

ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE COMBINATÓRIA COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Gerliane Rocha de Araújo

Universidade Federal de Pernambuco, e-mail: gerliane16@gmail.com

Maria Larissa Lopes Pereira da Silva

Universidade Federal de Pernambuco, e-mail: larissa2329@gmail.com

José Jefferson da Silva

Universidade Federal de Pernambuco, e-mail: jef3ferson@hotmail.com

RESUMO

A pesquisa foi realizada a partir de estudos na Disciplina Eletiva Ensino de Combinatória: Perspectivas Teóricas e Práticas, ministrada no Campus Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE-CAA). E objetivou analisar quais as concepções e quais as dificuldades apresentadas por alunos ao responderem problemas de combinatória. Para tal fim, foram criados problemas combinatórios de todas as situações apresentadas por Pessoa e Borba (2009), assim sendo, o questionário possuía questões de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação, apresentando sempre pelo menos um problema com valores pequenos de cada tipo de problema, e um com valores maiores. Os questionários foram aplicados em duas escolas públicas do interior de Pernambuco, mais especificamente nas cidades de Surubim e Passira, em turmas de 3º Ano do Ensino Médio, que já tinha visto formalmente ao longo de sua escolarização o conteúdo de combinatória. Em seguida fizemos uma análise qualitativa dos questionários aplicados, categorizando as resoluções, e identificando as concepções de combinatória, as principais dificuldades e quais as representações utilizadas para resolução da situação. Como resultado, encontramos predominantemente alunos que tratavam a combinatória como um campo da matemática onde era necessário a aplicação de fórmulas, sendo esse inclusive a principal representação. Apesar disso encontramos algumas outras representações, conforme as citadas por Barreto e Borba (2011), como por exemplo, a utilização do princípio fundamental da contagem, e o desenho. Como estratégias foram encontradas ainda operações matemáticas, listagem, entre outras. A partir dos dados encontrados percebemos a necessidade de se valorizar o raciocínio combinatório antes do ensino médio, buscando uma evolução deste nos alunos, e não apenas aplicações de fórmulas.

Palavras-Chaves: Raciocínio Combinatório, Ensino Médio, Estratégias.

INTRODUÇÃO

As primeiras atividades matemáticas da humanidade estavam relacionadas à contagem de objetos de um conjunto, enumerando seus elementos. A combinatória nos possibilita calcular o número de casos possíveis de um determinado acontecimento. Roxo (1944) nos ajuda compreender melhor o que é a análise combinatória afirmando que esta é:

Uma área da Matemática que aborda o estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, como os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos. (ibid, p.81)

Além dos três tipos de problemas citados por Roxo (1944), as pesquisas recentes como a de Barreto e Borba (2011, p. 2) acrescentam o produto cartesiano, diferenciando os problemas combinatórios, como

O problema que envolve o **produto cartesiano** é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. A operação com problemas que envolvem o **arranjo**, a **permutação** e a **combinação**, consiste basicamente, em formar subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da *permutação* – ou com alguns dos elementos – nos casos do *arranjo* e da *combinação* e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o *raciocínio combinatório* se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do *produto cartesiano* que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos.

Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) defendem a importância de se estudar a combinatória desde os anos iniciais do ensino fundamental, devido sua freqüente utilização em situações cotidianas.

O PCN de Matemática dos anos iniciais, por exemplo, cita que “relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p.40).

O PCN de Matemática dos anos finais reflete ainda a importância de renovar os conteúdos da disciplina a serem ensinados na Educação Básica, pois segundo o mesmo

Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1988, p. 49)

Estes documentos defendem ainda a ideia de contextualização e propõe a intervenção do aluno no processo de aprendizagem. Sendo suma importância que o professor crie

situações comuns do dia a dia trazendo o cotidiano para a sala de aula fazendo com que os estudantes interajam ativamente no processo de ensino-aprendizagem. Assim, discutindo o assunto em sala de aula de maneira contextualizada, facilita a compreensão da temática.

