

A Demonstração nos Livros Didáticos de Matemática na perspectiva dos conjuntos

José Carlos S. Queiroz
Universidade do Estado da Bahia – UNEB
email: sqcarlos@hotmail.com
Válber Márcio de A. Melo
Universidade do Estado da Bahia – UNEB
email: vmelo@uneb.br

RESUMO

Para o ensino de matemática ser estruturado numa base sólida, várias características devem ser consideradas. A sua apresentação pelo livro didático é elemento fundamental visto que este é um parâmetro, tanto para o professor quanto para o aluno, com relação ao tipo de abordagem que será realizada. Assim, este artigo tem como objetivo investigar como os livros didáticos de matemática do ensino médio têm apresentado as demonstrações de propriedades inerentes ao conteúdo de conjuntos. Temos por hipótese que para um ensino consistente se faz necessário que os livros apresentem abordagens com demonstrações bem direcionadas para o nível de ensino. Este trabalho foi desenvolvido a partir da análise da relação entre as propriedades inerentes ao conteúdo e as demonstrações apresentadas para justificar tais propriedades, que são elementos que contribuem para um melhor entendimento da matemática. Esta pesquisa é qualitativa e analisa as demonstrações matemáticas considerando o seu caráter lógico e didático. Consideramos que o tipo de abordagem realizado nas provas matemáticas podem interferir diretamente neste ensino, uma vez que os livros didáticos de matemática influenciam na forma como os professores concebem este conhecimento e promovem este ensino. Nossos estudos concluíram que os livros não trazem as demonstrações construídas com o rigor lógico, mas apresentam algumas discussões que dão a ideia, por exemplo, de prova por absurdo. Justificativas de propriedades por diagramas de Venn e, em um caso uma prova restrita para a soma dos elementos da união de dois conjuntos. Os órgãos que norteiam o ensino de matemática são enfáticos ao afirmarem que este ensino precisa de um caráter científico no sentido de superar a compreensão empírica da matemática e para isto, a sistematização das propriedades matemáticas é fundamental para se colocar o ensino numa base científica e, o livro didático pode contribuir para esta finalidade.

Palavras-chave: Demonstração, livro didático de matemática, ensino de matemática.

INTRODUÇÃO

No estudo da matemática algumas características são evidenciadas por diversos pesquisadores da matemática e da educação matemática: Capacidade de aplicar, abstrair, generalizar, demonstra e projetar. Aprender matemática bem fundamentada é transcender técnicas, fórmulas e procedimentos.

Identificamos várias características para um aprendizado eficiente. A utilização de exemplos se constitui num grande meio didático para o desenvolvimento deste ensino o que leva a uma compreensão não satisfatória para este ensino, conforme afirma Queiroz (2013). Porém, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) e as sugestões da educação matemática afirmam que os livros didáticos de matemática devem contemplar as demonstrações de acordo com o nível de ensino e devido a relevância que este material tem ao influenciar no tipo de matemática que circula nas salas de aula.

Para este ensino, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) recomendam que as abordagens proporcionem aos alunos o desenvolvimento da argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a apresentação de respostas e afirmações prontas e acabadas mediante fórmulas, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Esta atitude exige que este ensino tenha em pauta a apresentação das demonstrações em matemática, como forma de validar este conhecimento.

A pesquisa é qualitativa fundamentada num referencial bibliográfico a partir da perspectiva de Silva e Schappo (2002), que recomenda este tipo de pesquisa para publicações de livros, revistas e periódicos. A pesquisa foi desenvolvida na Universidade do Estado da Bahia – UNEB – Campus - II, no Departamento de Ciências Exatas e da Terra - DCET II, na cidade de Alagoinhas, estado da Bahia. Assim o trabalho foi desenvolvido considerando a abordagem sobre os aspectos inerentes à demonstração das propriedades do tópico de conjuntos em livros didáticos de matemática para o ensino médio, sobre a necessidade destes livros apresentarem esta ciência considerando a sistematização, que consiste em provar teoremas e proposições, além de aplicações dentro da própria matemática e as vinculadas a um contexto.

Para testar nossas hipóteses selecionamos como tema a teoria dos conjuntos. Observamos que este é apresentado sem uma definição consistente por ser considerado como ente primitivo e por isso, são aceitos sem definição. Mas este conteúdo lida com propriedades de coleções bem definidas. Os conjuntos são compostos por membros ou elementos e estes podem ser de qualquer natureza. Além disso, os conjuntos estão associados a vários estudos no ramo da matemática. A primeira teoria matemática sistematizada que fundamentou os conjuntos numa linguagem científica é atribuída ao matemático George Cantor (1845 – 1918).

