DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES UTILIZANDO O *WINPLOT*.

Hyasmin Dállia de Paiva Texeira

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

hyasmin06@gmail.com

Lenaldo de Castro Leitão

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

casttrolenaldo4@gmail.com

Jeneffe Vivian dos Santos Fonsêca

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

jeneffevivian@gmail.com

Profª Orientadora Ma. Tayara Crystina Pereira Benigno

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

tayara0703@gmail.com

RESUMO

O estudo de Sistemas de Equações Lineares tem sido repassado atualmente de modo exagerado, destacando a resolução algébrica de exercícios para a memorização de fórmulas e deixando de lado as suas aplicações. Gerando problemas na compreensão, pois exige do aprendiz uma abstração do seu sentido prático. Além da representação algébrica, uma das principais inquietações no ensino de matemática é a representação gráfica. A modificação de uma representação para outra é importante para a compreensão e, em geral, é de difícil entendimento. Porém, existem hoje tecnologias de informação e comunicação que disponibiliza de um leque de instrumentos que podem ser usado no ensino de matemática. Essas tecnologias estão cada vez mais sendo inseridas no contexto escolar, servindo de táticas complementares ao processo de ensino-aprendizagem que expande as possibilidades produtivas em sala de aula. É nessa perspectiva que a utilização de softwares no ensino da matemática é algo que pode ser tomado como parte da atual sociedade do conhecimento. Diante disso, escolhemos o software educativo de plotagens de gráficos *winplot*, e desenvolvemos uma pesquisa partindo do pressuposto de que este software contribui para a compreensão do nosso objeto de estudo, os Sistemas de Equações Lineares. No entanto, surgiu à problemática de como a representação gráfica dos sistemas por meio do *winplot*, pode contribuir para a compreensão, resolução e discussão desses sistemas? Em consequência, objetivamos nossa pesquisa em discutir e analisar do ponto de vista geométrico a contribuição do software *winplot* no estudo de Sistemas de Equações Lineares. Faremos isso, definindo inicialmente o conceito de Sistemas de Equações Lineares, enfatizando suas possíveis soluções bem como eles podem ser classificados. Em seguida, apresentamos o *winplot* que exploraremos em nossa pesquisa, de modo sucinto. Por fim, iremos resolver algumas atividades envolvendo sistemas de equações lineares discutindo a partir da sua representação gráfica, com o intuito de expor a contribuição do software para a compreensão das mesmas.

Palavras-chave: Tecnologias de Informação e Comunicação, Sistemas de Equações Lineares; Software.

1. INTRODUÇÃO

O professor de matemática, muitas vezes, é questionado quanto à importância e aplicabilidade do conteúdo estudado para a vida do educando. Perguntas essas que nem sempre são respondidas e com isso, faz com que o aluno se torne avesso à matéria, dificultando todo o seu desenvolvimento escolar. Educadores mais preparados, com uma abordagem mais contemporânea, que procuram diversificar suas técnicas de ensino, fazendo uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), tendem a aproximar-se dos aprendizes e compreender seus receios e potencialidades a serem trabalhadas.

> As dificuldades encontradas pelos estudantes quanto à aprendizagem da Matemática não são motivadas exclusivamente pelas características da disciplina. Essas dificuldades são reflexos, também, da capacitação deficitária dos professores, da busca inadequada de novos recursos pedagógicos e da falta de contextualização. A busca de solução para essa problemática passa, necessariamente, por uma renovação da escola. É preciso que essa escola se torne um espaço motivante de trabalho e de crescimento pessoal e social. Para isso é necessário uma mudança nos mais diversos níveis, incluindo as práticas pedagógicas, o currículo, o sistema educativo e a própria sociedade em geral. (SILVA, 2005, p.10)

Em discursão da renovação da escola, é imprescindível ignorar o progresso das TICs na educação. Um aparato tecnológico, como os softwares educativos exercem bem o objetivo de oferecer aos alunos uma visão mais ampla e prática de alguns conteúdos, dando mais sentido ao que se ensina e ao que se aprende.