Diante deste cenário, o presente artigo teve como objetivo geral: analisar as estratégias usadas pelos alunos do 3º Ano do Ensino Médio das Escolas Públicas de Referência, localizadas no Município de Surubim – PE e Passira – PE, para resolver cada questão do questionário proposto em relação aos seus conhecimentos sobre Combinatória. Os objetivos específicos foram: verificar os tipos de respostas das questões, identificar as principais estratégias, as concepções e por fim compreender as dificuldades que cada um teve em resolver os problemas.

O ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

A Combinatória se faz presente em diversos problemas que estão relacionados ao nosso cotidiano, por exemplo: Pedro tem 4 calças e 6 camisas, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir para ir à escola? Em um colégio, seis alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do Grêmio Estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita? De quantas formas diferentes três pessoas de uma mesma família podem sentar-se em um sofá para tirar uma foto?

Assim sendo, oportunizar os conhecimentos de combinatória é relevante em diversos aspectos de nosso cotidiano. E diante deste cenário a apresentação de estratégias para solucionar problemas de combinatória é essencial ao longo da Educação Básica. Algumas representações que podem nos ajudar a resolver tais problemas são: a listagem, a árvore de possibilidades, os esquemas, os diagramas, as tabelas (BARRETO; BORBA, 2010). Estas formas de representar as soluções ajudam no desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois permitem que o discente elenque as possibilidades, sem necessariamente ter que se utilizar de fórmulas, que em geral não é significativo para o aluno.

Apesar da importância de conhecer várias representações do ensino de combinatória, salienta-se que estas representações não são utilizáveis em todos os problemas. Em consonância, Morgado e outros (1991, p.2) afirmam que

a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da

(83) 3322.3222

contato@epbem.com.br

www.epbem.com.br

matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Ou seja, como não existe um método único de resolução para problema de combinatória, precisamos então conhecer diversas possibilidades de resolução. Apesar disto, não é o que percebemos no ensino de matemática, e em particular de combinatória no Ensino Médio, onde o que observamos é a prioridade no modelo fórmula-aplicação ao quais as fórmulas, prontas e acabadas, são passadas para o aluno e cabe a ele escolher a fórmula correta para a resolução do problema. Desta maneira, o desenvolvimento do raciocínio combinatório do estudante não é observado muito menos as ideias por ele utilizadas para resolver a questão.

Decidir sobre a forma mais apropriada de organizar os dados para o desenvolvimento da questão para poder avaliar os casos possíveis, não deve ser desenvolvido apenas por uma lista de fórmulas, mas como processo que visa simplificar e explicar melhor determinada situação. Segundo o PCN+ (BRASIL, p. 126-127), “as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.”

Neste sentido, Morgado e outros (1991, p.2) salientam que se

a aprendizagem destes conceitos [combinatórios] se fizer de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Desta forma, tendo em vista que o ensino de combinatória não deve ser pautado no uso de fórmulas, e se baseando no já exposto pelos PCN's reforçamos a necessidade do aluno iniciar o aprendizado de combinatória durante o Ensino Fundamental para que o estudante vá desenvolvendo seu raciocínio combinatório para quando chegar ao Ensino Médio ele possa aprimorar seus estudos acerca da temática tomando como ponto de partida o conhecimento já adquirido nas séries anteriores.

Percebemos que em geral nos livros didáticos já se encontram problemas de combinatória em todos os anos de ensino fundamental, conforme Barreto e Borba (2010) apresentam em sua pesquisa nos anos iniciais do fundamental, Silva e Rocha (2015) apresentam ao analisarem livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Contudo, o ensino de combinatória na maioria das escolas, só começa, formalmente a partir do 2º Ano do Ensino Médio, e conforme já exposto em geral pela utilização de fórmulas. Assim um dos problemas, talvez o mais presente, do estudo da combinatória na instituição escolar, é diferenciar o tipo de agrupamento que a questão aborda. Observamos que os questionamentos mais frequentes na sala de aula são: é arranjo, combinação ou permutação? Qual fórmula vai usar?

