

ANALISANDO ALGUNS ASPECTOS DA GEOMETRIA CARTESIANA SOB O PONTO DE VISTA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Autor: Danilo Wagner de Souza; Orientador: Aníbal Maciel

(Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, danilwagner2010@gmail.com)

Resumo

O campo da matemática é rico quanto as possibilidades de investigação sejam elas no que se refere a aprendizagem ou na sua história. Esse trabalho busca contribuir em ambas, primeiramente explorando aspectos históricos, em específico as contribuições de René Descartes na geometria analítica, quando este se propôs a desenvolver um método de abordagem que fizesse uso da álgebra para a resolução de problemas até então puramente geométricos, essa abordagem tinha como motivação sua busca por um método de investigação geral, um método que pudesse ser empregado em qualquer área do conhecimento, Descartes via então na matemática uma ferramenta essencial e um modelo adequado que servira de suporte para sua busca. Nesse contexto, e diante das teorias de representação semióticas de Raymond Duval vimos a possibilidade de analisar alguns exemplos da proposta de Descartes em transformar problemas geométricos em abordagens algébricas, ou seja, trataremos dessa mudança de representação sob a perspectiva de Duval, já que sua teoria é extremamente relevante no campo do ensino. Veremos que a “linguagem” matemática tem uma importância bem maior que a de representar pensamentos, ela faz parte da própria atividade matemática não podendo ser dissociadas a concepção do conceito e a sua representação, em outras palavras, a definição dos registros utilizados nela estão inclusas no próprio processo de sua atividade e esse é ponto chave que, segundo Duval, diferencia a matemática das outras áreas. Nesse trabalho unimos a teoria de Duval, buscando emprega-la na compreensão da forma como Descartes transpôs problemas geométricos para o campo da álgebra, modificando dessa forma os registros utilizados, e mais que isso, conseguiu definir formas de operar com os elementos geométricos com ferramentas algébricas.

Palavras_chave: História da matemática; René Descartes; Representações semióticas; Raymond Duval.

INTRODUÇÃO

A teoria das representações semióticas de Duval nos oferece um grande esclarecimento, embora não possamos afirmar que tal teoria seja simplória e superficial, acerca da concepção do conhecimento matemático por parte de indivíduo a partir de suas representações, as quais por sua vez, não se tratam apenas de simbolismos, mas fazem parte do próprio processo de aprendizagem.

Um dos grandes nomes da matemática é René Descartes, que embora suas reais motivações não se restringiam a esse campo do conhecimento, foi responsável por grandes feitos, dentre eles, e aquele que buscamos abordar nesse breve escrito, diz respeito ao tratamento dado a geometria por meio da álgebra, propondo algo até então inédito. Essa abordagem, por sua vez requeria formas de representação de problemas geométricos que fizessem uso de linguagem algébrica, é essa transição entre as duas áreas – geometria e álgebra – que caracterizaremos algumas dessas abordagens de Descartes a partir das representações semióticas, analisando-as sob esse ponto de vista.

JUSTIFICATIVA

A utilização da história da matemática como meio de proporcionar maiores possibilidades de compreensão dos conteúdos tem se tornado mais recorrente por parte dos professores, logo compreender alguns dos mais emblemáticos episódios históricos, como no caso de Descartes, de maneira que a esses fatos sejam consideradas concepções mais modernas, como a de Duval, não apenas possibilita um novo olhar ao desenvolvimento matemático, mas possibilita uma melhor compreensão acerca do pensamento e dos processos cognitivos envolvidos.

METODOLOGIA

O presente trabalho busca compreender as representações usadas por Descartes na sua geometria analítica (vale ressaltar que tal expressão jamais foi utilizada por ele) relacionando-as às representações semióticas de Duval, sendo assim faremos uma pesquisa bibliográfica, principalmente priorizando fontes primárias, ou seja, escritos elaborados pelos próprios autores, dessa forma estaremos nos afastando de possíveis interpretações equivocadas, por outro lado as fontes secundárias não serão desconsideradas, mas daremos prioridades a autores que apresentem maior número de publicações sobre Descartes e Duval.