Esta pesquisa se caracteriza como exploratória, por se enquadrar nos aspectos observados por GIL (2002, p. 41), têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que esta pesquisa tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.

O planejamento da pesquisa em sua dimensão mais ampla, ou seja, o delineamento é bibliográfico que para GIL (2002, p.44) "é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos". A partir desta teoria, fizemos nossa pesquisa baseado no objeto de estudo os Sistemas de Equações Lineares. Com base na análise de textos, e no despertar da curiosidade sobre os benefícios que este software pode trazer na compreensão do objeto de estudo em sala de aula. O método de análise usado é o dedutivo que segundo PRESTES (2002), pressupõe a realização ou combinação de ideias em sentido interpretativo, no qual o raciocínio caminha do sentido geral para o particular.

Para GIL (2002), o uso da abordagem qualitativa propicia o aprofundamento da investigação das questões relacionadas ao fenômeno em estudo e das suas relações, mediante a máxima valorização do contato direto com a situação estudada, buscando-se o que era comum, mas permanecendo, entretanto, aberta para perceber a individualidade e os significados múltiplos. Por meio de levantamentos de materiais e abordagens estudadas e trabalhadas por outros estudiosos, buscamos assimilar seu conceito e explorar aspectos já publicados. Diante disso, surgiu a problematização “Como a representação gráfica dos Sistemas de Equações Lineares, a partir do *winplot*, pode contribuir para a compreensão, resolução e discussão desses sistemas?”. Fizemos o direcionamento da nossa pesquisa, voltada ao objetivo geral que é: Discutir e analisar a contribuição do software *winplot* no estudo de Sistemas de Equações Lineares, representando graficamente os sistemas de equações lineares e por fim, discutir a partir da representação geométrica as possíveis soluções dos sistemas.

Pretende-se fazer a utilização do software *Winplot* para explorar as representações gráficas dos sistemas de equações lineares possibilitando a solução e discussão gráfica. A fim de discutir os sistemas de equações lineares pela forma que serão representados. Apresentamos atividades, e as respondemos quanto sua solução e classificação fazendo uma discussão a partir da sua representação geométrica.

2. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Segundo PAIVA (2013), chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ toda equação que pode ser apresentada na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são constantes reais chamadas de coeficientes da equação e b é uma constante real chamada de termo independente da equação. A solução dessa equação é toda n-upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots, \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Um sistema linear de m equações e n incógnitas, com $m \geq 1$ e $n \geq 1$, é um conjunto de equações simultâneas na forma:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Em que:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes das incógnitas, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$;
- b_i são os termos independentes das equações, com $1 \le i \le m$.

2.1 SOLUÇÕES DOS SISTEMAS LINEARES

Chama-se solução de um sistema linear qualquer solução comum a todas as equações do sistema. O conjunto *S* formado por todas as soluções de um sistema linear é chamado de conjunto solução do sistema. A quantidade de elementos desse conjunto determina a forma com que o próprio sistema é classificado.

IEZZI, Gelson (2004) define como a sequência ou ênupla ordenada de reais (α_1, α_2, α_3 ..., α_n) é solução de um sistema linear *S*, se for solução de todas as equações de *S*, isto é:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots & \cdots & \dots\dots & \cdots & \dots\dots & \cdots & \cdots & \cdots & \dots\dots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Todas as sentenças acima são verdadeiras.

2.1.1 Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que tem: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

- Sistema Possível e Determinado (SPD): admite uma única sequência ordenada como solução.
- Sistema Possível e Indeterminado (SPI): admite mais de uma n-upla como solução.
- Sistema Impossível (SI): Não admite solução.

3. O SOFTWARE *WINPLOT*

O Winplot é um software de plotagem de gráficos que é disponibilizado em vários sites da internet gratuitamente e mostra ter bastante popularidade no mundo acadêmico, a ponderar pelo número crescente de trabalhos que vêm sendo produzidos e apresentados nos eventos que têm como foco a educação matemática. Sem uma busca apurada do que leva realmente a essa crescente popularidade não se pode ao certo apontar os fatores que causam isso, até por não ser esse o objetivo deste trabalho.