A maior dificuldade talvez seja relacionar o problema com a teoria matemática. É importante fazer com que o aluno, a partir de tentativas de resolução, vá desenvolvendo suas concepções acerca da Combinatória e por si só, vá observando a diferença entre os tipos de agrupamentos.

METODOLOGIA

Para o desenvolvimento desta pesquisa foi aplicado um questionário em duas turmas de Terceiro Ano do Ensino de Escolas Públicas Estaduais localizadas nos Municípios de Surubim - PE e Passira – PE. Com o objetivo de verificar os tipos de respostas, estratégias e concepções do conteúdo de análise combinatória fomos em busca de respostas para esses objetivos. Fizemos a aplicação do teste com 50 alunos, sendo 20 em Surubim – PE e 30 em Passira – PE. A pesquisa foi feita no decorrer da aula de matemática nas respectivas escolas.

A elaboração do questionário foi feita em sala de aula, junto com a turma que cursa a disciplina Eletiva Ensino de Combinatória, já que a análise dos testes foi proposta para todos da turma como atividade avaliativa. O questionário contém 10 questões, sendo distribuídas em 2 questões de arranjo, 2 de permutação, 2 de produto cartesiano, 3 de combinação e 1 questão conceitual visando a concepção dos alunos a respeito de combinatória. A metodologia foi estruturada em duas etapas: aplicação do questionário e análise dos resultados obtidos.

A primeira etapa da pesquisa teve como objetivo observar os tipos de estratégias ao quais os alunos resolviam as questões e saber as concepções que esses alunos tinham em relação à Combinatória. Para isso utilizamos o questionário. Fizemos a escolha de 6 alunos e 6 questões como objeto de pesquisa, pois desconsideramos os questionários que possuíam questões não respondidas (em branco). A seleção das questões a serem trabalhadas nesse artigo se deu a partir das análises gerais para apresentação do trabalho, e constatamos que as questões e provas escolhidas apresentaram resultado significativo.

A segunda etapa foi a verificação e a análise dos resultados, onde estávamos interessados em investigar quais as estratégias e tipos de respostas apresentadas pelos alunos acerca da aprendizagem de análise combinatória.

A partir do que foi proposto na disciplina Eletiva de Ensino de Combinatória: Perspectivas Teóricas e Práticas, ofertada pelo curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco – Campus Agreste, a escolha por fazer esse trabalho se justifica em verificar como os alunos estão tendo conhecimento a respeito da Combinatória, especificamente no 3º Ano do Ensino Médio. É uma parte desafiadora da Matemática, pois muitos professores não gostam de ensinar combinatória, e ao mesmo tempo é uma parte estimulante da Matemática, pois dá condições de contextualizar as questões com o cotidiano dos alunos com mais facilidade, desenvolvendo seu raciocínio lógico matemático.

Assim, é importante se questionar: “Como esta sendo trabalhada a Combinatória na sala de aula?”. É preciso motivar os alunos para que despertem interesse a respeito do assunto a partir de problemas contextualizados atrativos, despertando sua curiosidade em resolvê-los.

DISCUSSÃO E RESULTADOS

É de suma importância realizar o estudo da Combinatória, visto que essa temática se faz presente em diversas situações do nosso cotidiano. É preciso que o professor não deixe o conteúdo de lado. Segue abaixo gráfico com a síntese dos resultados encontrados referente ao tipo de respostas e ao tipo de estratégia, em que tal classificação baseou-se em Pessoa (2009).

Gráfico 1: Distribuição dos tipos de resposta por questão.

