97, localizamos o número 96 na linha 6 referente ao 6º múltiplo. O número 6 será o primeiro algarismo do quociente, ou seja, da solução procurada.

- Agora fazemos a subtração de $97 - 96 = 01$ e anotamos o resto 01 embaixo da linha. Em seguida baixamos o próximo algarismo do dividendo o 8 colocando-o a direita no resto 01. O novo dividendo parcial é 018.

- Novamente seguimos o mesmo processo, olhamos para os resultados parciais ao lado direito das barras e procuramos um número que não ultrapasse 18, localizamos o número 16 na linha 1 referente ao 1 múltiplo. O número 1 será o segundo algarismo do quociente.

- Agora fazemos a subtração de $18 - 16 = 02$ e anotamos o resto 02 embaixo da linha.

- Como não há mais números no dividendo para serem baixados, podemos encerrar a divisão. O resultado da divisão é 61 e o resto é 02.

4 CONCLUSÃO

Procuramos mostrar nesta pesquisa, como os professores podem ganhar uma nova perspectiva sobre a sua própria prática de sala de aula, utilizando o trabalho de recriação de artefatos matemáticos, como os Ossos de Napier que não só desenvolve a prática como envolve o aprofundamento tanto da área do assunto em si, mas também do conhecimento pedagógico, e é uma tarefa que não é fácil, porém, é emocionante e desafiadora. Tendo os

alunos como uma ferramenta que informa e instrui. Além de desenvolver a confiança do professor em sala de aula, o uso de artefatos oferece uma grande oportunidade de compreensão do conteúdo matemático e desenvolvimento mental dos alunos. Os artefatos de matemática ajudam os alunos a compreender conceitos abstratos através de interações concretas.

Enfim, o uso de artefatos em sala de aula, permite ensinar e avaliar a matemática de uma forma imaginativa e criativa, além de ampliar a compreensão de um contexto.

5 REFERÊNCIAS

COSTA FILHO, Gustavo do Carmo da; FAVILLI, Ubirajara. **Ossos de Napier**: não os dele. Disponível em: <<http://www.ubirajarafavilli.com.br/2014/01/ossos-de-napier-nao-os-dele.html>>. Acesso em: 24 jan. 2014.

DALAKOV, Georgi. **Biography of John Napier** (1550-1617). 2015. Created by: Georgi Dalakov. Disponível em: <<http://history-computer.com/People/NapiersBio.html>>. Acesso em: 15 abr. 2015.

DALAKOV, Georgi. **Napier's Bones** (Napier's Rods). 2015. Created by: Georgi Dalakov. Disponível em: <<http://history-computer.com/CalculatingTools/NapiersBones.html>>. Acesso em: 15 abr. 2015.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Ed. Da UNICAMP, 2011.

FERNANDES, Gilberto L.. **John Napier e a criação dos logaritmos**. 2014. Uploaded by Gilberto Fernandes. Disponível em: <https://www.academia.edu/5690016/John_Napier_e_a_criação_dos_logaritmos>. Acesso em: 12 jan. 2014.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **John Napier**. 1998. Postado por Marcus. Disponível em: <<http://matcalc.blogspot.com.br/2010/08/napier.html>>. Acesso em: 15 abr. 2015.