O Winplot é um software que foi produzido em 1985, pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy. Nessa época chamava-se “Plot” e executado no DOS, mas a partir do lançamento do ambiente operacional Windows 3.1 rebatizado de “Winplot”.

Esse software gráfico permite o traçado e animação de gráficos em 2D e em 3D, através de diversos tipos de equações (explícitas, implícitas, paramétricas e outras). O programa traz inúmeros recursos que facilitam a compreensão do que se está sendo ensinado, como por exemplo: o zoom; disponibilizam recursos de formatação como tamanho da fonte, espessura da linha e cor, instrumentos que permitem encontrar os zeros das funções, traçar diversos gráficos num mesmo sistema de eixo cartesiano e também um recurso chamado adivinhar, com o objetivo de reforçar o que o aluno aprendeu, no qual o mesmo deve descobrir a partir do gráfico qual é a função correspondente. Ele permite visualizar graficamente a solução de um sistema linear e também a determinação dos pontos de intersecção.

Esse software é freeware[1], sendo disponibilizado em várias páginas da web, sendo uns dos mais populares softwares educativos no Brasil. Além da versão em inglês ele pode ser encontrado em outros seis idiomas.

4. DISCUSSÃO E RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Vamos agora, resolver algumas atividades, discutindo a partir da representação gráfica dos sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas e três equações e três incógnitas, mostrando a contribuição do software para a compreensão das suas soluções e assim classifica-las.

ATIVIDADE 1: Utilizando o *winplot*, discuta sua classificação quanto a solução do sistema

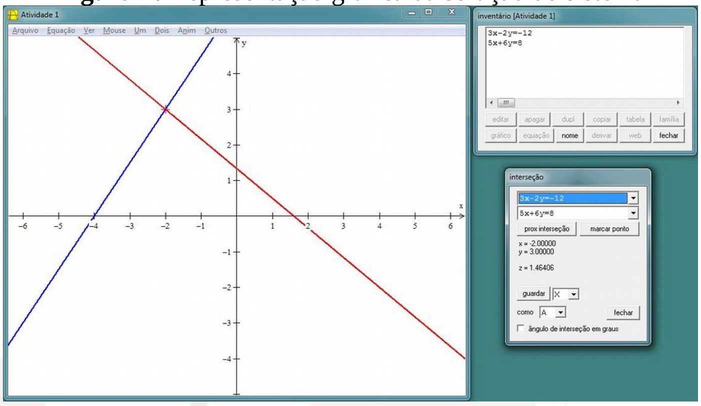
$$S_1: \begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

A representação gráfica desse sistema, é representada por duas retas concorrentes, que por definição, e pode ser observado perfeitamente na imagem, se intersectam em apenas um ponto. Esse ponto, denominado ponto de intersecção é a solução do sistema. No qual,

[1] Qualquer programa de computador cuja utilização não implica no pagamento de licenças.

podemos representa-lo através do *winplot*, clicando na opção dois e, em seguida, intersecção. Como mostra a Figura 1.

Figura 1: Representação gráfica da solução do sistema

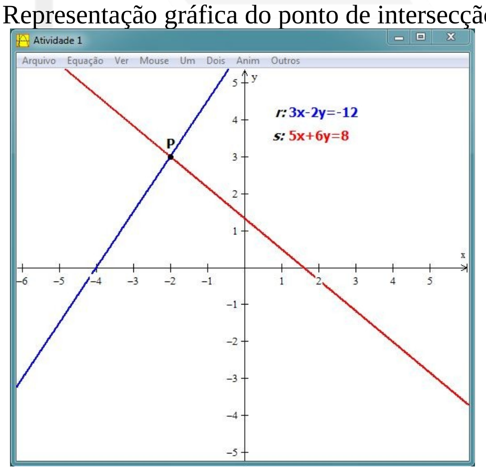


Fonte: Autor

Na caixa de ferramentas de intersecção, pode-se observar a determinação dos valores de $x = -2$ e $y = 3$. Logo, $r \cap s = P(x,\ y)$. Assim, temos que a solução do sistema é dada pelo conjunto $S = \{(-2, 3)\}$.