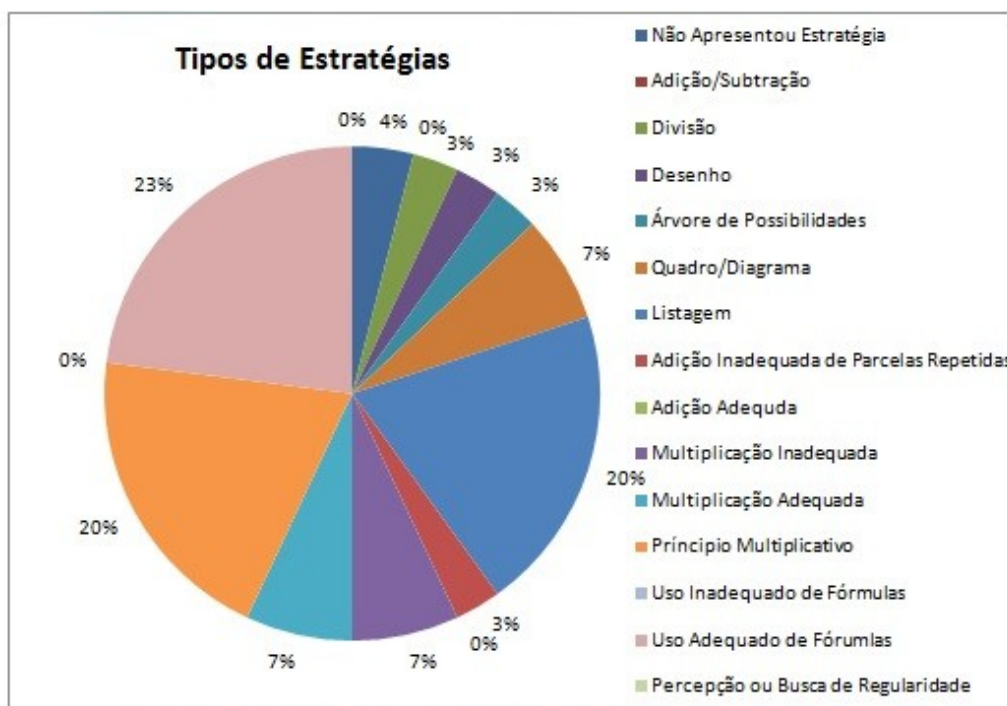


Segundo a análise, observa-se que não obtivemos como resolução apenas a resposta (incorreta ou correta), em branco e resposta incorreta com estratégia sistemática. Isso mostra o

comprometimento que os alunos tiveram com o teste, pois mesmo não apresentando a resposta correta, buscaram resolver a questão não pondo apenas a resposta final.

Apresentamos a seguir o gráfico com os tipos de estratégias descritos na resolução das questões, bem como discussões em relação a esses resultados.

Gráfico 2: Apresentação dos tipos de estratégias encontrados.



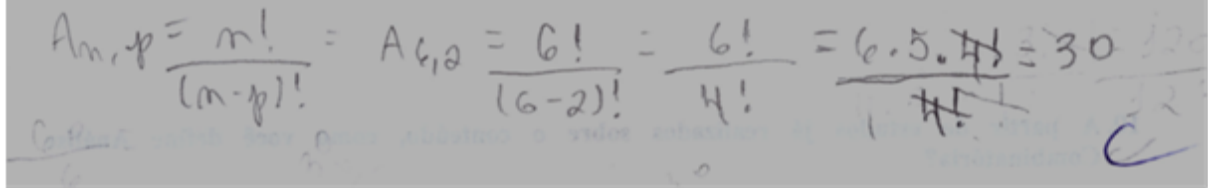
Percebe-se que dentre os 15 tipos de estratégias apresentados o que prevaleceu foi o uso de fórmulas (23%). Não obtivemos como estratégia de resolução adição/subtração, adição adequada, uso inadequado de fórmulas e percepção ou busca de regularidade.

No geral tivemos como resposta um bom percentual de acertos das questões. Consideramos acerto aqueles que apresentaram a resposta correta mesmo que não tivesse nenhuma estratégia para sabermos como ele chegou à resposta correta, e também a maneira pela qual o aluno entendeu a questão: se ele considera repetição, ordem e a desenvolveu com sentido, ou seja, a compreensão do aluno.

A seguir, podem-se observar algumas estratégias usadas pelos alunos ao resolvermos problemas propostos.