Pesquisas indicam que durante o ensino médio a matemática é apresentada aos alunos de uma maneira simbólica e cheia de fórmulas mágicas, sem que essas sejam explicadas ou justificadas (D'AMBRÓSIO, 2006). Portanto, para que haja uma aprendizagem bem fundamentada é necessário um ensino de matemática mais bem direcionado, uma reflexão mais profunda sobre o que se está fazendo no interior das escolas, pois quando este ensino não é bem articulado, pode conduzir a uma formação estreita e acrítica.

A sociedade contemporânea exige um ensino de matemática comprometido com mudanças, transformações sociais e com a formação de sujeitos capazes de promover e continuar o seu eu próprio aprendido ao longo do tempo. De acordo com D'Ambrósio (2006), um dos grandes desafios para o ensino de matemática é promover práticas educativas integradas às ideias matemáticas, às diversas culturas e ao mundo moderno. Portanto, o livro didático de matemática

pode contribuir nesta tarefa ao apresentar os conteúdos de forma mais interligada com os aspectos culturais e tecnológicos sem deixar de lado o aporte teórico da matemática.

O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA E A DEMONSTRAÇÃO

A demonstração matemática consiste em apresentar de forma sistemática, processos que expõe com clareza, de forma didática, os elementos que contribuem para a compreensão do raciocínio matemático.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.69) “compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações”.

Sendo o livro didático de matemática um dos elementos responsáveis por levar a matemática escolar às salas de aula, este não pode se eximir de apresentar a matemática considerando também o seu viés científico.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.70), que na matemática,

a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

A matemática é uma ciência cuja fundamentação envolve a utilização de uma formalização abstrata e simbólica e para a sua compreensão exige um conhecimento prévio bastante razoável do assunto e domínio de uma linguagem adequada. Assim, os livros didáticos de matemática devem inserir nas suas abordagens os princípios e conceitos das demonstrações inerentes às propriedades dos conteúdos, para favorecer uma melhor apresentação nas aulas do ensino médio.

Por meio da teoria dos conjuntos, apresenta-se a discussão sobre a ausência de uma definição para tal conteúdo, bem como para elemento e pertinência. Em subconjuntos se compreende as propriedades da inclusão e nas operações: diferença, interseção e união. Estes tópicos são estruturados a partir de propriedades sobre a relação que é estabelecida entre elementos e conjuntos e ainda sobre entre conjuntos.

A demonstração é a característica que diferencia a matemática das outras ciências e a caracteriza como um conhecimento abstrato que supera os dados empíricos que dão sustentação às outras áreas do conhecimento como a física, a química e a biologia.

Segundo Elon Lages Lima (1999, p. 4)

Um dos maiores méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida. O processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão, chama-se demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo.

Para um melhor entendimento da matemática uma análise das definições utilizadas por Pietropaolo (2005) que distingue explicação, prova e demonstração. A explicação situa-se no nível do docente como locutor com o objetivo de comunicar ao aluno, o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade adquire um estatuto social e constitui-se uma prova para esta comunidade, sendo a proposição “verdadeira” ou “não.” Neste caso, não envolve uma explicação rigorosa da proposição, é apenas enunciada e tomada como verdade.

As provas são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de verdade para determinada comunidade, mas não para outra, sendo assim, nesta perspectiva, relativa, como acontece nas ciências naturais e humanas. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Pietropaolo (2005) denomina somente neste caso é a demonstração. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos como prova de uma propriedade ou teorema;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas em um conjunto de regras lógicas;
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele faça referência.

No ensino da matemática, a existência de dúvidas e questionamentos de determinadas proposições ou desenvolvimento de alguns princípios matemáticos é algo que se verifica o tempo inteiro e isto acaba influenciando diretamente neste ensino.

Segundo Garnica(2002) a demonstração no processo de ensino e aprendizagem é um meio de tornar esta aprendizagem mais sólida e consistente, pois sendo a matemática uma ciência do abstrato, o seu ensino não pode se eximir de um certo equilíbrio em relação a esta prática. Pois esta permite:

- verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação;
- construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das consequências de uma hipótese, absorvendo um fato novo em uma nova estrutura que permite uma nova percepção.