A classificação dos sistemas lineares é dado de acordo com o número de suas soluções. Mas, não deixemos de observar que a partir dessa representação gráfica da Figura 1, podemos determinar sua classificação, tendo em vista as posições relativas das retas determinadas pelas equações do sistema linear. Portanto, S_1 é classificado como Sistema Possível e Determinado (SPD).

Figura 2: Representação gráfica do ponto de intersecção das retas



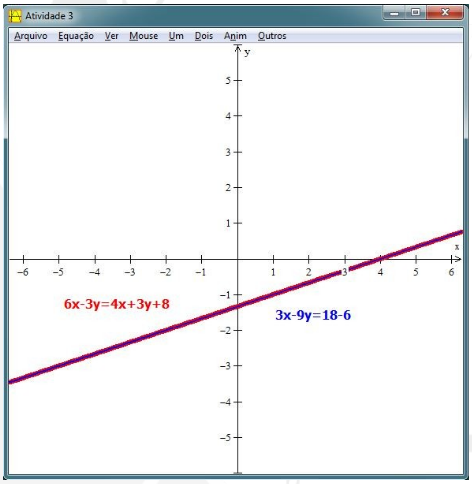
Fonte: Autor

ATIVIDADE 2: Explique como são atribuídas as soluções do sistema

$$S_3:\begin{cases} 6x - 3y = 4x + 3y + 8 \\ 3x - 9y = 18 - 6 \end{cases}$$

Note que S_3 não está organizado. Há termos semelhantes que não foram resolvidos de acordo com o padrão. Mas isso não se torna um empecilho na resolução gráfica, não precisamos organizar as equações para que elas possam ser plotadas. Basta digitar a equação exatamente igual à forma que foi dada, como podemos observar na Figura 3.

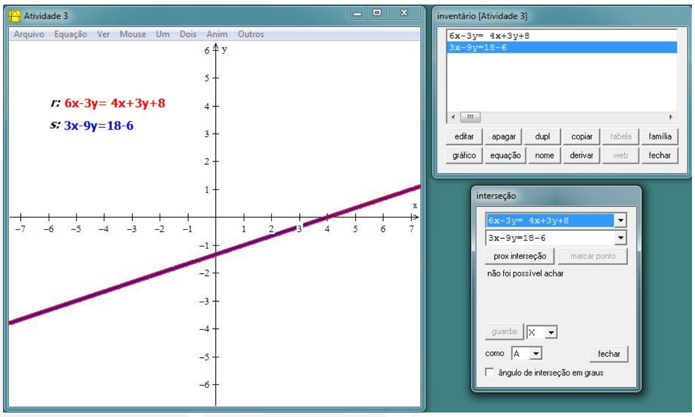
Figura 1: Representação gráfica de S_3



Fonte: Autor

Neste caso, aumentamos consideravelmente a espessura da reta representada pela equação $6x - 3y = 4x + 3y + 8$ em relação a espessura da reta representada pela equação $3x - 9y = 18 - 6$, contribuindo a favor de uma compreensão nítida da representação gráfica da solução do sistema que é dado por duas retas, r e s, coincidentes. Isto é, possuem infinitos pontos em comum. Esses pontos, ou soluções são do tipo $(3y + 4, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, chamando atenção que a incógnita y passa a ser chamada de variável arbitrária. Logo, $S = \{(3y + 4, y) | \; y \in \mathbb{R}\}$ e S_3 é classificado como Sistema Possível e Indeterminado (SPI). Consequentemente, também não podem ser encontrados no *winplot*, como podemos verificar na Figura 4.