Figura 1. Solução da questão 1 (Arranjo), pelo aluno 2 do 3º Ano do Ensino Médio, Escola Pública Estadual.

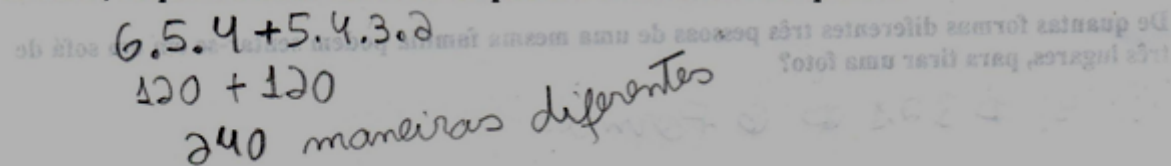
Em um colégio, seis alunos candidataram-se para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil. De quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?



$$A_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!} = A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$$

O aluno 2 usou a fórmula para resolver a questão. A resposta está correta. Além desse aluno, outros também utilizaram a fórmula como estratégia de resolução. O uso de fórmulas prevaleceu nas estratégias utilizadas pelos estudantes. No entanto, no momento da aplicação do teste surgiram vários comentários do tipo: “eu só sei responder por fórmula”, “no meu caderno só tem fórmula”, “como vou responder se eu não sei qual fórmula vou usar porque não sei se é arranjo, combinação ou permutação”? Ou seja, um mecanismo baseado no modelo fórmula-aplicação em que a maioria dos alunos não conhecia a diversidade de estratégias de resolução para as questões.

Para ajudar no passeio do terceiro ano, os alunos da Escola Novo Horizonte resolveram vender recipientes com 3 doces e 4 salgados. Sabendo que eles disponibilizam 5 tipos de salgados e 6 tipos de doces, de quantas maneiras diferentes pode ser formado esses recipientes?



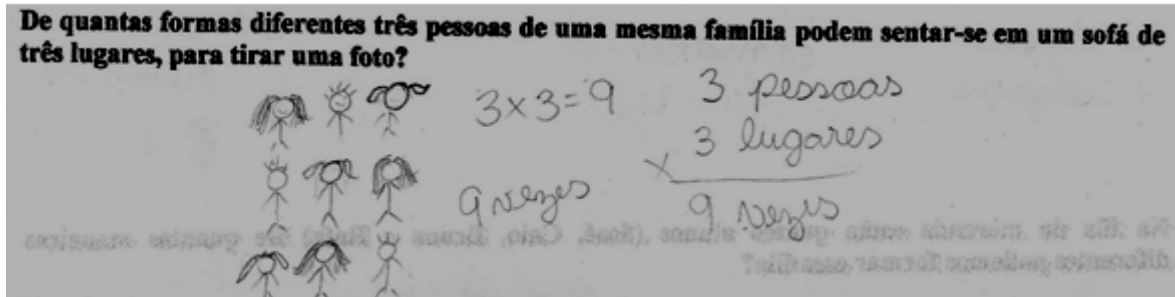
$$6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$
$$120 + 120$$

240 maneiras diferentes

Figura 2. Solução da questão 2 (Combinação) pelo aluno 4 do 3º Ano do Ensino Médio, Escola Pública Estadual.

O aluno 4 usou como estratégia de resolução o Produto Cartesiano. A resposta está correta. Ele considerou a ordenação dos elementos sem repetição ordenando de acordo com os elementos disponíveis para formar os recipientes. É interessante o pensamento desse aluno, pois ele utiliza apenas o Produto Cartesiano multiplicando as possibilidades de doces e salgados e somando-as. Essa foi a maneira que ele entendeu o problema e apresentou pensamento combinatório, com isso a resposta foi considerada correta. Além desse aluno, outros também utilizaram como estratégia de resolução para essa questão, o Produto Cartesiano.

Figura 3. Solução da questão 3 (Permutação) pelo aluno 6 do 3º Ano do Ensino Médio, Escola Pública Estadual.