Para Duval (2003) ao analisar as causas do fracasso no ensino e na aprendizagem da demonstração em matemática entende que esta é uma atividade cognitiva específica cuja aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada às pressões internas de um objeto ou uma explicação fundamentada no empírico. Pelo contrário, é um modo de processamento cognitivo autônomo com características específicas quando comparada com outras formas de funcionamento de raciocínio como a indução, a argumentação ou a interpretação.

E para a aprendizagem da demonstração consiste primeiramente numa abordagem clara e bem estruturada, dada pelo livro didático, no sentido de ser mais esclarecedora para que o docente entenda que se trata de um discurso específico, fundamentado em princípios lógicos, diferente do que é praticado pelo pensamento natural que é baseado em observações. Analisando as condições cognitivas para a compreensão do que é demonstração, Duval (2003) afirma que a demonstração funciona de acordo com um mecanismo compreensão de enunciados abstratos e uma sequência de operações fundamentadas em princípios matemáticos.

De acordo com Garnica(2002, p. 75)

a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica da matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visão panorâmica nos modos de produção e manutenção da “ideologia da certeza” para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativa de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais.

É importante mencionar que as instituições que norteiam o ensino médio de matemática enfatizam a relevância da demonstração matemática e a recomendam para este nível de ensino. Também sugere para que professores proporcionem aos alunos contatos com teoremas, proposições e com a posterior demonstração formal, privilegiando as conjecturas e as relações evidenciando o discurso teórico, próprio da lógica matemática e fundamental para a compreensão da matemática.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para o desenvolvimento dessa argumentação, foram utilizados dois livros de matemática que foram recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM, 2012) considerando as demonstrações apresentadas no conteúdo da teoria dos conjuntos para o ensino médio. Estes livros estão entre os mais usados pelas escolas públicas baianas.

Para isto, adotamos como referência as orientações da pesquisa qualitativa e apresento uma discussão compreendendo que ao analisar os conteúdos neste nível de ensino as demonstrações nem sempre precisam de uma apresentação formal dentro dos parâmetros da lógica matemática, o que se constitui no formalismo matemático que é defendido por uma corrente de matemáticos que

compreendem esta ciência como definições, axiomas e teoremas que são sustentados pelas leis da lógica.

Portanto, a análise que será feita considerará a apresentação do tópico de conjuntos considerando as suas propriedades e como a argumentação foi construída para provar ou justificar tais propriedades ou teoremas.

Sobre este modelo de pesquisa, pontuam Bogdan e Biklen (1994), é apresentar uma interpretação rigorosa de um conhecimento que está sendo difundido no interior de um grupo social e, esta interpretação é uma produção de conhecimento visando responder explicar a realidade de um pesquisador a partir de seu referencial, com afirmações particulares para um fato que não pode ser mensurado, mas analisado e interpretado à luz de significados, experiências, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes.

A pesquisa também tem um caráter bibliográfico que, de acordo com Silva e Schappo (2002), esta consiste na procura de referências teóricas publicadas em livros, artigos e documentos para que o pesquisador tome conhecimento e analise as contribuições científicas, de acordo o tema em questão partir dos elementos que se constituem significativos para o pesquisador.

Assim, fizemos um levantamento de alguns estudos desenvolvidos por pesquisadores da educação matemática e da matemática a respeito das diferentes concepções das demonstrações matemáticas e também sobre os conjuntos. A partir desse estudo analisamos o conteúdo, seguindo as indicações propostas para tal trabalho e fizemos ponderações que achamos relevantes no sentido de contribuir para a apresentação deste tema nos livros didáticos de matemática.

DISCUSSÃO DOS DADOS

Selecionamos dois livros didáticos de matemática, a saber: o livro A, *Novo Olhar Matemática* volume 1, cujo autor é Joamir Souza, publicado pela editora FTD em 2012 e o livro B, *Matemática Ciência e Aplicação*, cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Roberto Périgo, publicado pela editora Saraiva em 2012. Estes livros são amplamente usados no 1º ano do ensino médio pelas escolas públicas da Bahia e aprovados pelo PNLEM(2012).

No ensino médio a teoria dos conjuntos é abordada no primeiro capítulo dos livros devido a importância que tem este conteúdo para um melhor entendimento da matemática que é apresentada nos capítulos seguintes.