Figura 2: $r \cap s = r = s \Rightarrow$ Sistema Possível e Indeterminado



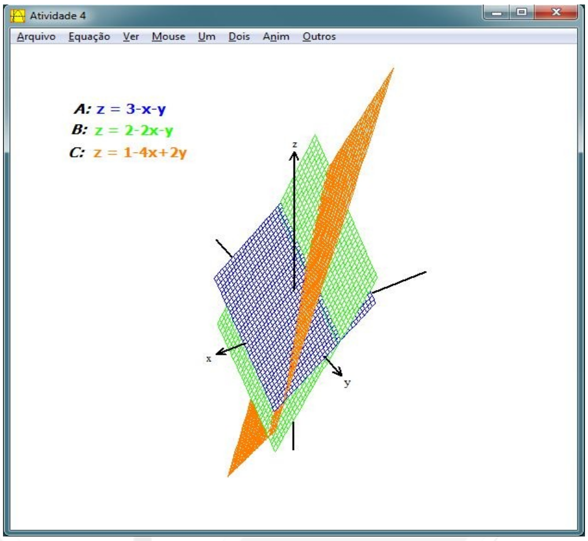
Fonte: Autor

ATIVIDADE 3: Usando o *winplot* discuta a classificação do sistema a partir da posição relativa dos seus planos

$$S_4: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 4x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

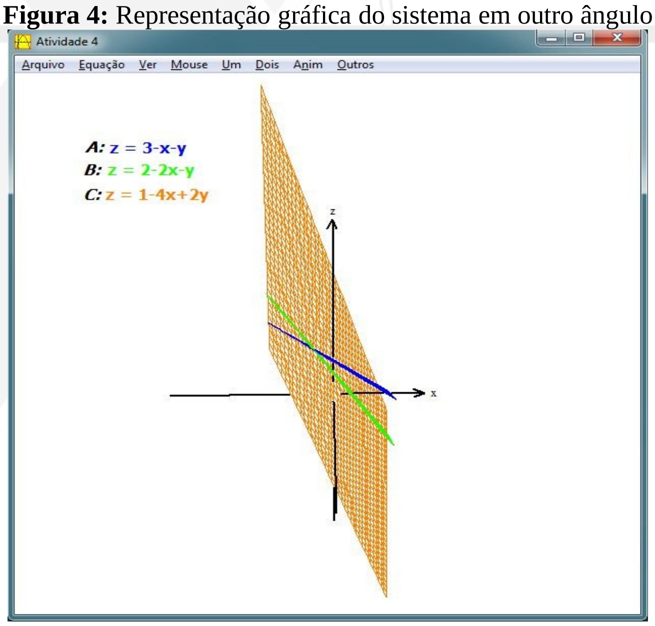
O gráfico determinado por esse sistema é indicado na Figura 5. Nela podemos identificar nitidamente três planos, A, B e C representados no espaço. Na Figura 6, o mesmo sistema linear visto em outro ângulo, nos proporciona uma visualização clara de que se trata de três planos que se intersectam em um único ponto.

Figura 3: Representação gráfica do S_4



Fonte: Autor

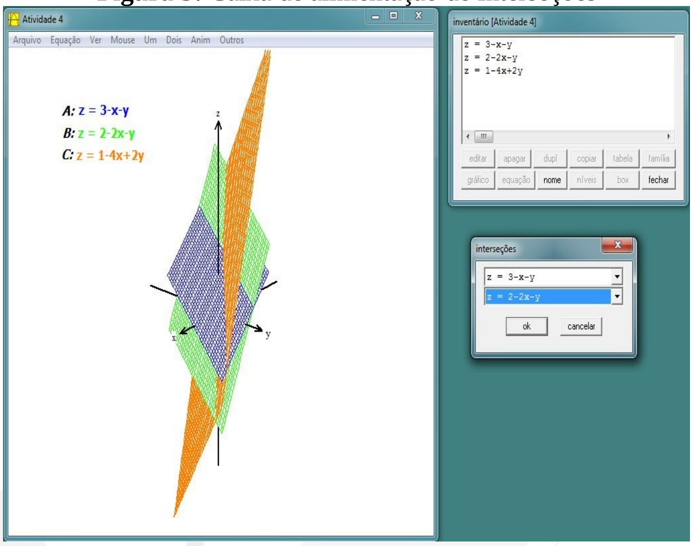
Figura 4: Representação gráfica do sistema em outro ângulo



Fonte: Autor

Na ferramenta intersecção, o software nos oferece uma melhor visualização gráfica para não termos dúvida de que esse sistema tem como intersecção um único ponto. Obtemos isso na opção dois, em seguida, intersecção e por fim clicando em superfície-superfície. Logo, surgirão as ferramentas indicadas na Figura 7.