O aluno 6 usou o desenho como estratégia de resolução, porém a resposta está incorreta com relação com estratégia não sistemática. Ele iniciou a resolução desenhando os casos possíveis, mas não esgotou todas as possibilidades, e ainda, fez uma multiplicação inadequada. Talvez se ele continuasse listando os desenhos, conseguindo esgotar todas as possibilidades, ele percebesse os casos possíveis.

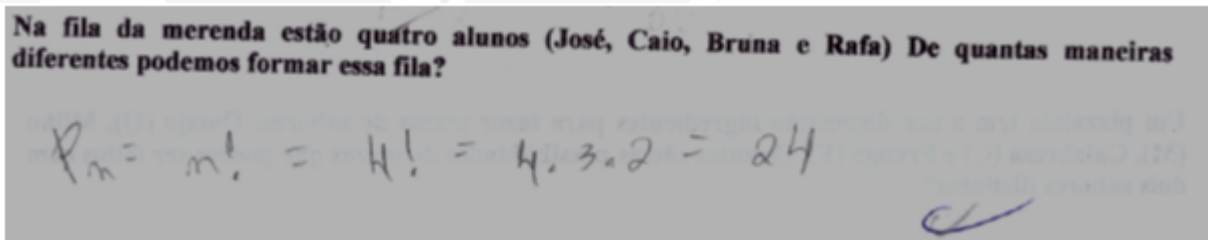
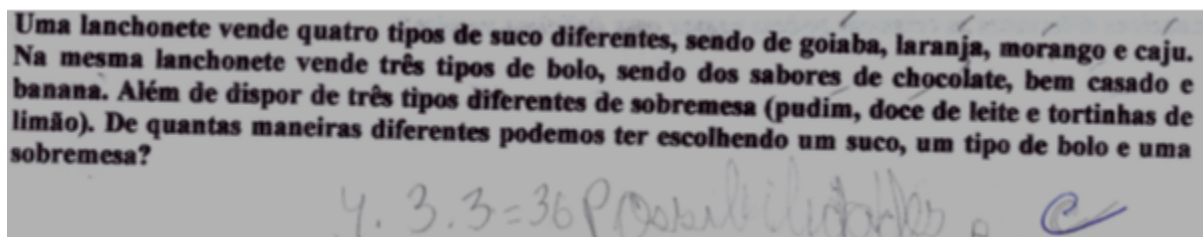


Figura 4. Solução da questão 4 (Permutação) pelo aluno 1 do 3º Ano do Ensino Médio, Escola Pública Estadual.

O aluno 1 também utilizou como estratégia de resolução, a fórmula. Existem n maneiras de estratégias para desenvolver essa questão como listagem e tabela, por exemplo, mas o que prevaleceu foi o uso da fórmula.

Figura 5. Solução da questão 5 (Produto Cartesiano) pelo aluno 3 do 3º Ano do Ensino Médio, Escola Pública Estadual.



O aluno 3 chegou a resposta correta da questão. Utilizou como estratégia o Produto Cartesiano, tipo comumente trabalhado nas escolas. Multiplicou os valores disponíveis esgotando todas as possibilidades.

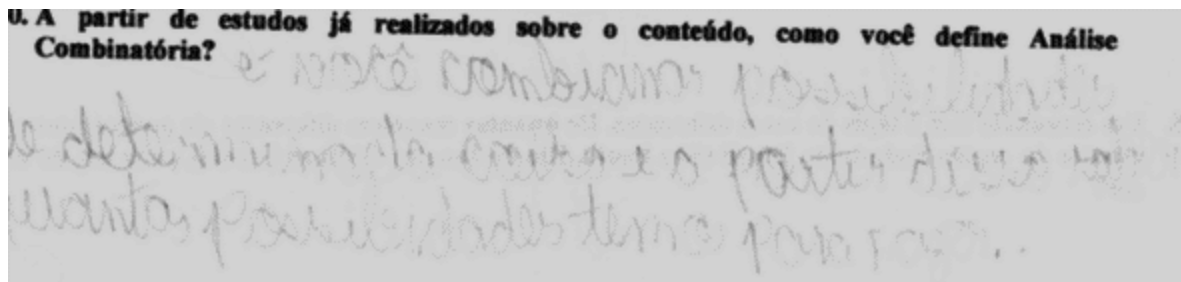


Figura 6. Solução da questão 6 pelo aluno 3 do 3º Ano do Ensino Médio, Escola Pública Estadual.