Em um primeiro momento trataremos da geometria de Descartes, suas motivações e a maneira como Descartes a concebeu, em paralelo analisaremos esse desenvolvimento fazendo uso do conceito de representações semióticas e suas classificações, identificando-as com o trabalho de Descartes.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Descartes (1596-1650) tinha como objetivo a elaboração de um método universal que pudesse ser utilizado na busca pela verdade, ele viu na matemática as ferramentas necessárias para a construção desse método (ou fez uso de sua estrutura como modelo, para validar seu método). A “matemática” da qual fez uso como referência, assim como todos os seus contemporâneos foi aquela já desenvolvida pelos antigos gregos com a aritmética e a geometria, portanto baseada naqueles princípios, sua ideia, de forma resumida, era estender tais princípios a qualquer área de conhecimento.

Suas profundas investidas no mundo filosófico levaram-no a elaborar meios e métodos para o estudo das ciências deixando de lado qualquer pensamento que não pudesse ser sistematicamente comprovado, esse tipo de raciocínio é hoje chamado de cartesiano, esse feito de Descartes pode ser

visto em seu trabalho “*Discurso sobre o método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências*” onde em alguns de seus anexos estão algumas contribuições para matemática.

Em “*La Géométrie*” era mostrada a aplicação da álgebra no estudo da geometria, originando a geometria analítica, porém deve ficar claro que nesse trabalho Descartes apenas mostra que a álgebra poderá ser aplicada para se estudar a geometria, ou seja, o que conhecemos hoje como plano cartesiano, está presente em seu trabalho como uma ideia sobre como associar linhas a equações, que é a essência da geometria analítica e não o plano “cartesiano”, que por sua vez relacionava números (coordenadas) a pontos em um plano, daí o conjunto desses pontos formavam “linhas”, para título de ilustração temos na figura abaixo uma curva de grande importância, que inclusive foi mencionada anteriormente como um dos objetos de pesquisa de Newton que por sinal se interessou tanto pelo trabalho de Descartes em “*La Géométrie*” que adquiriu uma cópia em latim sendo ainda aluno e estudou-o por conta própria, é a cicloide que tem como equações paramétricas (em linguagem moderna): $x = a(t - \text{sent})$ e $y = a(1 - \text{cost})$, as coordenadas estão expressas em termos de coordenadas polares dadas as dificuldades em expressá-las em termos cartesianos ela é obtida através da trajetória descrita por um ponto fixo de circunferência que rola sobre o eixo x.

Entretanto, para que possamos caracterizar determinada atividade como “matemática”, em especial a de Descartes precisamos em um primeiro momento considerar alguns aspectos: a importância das representações semióticas e a grande variedade dessas representações. (DUVAL, 2011)

Para Duval tais representações vão além da elaboração de sinais para se representar pensamentos, eles fazem parte do próprio processo da atividade matemática, estas por sua vez devem ser abordadas não a partir dos objetos ou dos conceitos matemáticos que representam, nesse caso as equações e a geometria, mas a partir do funcionamento representacional que é próprio do registro no qual são produzidas (DUVAL, 2012).

Para maior clareza no significam tais termos, utilizemos as palavras do próprio autor:

“As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.” (Duval, 2012, p. 3)

O domínio de determinado conhecimento matemático se dá tanto pela produção de um registro semiótico (semiose) quanto pela apreensão conceito do objeto (noesis), ambos os processos são indissociáveis.

É importante ressaltar que não se deve confundir a representação do objeto com o próprio objeto matemático, este último apesar de só poder ser apreendido pelo conceito o que só ocorre mediante a produção das representações

Não obstante, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. (Duval, 2012, p.3)

DISCUSSÃO

De fato, trata-se não apenas de uma forma diferente de representar a multiplicação entre números, mas demonstra um total domínio sobre as duas formas de escrita não possibilitando a existência de ambiguidades, por outro lado temos também que, aquilo que Duval caracteriza como atividade matemática do ponto de vista cognitivo está bem presente no trabalho de Descartes, a saber: as representações semióticas e sua vasta variedade.

“A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos[...], mas nas duas características seguintes: A importância das representações semióticas [...] e a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática.” (Duval, 2011, p. 14)

Segundo Duval as representações semióticas vão além de símbolos cuja utilidade é expressar pensamentos, de acordo com o autor elas fazem parte do próprio pensamento matemático.