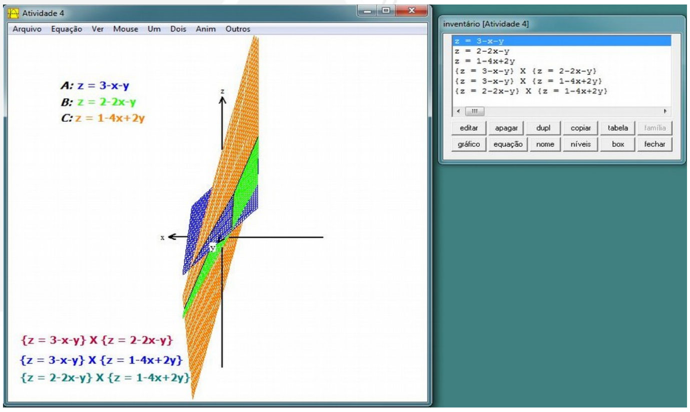
Figura 5: Caixa de alimentação de Interseções



Fonte: Autor

Note que na caixa de alimentação da intersecção, estão selecionados apenas dois dos três planos plotados, que são eles, o plano A e o plano B. Então, é preciso repetir o procedimento de inserção dos planos de modo que entejam agrupados dois a dois. É válido saber, que estas interseções são representadas por retas na cor preta, em uma espessura tamanho 1. Que está representado na Figura 8 é só observar com mais atenção.

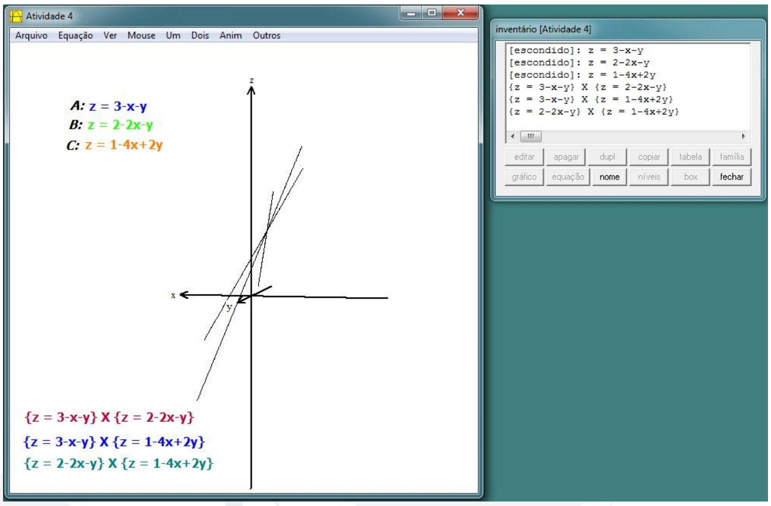
Figura 6: Representação gráfica das interseções de S_4



Fonte: Autor

Podemos ainda, esconder os planos A, B e C, deixando expostos apenas suas interseções, e o ponto onde se cruzam. Como podem observar na Figura 9.

Figura 7: As retas das interseções dos planos A, B e C cruzam-se em um único ponto.