Observamos que os alunos tiveram bastante dificuldade para responder a essa pergunta. Alguns não apresentaram definição, mas sim, o que acharam do teste, ou simplesmente afirmaram que a Análise Combinatória era “boa”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou analisar os tipos de estratégias, tipos de respostas encontradas e das concepções dos alunos acerca da Combinatória. A partir das dificuldades encontradas no Ensino de Combinatória, observamos que é preciso apresentar aos alunos diversidades de estratégias de resolução, bem como trabalhar com diversas metodologias para que estimule o estudo da temática.

Com o estudo documental realizado, percebemos a necessidade de o aluno estudar a combinatória anteriormente ao ensino médio, com mais calma, podendo desenvolver seu raciocínio combinatório de forma mais processual. Assim, através de nossas análises, e nos consubstanciando nos documentos oficiais, ressaltamos a necessidade de se estudar combinatória, desde os anos iniciais da Educação Básica.

Contudo, percebemos nas nossas análises que alguns alunos, mesmo sem saber o uso da fórmula adequada para tal problema, resolviam a partir de estratégias simples como listagem e desenho, que mesmo não apresentando a resposta correta, apresentavam pensamento combinatório.

No momento da aplicação do teste houve muitos questionamentos a respeito de qual problema estavam resolvendo, com isso vemos que a necessidade de saber se é um problema de arranjo, permutação, combinação ou principio multiplicativo ainda é importante para os alunos, pois ainda buscam resolver as questões a partir de aplicações de fórmulas apesar de não ser necessário saber que tipo de problema se trata para poder resolvê-lo.

Com isso, uma proposta viável, para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, seria o professor tomar como referência os documentos oficiais que visam trabalhar a combinatória desde os anos iniciais da Educação Básica.

Por fim, além dos objetivos atingidos, essa pesquisa nos fez refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Assim, percebemos a necessidade do professor trabalhar essa temática com metodologias diversificadas bem como a apresentação de diversas estratégias de resolução para facilitar e aprimorar a aprendizagem do conteúdo. É importante trabalhar com o cotidiano dos alunos contextualizando o tema e isso é possível com a Análise Combinatória. No entanto, o Ensino de Combinatória deve ser apresentado, formalmente, desde os anos iniciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, F. L. S.; BORBA, R. E .S. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais eletrônicos...** Salvador: UFBA, 2010.

Disponível em <https://www.google.com/accounts/ServiceLogin?service=writely&passive=1209600&continue=https://docs.google.com/open?id%3D0B3nOb_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U%26urp%3Dhttp://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.htm&followup=https://docs.google.com/open?id%3D0B3nOb_rG1DUhcE5uODc4Vk1zU0U%26urp%3Dhttp://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/producoes.htm<mpl=homepage&authuser=0>.

Acesso em: 12 jan. 2014.

BARRETO, F; BORBA, R. Intervenções de Combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: MEC, SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática)**. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FENANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do
(83) 3322.3222
contato@epbem.com.br

www.epbem.com.br

raciocínio combinatório de crianças de 1^a a 4^a série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

ROXO, E. et al. **Matemática 2º ciclo, 2ª série.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1994.

SILVA, J. J.; ROCHA, C. A. A Utilização de Representações Simbólicas nos problemas combinatórios em Livros Didáticos do Ensino Fundamental. In: Conferência Nacional de Educação, 2., 2015, Campina Grande - PB. **Anais eletrônicos...** Salvador: UFBA, 2010. Disponível em:

<http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA_8_ID4940_06082015202753.pdf>. Acesso em: 25 de jul. 2016.