No âmbito da matemática os conjuntos são considerados conceitos que não tem uma definição satisfatória, devido a sua ampla configuração. Os matemáticos em geral consideram estes conceitos primitivos, que devem ser compreendidos e aceitos sem definição. Nos conjuntos,

elementos e pertinência também são considerados entes primitivos e por isso, devem ser entendidos e aceitos sem uma definição mais rigorosa.

Entretanto, os conjuntos são entendidos e concebidos pela razão como uma coleção de elementos de mesma natureza, agrupados por meios de propriedades, normas ou características comuns, sejam formados por elementos matemáticos como números ou elementos de qualquer área do conhecimento, como pessoas ou objetos.

Nos livros pesquisados, tais observações acima são constatadas com algumas variações na apresentação dos conceitos de conjunto e pertinência. No livro A os conjuntos são apresentados como uma coleção de elementos com características comuns. Acrescenta que a ideia de conjunto é fundamental e está presente em diversos conceitos matemáticos. No livro B o autor apresenta que a noção básica de conjunto não é definida, ou seja, é aceita intuitivamente e, por isso, chamada de noção primitiva.

Nos dois exemplares o tópico de pertinência considera que se um elemento compõe um conjunto, então esse elemento pertence ao conjunto. Os subconjuntos são apresentados com exemplos numéricos. Porém quando vão apresentar a propriedade da inclusão, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, são feitas algumas considerações sobre a ideia da demonstração por absurdo, entretanto esta não é apresentada formalmente.

▪ $\emptyset \subset A$

O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Essa relação pode ser justificada por redução ao absurdo, ou seja, supondo que $\emptyset \not\subset A$ e obtendo uma contradição na conclusão. Nesse caso, existiria um elemento x pertencente a \emptyset e não pertencente a A . Contudo, isso é um absurdo, pois por definição o conjunto \emptyset não possui elementos. Dessa forma, $\emptyset \subset A$.

Figura 1: Argumentação da prova de $\{ \} \subset A$

Fonte: Livro A

Na argumentação apresentada os autores levam a uma forma de entender a propriedade, entretanto deveriam propor que a negação da proposição é verdadeira, ou seja, que existe um conjunto A no qual o conjunto vazio não está contido e com isso mostrar que a veracidade da negação implica que a negação é falsa e a afirmação verdadeira $\{ \} \subset A; \forall A$.

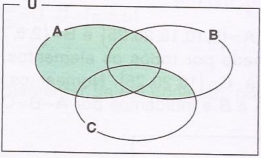
Quanto a propriedade transitividade, os dois livros apresentam a justificativa por meio de diagramas, sem uma construção fundamentada na linguagem lógico-matemática.

Nas operações, compreendendo a união e a interseção são apresentadas as definições fundamentadas em diagramas de Venn e nos dois exemplares fazem a referência a **ou** como união e **e** como interseção, através da analogia com a lógica matemática.

Propriedades da união e da interseção de conjuntos

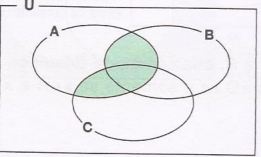
Em relação à união e à interseção de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades. Para isso, consideramos os conjuntos A , B e C .

- Distributiva da união em relação à interseção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$


« A parte destacada corresponde à $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- Distributiva da interseção em relação à união

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$


« A parte destacada corresponde à $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Figura2: Propriedade da união e interseção de conjuntos

Fonte: Livro A

Apenas no exemplar B, o autor faz uma consideração da relação que tem os conectivos lógicos “e” \wedge e “ou” \vee com interseção e união respectivamente. As propriedades da união e da interseção, no livro B são apenas apresentadas e, no livro A as propriedades são apresentadas por meio da visualização através de diagramas de Venn, o que contribui para um maior entendimento por parte dos alunos.

Neste livro, o A, as leis do lógico De Morgan são apresentadas, mas não com uma demonstração fundamentada por meio do formalismo matemático.

Nos problemas inerentes a numero de elementos de conjuntos finitos, o livro B apresenta a construção de uma demonstração formal para o número de elementos de uma união de dois conjuntos finitos.