Fonte: Autor

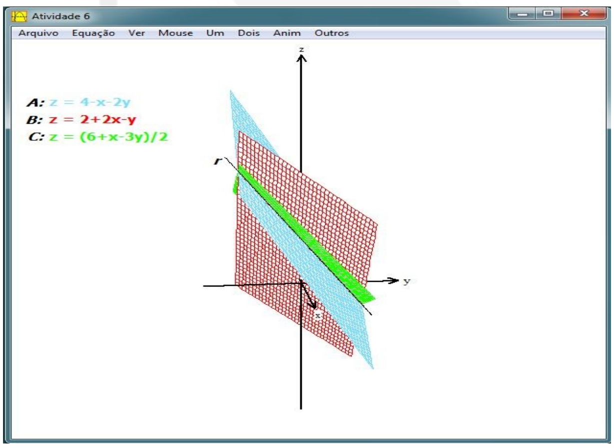
Portanto, podemos concluir graficamente que S_4 é classificado como um Sistema Possível e Determinado (SPD).

ATIVIDADE 4: Plotar o gráfico do sistema abaixo e discutir sua classificação a partir da posição relativa dos seus planos.

$$S_6 = \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -2x + y + z = 2 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

A representação gráfica do sistema é dada pela Figura 10.

Figura10: Representação gráfica de S_6



Fonte: Autor

Na Figura 10, estão representados graficamente três planos distintos, A, B e C. Esses três planos têm em comum apenas uma reta, representada por r, ou seja, a intersecção desses planos é exatamente a reta r. Em modelo simbólico, temos que $A \cap B \cap C = r$. Logo, todos os pontos $P(x,y,z)$ pertencentes à reta r são soluções do sistema. Assim, as soluções do sistema são todos os pontos da forma $(\frac{t}{5}, 2 - \frac{3t}{5}, t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Há, portanto, infinitas soluções para S_6. A classificação deste sistema é Possível e Indeterminado (SPI).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscando uma compreensão de sistemas de equações lineares diferente do método algébrico que se é abordado nas escolas e que o aluno possa chegar à resolução por meio de uma conclusão gráfica, propomos neste trabalho utilizar o *software winplot*, com o intuito de responder à problemática: Como a representação gráfica dos Sistemas de Equações Lineares, a partir do *winplot*, pode contribuir para a compreensão, resolução e discussão do nosso objeto de estudo? Nas atividades abordadas representávamos e discutíamos os sistemas de equações lineares depois de termos feito um estudo conceitual dos mesmos, ficou claro que por meio de representações visuais que o *software* proporciona, conseguimos estabelecer uma relação entre o que é concreto e o que é abstrato, fazendo uma ligação entre as equações dos sistemas lineares com a geometria e os planos no espaço determinado por elas, além de mostrarem-se eficiente na possibilidade de compreensão dos seus tipos de soluções para classificá-los. Assim, representando uma alternativa eficaz para o aprendizado.

Essas representações gráficas são fundamentais para o desenvolvimento de intuições e significados matemáticos, ajudando na formulação de suposições e na procura de vias de demonstração. Podemos confirmar isso, com base nas discussões feitas no decorrer do trabalho. A partir da representação gráfica por meio do *winplot* para dar explicações e surgir perguntas sobre "o que o gráfico está a dizer" acerca das expressões algébricas apresentadas nas atividades, muda completamente a nossa tarefa, que ao invés de desenvolver seus cálculos enormes até chegar a uma solução e por fim classifica-los, escrevemos explicações de pontos-chave de gráficos até chegar à mesma solução.

Dentro dessa concepção, acreditamos que, por tudo o que foi exposto e exposto e discutido, o *software winplot* contribui significativamente no estudo de sistemas de equações lineares, mostrando-se bastante eficiente na representação gráfica, na compreensão e na discussão dos seus tipos de soluções.

6. REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar:** sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas S.a, 2002. Impresso no Brasil.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PRESTES, Maria Luci de Mesquita. **A pesquisa e a construção do conhecimento científico**: Do planejamento aos textos da escola à academia. São Paulo: Rêspel, 2002.

SILVA, Rita de Cássia. **O professor, seus saberes e suas crenças.** In: GUARNIERI, Maria Regina (Org.). **Aprendendo a ensinar: o caminho nada suave da docência.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2005.

WINPLOT. Disponível em: <http://www.gregosetroianos.mat.br/softwinplot.asp>. Acesso em 20 de julho de 2015.