As quais por sua vez podem ser classificadas em representação discursiva, representação não discursiva, registros multifuncionais e registros monofuncionais, dentre os quais, no mínimo duas delas devem estar presentes para que haja compreensão da matemática, além de dois tipos de transformações semióticas: os tratamentos e as conversões, sendo que o intuito desse artigo é caracterizar a geometria cartesiana a partir desses conceitos de Duval, verificando e classificando as etapas do desenvolvimento da geometria bem como os tipos de transformações utilizadas na transição de uma representação, no caso a geométrica para outra, a algébrica.

Mas de que forma podemos classificar esse meio de representação da multiplicação de acordo com as definições de Duval? É o que veremos a seguir.

Para que haja uma representação semiótica, de fato, deve haver antes uma apreensão conceitual do objeto em questão, a esta apreensão conceitual chamamos de “noesis”, no caso de Descartes a evidência dessa apreensão fica clara, pois do contrário como ele haveria de conceber tais representações caso não as conhecesse em sua essência.

O desenvolvimento e a contribuição de Descartes à matemática se deram principalmente por meio da elaboração de suas próprias representações, no caso por intermédio da álgebra, da geometria clássica, tendo como principal motivação a busca por um método universal de busca pelo conhecimento e verdade, bem como a aplicação prática da matemática.

A utilização da matemática como ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio pressupõe a existência do pensamento racional, dessa forma, falando-se de pensadores como Descartes, a matemática era presente em seus trabalhos na forma de instrumento para o seu pensamento, ou seja, suas contribuições e acréscimos nessa área eram frutos de uma concepção filosófica do mundo, sua “matemática” e de sua filosofia.

Para compreender as representações utilizadas por Descartes devemos antes compreender suas motivações, influências e filosofia, as quais se apoiavam em uma matemática prática que pudesse servir aos interesses do homem, portanto diferente da matemática grega que, ao menos em um primeiro olhar, não aparentava tais preocupações. Esse fim é bem explícito em seu trabalho “O discurso do método”:

“no lugar dessa filosofia que se ensina nas escolas, pode-se encontrar uma prática pela qual, conhecendo a força das ações do fogo, da água, do ar, dos astros, dos céus e de todos os outros corpos que nos cercam tão distintamente como conhecemos os diversos trabalhos de nossos artífices, poderíamos emprega-los da mesma maneira a todos os usos para os quais ele são adequados e assim nos tornarmos como mestres e possuidores da natureza”(Descartes, p.37)

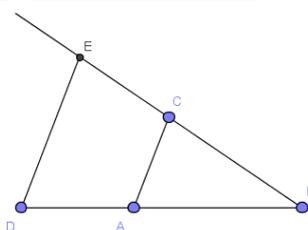
O trabalho de Descartes, no que se refere a utilização da álgebra na resolução de problemas geométricos vai além de simples representações de entidades geométricas por meio de letras, na sua concepção toda uma estrutura pôde ser gerada, de modo que mantivesse os padrões clássicos, em momento algum tendo a pretensão de anulá-los, mas dando-lhes características das quais careciam, o que fica bem claro do seu método analítico de lidar com tais problemas, explicitando o motivo e a justificativa de cada etapa por meio de representações que conseguissem abstrair aquilo que lhes era essencial, algo que por sua vez guardava em si fundamentos da geometria grega.

“Tendo em conta o teor dessas referências e desses indicativos, parece não haver dúvidas quanto à tese de que Descartes é um legítimo praticante da análise geométrica e, como tal, filia-se a essa tradição metodológica” (Battisti,2010, p.572)

Sua proposta de algebrizar a geometria surge então com uma finalidade não matemática, mas como uma ferramenta que poderia ser utilizada em todas as áreas do conhecimento e que coincidia em certos aspectos com o fazer matemático, e mais, era capaz de expressar de forma geral o modo com que a racionalidade operava (Batistti), porém sendo inevitável que tal método fosse descrito de forma matemática, constituindo o gérmen da geometria analítica como a conhecemos hoje.