Observações

- O conectivo **ou**, que na definição é colocado entre as duas sentenças ($x \in A$ ou $x \in B$), indica que pelo menos uma delas deve ser obedecida. Ele pode ser substituído pelo símbolo \vee .
- Quaisquer que sejam os conjuntos A e B , temos: $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$.
- Se $A \cup B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$, e reciprocamente.
- Pelo diagrama ao lado, vê-se que:
 $A = X \cup (A \cap B)$ e $A \cup B = X \cup B$
 Como $X \cap (A \cap B) = \emptyset$, então temos:
 $n(A) = n(X) + n(A \cap B)$ ①
 Como $X \cap B = \emptyset$, então temos:
 $n(A \cup B) = n(X) + n(B)$ ②
 Assim, de ① vem: $n(X) = n(A) - n(A \cap B)$, que, substituído em ②, resulta em:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Em particular, se A e B são disjuntos, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

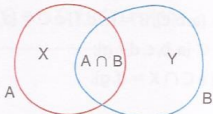


Figura.3: Prova da numero de elementos da união de dois conjuntos

Fonte: Livro B

Ao utilizar o diagrama de Venn como apoio visual, facilita no entendimento da construção da demonstração de tal fórmula.

No livro B, a linguagem apresentada nos tópicos do conteúdo tem uma preocupação maior com o rigor lógico na escrita e tal fato contribui para promover abordagens na sala de aula mais fundamentada na linguagem lógico matemática.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) a ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da matemática são necessários ao aluno do ensino médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em matemática.

E importante levar em consideração que quando um livro didático não apresenta a matemática a partir dos princípios que regem a sua estrutura ou seja, promover o entendimento da matemática formalizada a partir das provas e demonstrações, além de resolução de problemas contextualizados, poderá no máximo usar as fórmulas para resolver as questões inerentes a cada assunto, que acarreta em promover uma visão acrítica acerca dos princípios matemáticos, que consistem em conceitos abstratos cuja validade e entendimento estão restritos a uma prova fundamentada em termos lógicos.

CONCLUSÃO

Os livros didáticos de matemática do ensino médio são estruturados a partir de saberes derivados do conhecimento disciplinar, curricular, profissional e das relações desses saberes com as outras áreas do conhecimento. Entretanto, nos tópicos de matemática não se pode perder de vista as demonstrações que bem caracteriza um bom ensino de matemática, além dos problemas contextualizados.

Os livros analisados apresentam uma sequência coerente na apresentação do conteúdo conjuntos embora não apresenta situações que despertem a curiosidade do aluno ou o leve a refletir sobre o que vai se estudar como a importância para a matemática ou outra área do conhecimento e apresenta os conceitos numa abordagem tradicional.

Apresentam algumas discussões que contribuem para o entendimento da matemática formalizada, mas precisam apresentar os tópicos que caracterizam o assunto conjunto com mais fundamentação nos aspectos matemáticos, inclusive mais demonstrações nas propriedades como um meio de levar a um melhor entendimento da matemática para este nível de ensino.

É importante pontuar que a linguagem que fundamenta os estudos dos conjuntos domina os campos da matemática e é indispensável à compreensão de uma matemática mais sofisticada, estudada nos meios científicos e educacionais. Cabe ao livro didático disponibilizar o desenvolvimento teórico adequado ao nível de ensino mediante a apresentação das propriedades com as respectivas justificativas e demonstrações. Portanto não se limitando ao modelo de solução de determinados problemas.

Além disso, as orientações vigentes que norteiam o ensino de matemática e os livros didáticos enfatizam que este ensino precisa de um caráter científico e para isto, a sistematização das propriedades matemáticas é fundamental para se colocar o ensino numa base consistente e, o livro didático é uma ferramenta essencial ao professor para atingir esta finalidade.

BIBLIOGRAFIA

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. - **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio**.

Catálogo do Programa Nacional do Ensino Médio. Brasília: MEC/ SEB/ PNLEM, 2012

D'AMBROSIO, Ubiratan. Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. **Atos de pesquisa em Educação**. PPGE/ME – FURB. Vol.1. No1. jan/abr de 2006. pp. 75-85.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

GARNICA. A.V. **As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio - Boletim de Educação Matemática- BOLEMA, ano 15, no. 18, 2002,UNESP SP.**

IEZZI, G. etall. **Matemática Ciência e Aplicação – Vol 1 – Ensino Médio**, São Paulo –SP. Saraiva, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática(SBM).Col. do Professor de Matemática – 1999 IMPA, R.J.

PIETROPAOLO. R.C. (2005) **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 249f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática** volume 1, Ensino Médio, São Paulo – SP. Ed FTD, 2012.

QUEIROZ, J. C. S **OS LOGARITMOS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA : análise da abordagem na perspectiva da educação matemática – XI Encontro Nacional de Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas – ENEM – 2013 – Curitiba - PR**
http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3563_1966_ID.pdf