Afim de nos familiarizarmos com as ideias cartesianas comecemos com a relação por ele construída entre a multiplicação de números e representações geométricas, dessa forma podemos ter um vislumbre de como ele discorria entre uma área e outra.

Sua ideia consistia, antes de tudo na definição da unidade (segmento \overline{AB}), e posteriormente na multiplicação de \overline{BD} por \overline{BC} , aqui é possível verificar a representação semiótica utilizada, pois um segmento é tratado como um número e assim torna-se possível operar com eles da mesma forma como se pode operar com números, e conseqüentemente por meio de equações onde suas soluções, podiam em contrapartida ser interpretados de maneira algébrica Para isto juntava-se os pontos A e C, traçando uma linha \overline{DE} paralela a \overline{AC} , onde \overline{BE} é o produto dessa multiplicação.



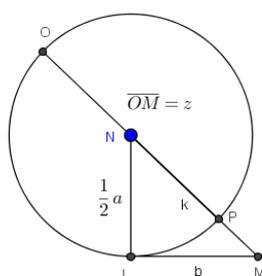
Como já mencionado anteriormente, para que tal concepção matemática seja uma representação semiótica é necessário que ao menos haja dois tipos de registros dentre os citados por Duval: Língua natural, sistemas de escrita, figuras geométricas ou gráficos cartesianos, sendo que nesse último caso devemos considerar a maneira como Descartes tratava as variáveis de uma equação, já que em nenhum momento ele tratara dos sistemas de coordenadas como os conhecemos

atualmente, mas como duas grandezas em que, a medida que uma delas sofria alguma variação a outra também variava.

De fato, é possível perceber que no mínimo duas delas estavam presentes: um sistema de escrita em conjunto com figuras geométricas, tomemos como exemplo a equação:

$$z^2 = az + b^2$$

Onde “z” é a linha (termo utilizado por Descartes) desconhecida, a construção que fornecia a solução para tal problema era feita da seguinte forma:



E sua solução na forma algébrica era:
$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$
 (Sapunaru, 2015).

Essa transição entre álgebra e geometria diz respeito a um tipo específico de transformação semiótica, a conversão, percebamos que há uma mudança drástica na forma de registro, porém a essência dos objetos permanece, permitindo dessa forma que a solução algébrica se adeque perfeitamente a solução geométrica, além de se mostrar um método mais eficiente.

“Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro.” (Duval, 2011, p. 16)

Como se vê a linguagem matemática vai além do significado que atribuímos a palavra “linguagem”, ela constitui parte integrante da própria matemática quanto produto de processos cognitivos, agindo tanto como causa quanto como efeito.

CONCLUSÃO

Esse pequeno ensaio permitiu que pudéssemos admitir a possibilidade de tratar algumas contribuições de Descartes a matemática sob o ponto de vista da teoria de Duval, embora as

possibilidades de abordagens sejam inúmeras, ou seja, poderíamos considerar vários outros exemplos do trabalho de Descartes, vimos que as representações feitas por Descartes foram além de uma mudança de “linguagem” de geométrica para algébrica, ela permitiu um tratamento totalmente diferenciado para problemas clássicos da geometria clássica e é nessa mudança de registros que reside a atividade matemática, sabemos entretanto que a obra de Descartes é vasta e não tão simples que possa ser abordada e analisadas em poucas páginas como fizemos aqui, dessa forma nos propomos a fazer um estudo inicial acerca desse tema, tendo em vista aprofundá-lo ainda mais por meio de análises mais abrangentes desses dois nomes, contribuindo tanto com o estudo da história da matemática como com a compreensão dos processos cognitivos envolvidos ao longo do tempo, deixamos a cargo do leitor a possibilidade de continuidade dessa análise pois acreditamos ser muito rica.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BATTISTI, César Augusto. **O método de análise cartesiano e seu fundamento**. scientiæ zudia, São Paulo, v. 8, n. 4.

DESCARTES, René. **O discurso do método**. Acrópolis, 2013

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, 2012

DUVAL, Raymond. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. 8ª Ed. Campinas-SP: Coleção Papirus Educação, 2011

SAPUNARU, Raquel Anna. **A geometria de René Descartes**. 1ª Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015