



# UMA ABORDAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA VIA RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Adriano Alves da Silveira

*Secretaria de Estado da Educação e da Cultura - (SEEC/RN)*

[adriano.exatas@hotmail.com](mailto:adriano.exatas@hotmail.com)

Silvanio de Andrade

*Universidade Estadual da Paraíba - UEPB*

[silvanio@usp.br](mailto:silvanio@usp.br)

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução e Proposição de Problemas pode contribuir com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, visando ir além da resolução do problema dando foco à proposição de problemas. Para isso, trazemos um recorte do trabalho de mestrado (SILVEIRA, 2016). Diante das diferentes perspectivas do uso da metodologia resolução de problemas em sala de aula, adotamos neste trabalho a proposta de Andrade (1998, 2011) intitulada: “Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula”. A pesquisa foi empreendida segundo uma abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. A modalidade de pesquisa pode ser caracterizada como pedagógica, segundo a qual o professor é o pesquisador de sua própria sala de aula (LANKSHEAR E KNOBEL, 2008). Portanto, ao dar a oportunidade de os alunos serem escritores em sala de aula, notamos que eles ficaram felizes por estarem participando do fazer matemática. Por sua vez percebemos que os alunos tiveram facilidade em interpretar suas proposições de problemas, sendo capazes de relacionar uma ideia matemática com a sua vivência cotidiana. Com isso, de modo geral, não apresentaram dificuldades em resolver problemas que eles mesmos formularam, possibilitando assim um avanço nos diferentes tipos de agrupamentos.

**Palavras- chaves:** Ensino-aprendizagem de Matemática. Análise Combinatória. Resolução e Exploração de Problemas.

## Introdução

É consensual a relevância da Matemática para compreendermos a sociedade em que vivemos. No entanto, a nossa responsabilidade é ainda maior, enquanto professor e pesquisador ficamos preocupados com o processo ensino-aprendizagem da Matemática, diante das diversas crenças dos alunos sobre essa ciência. Com o intuito de combater a resistência na divulgação da Matemática é que devemos proporcionar um ensino que esteja cada vez mais perto da realidade dos jovens.

(83) 3322.3222

[contato@epbem.com.br](mailto:contato@epbem.com.br)

[www.epbem.com.br](http://www.epbem.com.br)



Deste modo, durante nossa formação questionávamos a respeito de como contribuir para que os alunos tenham um aprendizado com compreensão; isso me levou a pesquisar diversas formas de ensinar Matemática, que por sua vez favorecesse o bom encadeamento do ensino-aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido este trabalho teve como objetivo analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução e Proposição de Problemas pode contribuir com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Diante das diferentes perspectivas do uso da metodologia resolução de problemas em sala de aula, adotamos neste trabalho a proposta de Andrade (1998, 2011) intitulada: “Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula”.

O presente trabalho, foi desenvolvido no contexto da Resolução e Proposição de problemas, visando a ir além da resolução do problema. Aqui trazemos um recorte de nossa pesquisa, dando foco à proposição de problemas.

### **Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula**

A Análise Combinatória nos possibilita calcular os números de possibilidades de determinados acontecimentos, levando em consideração certas condições. Confirmando essa ideia, Pessoa (2009) diz que a combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um.

Uma das grandes dificuldades no estudo de Combinatória é perceber que tipo de agrupamento a questão está trabalhando, desta forma podemos destacar alguns questionamentos que estão bem presentes na sala de aula, tais como: é arranjo, combinação ou permutação? Que fórmulas utilizar?

É fato que a Combinatória apresenta dificuldade de natureza conceitual. Nesse sentido é necessário realizar um trabalho em sala de aula que valorize a compreensão dos conceitos referente a esta temática, já que o conhecimento das fórmulas garante muito pouco sobre como proceder em determinados problemas.

Além disso percebe-se que os problemas de Combinatória não mantêm o mesmo padrão em suas soluções. Assim quando estamos diante de um problema referente a esta temática, é necessário pensar, e seguida fazer anotações, com o intuito de conhecer sua natureza, e como se procede por exemplo, diante de uma enumeração sistemática.

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 126-127), as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente Matemática à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande.

Devemos ter cuidado na escolha do problema, é preciso que o mesmo possua uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, para que o aluno possa listar todos os casos possíveis. No caso de o problema possuir um grande número de agrupamentos, tornado uma atividade exaustiva para o estudante, daí vem a importância do Princípio Fundamental da Contagem e utilização das fórmulas de modo adequado. O PCN (BRASIL, 1998, p. 52), salienta a relevância dos problemas de contagem, ao afirmar:

Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

O PCN+ sugere que o trabalho em sala de aula da Análise Combinatória, pode ocorrer por meio da resolução de problemas ao afirmar que esse conteúdo devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril (BRASIL, 2002, p. 127).

### **Resolução e Proposição de problemas**

Andrade (1998) destaca que, em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início aproximadamente na década de 70. De acordo com ele, grande parte da literatura que hoje se conhece sobre a resolução de problemas foi desenvolvida a partir dos anos 70.

Além disso, o autor enfatiza a necessidade de reconhecer a relevância dos trabalhos de George Polya, que datam de 1944, onde mais tarde foi publicado o livro “How to solve it”, cuja



primeira edição data de 1945, no qual a resolução de problemas é tratada pela primeira vez como tema de interesse para professores e estudantes, nos níveis superiores.

Na década de 80, após o movimento da Matemática Moderna, aconteceram muitas mudanças curriculares. Nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática) em "Uma Agenda para a Ação" apresentou uma série de recomendações para a matemática escolar, onde "Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar para aquela década."

De acordo com Andrade (1998), esta década é considerada a idade de ouro da Resolução de Problemas. Ele destaca que o Brasil começou a trabalhar, de modo mais efetivo, sobre Resolução de Problemas.

Finalizando a década de 80, pesquisadores passaram a questionar o ensino e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Então, a resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, ou seja, como um meio de se ensinar matemática. O problema passa a ser concebido como um agente que pode desencadear um processo de construção do conhecimento. Nesse sentido, Andrade (1998) destaca que a resolução de problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problemas dos anos 90.

Nessa metodologia os problemas são importantes não somente como um meio de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Uma situação-problema é apresentada com o propósito de se construir novos conceitos e novos conteúdos e a compreendê-los. Essa compreensão da matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar. Como afirma Onuchic (1999, p. 208),

[...] esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema.

No entanto, a prática docente mais efetiva em sala de aula, visa a enfatizar a utilização de técnicas e como deve ocorrer a aplicação de um conteúdo. Conforme os PCN (BRASIL, 1998, p. 40),

A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um



problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações.

Uma das perspectivas principais da metodologia de resolução de problemas é iniciar o trabalho com um problema, a fim de construir um novo conceito e conteúdo. Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2005) salientam que o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem e os professores através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Ao trabalhar com a resolução de problemas, podemos dar ênfase à proposição de problemas que nos permitem ter uma melhor compreensão dos conteúdos que estão sendo discutido. Uma ideia que confirma sua relevância está relacionada ao fato de os alunos deixarem de ser meros expectadores para serem autores em sala de aula. De acordo com Chica (2001, p. 151),

Nesse processo, aproxima-se a língua materna e matemática, as quais se completam na produção de textos e permitem o desenvolvimento da linguagem específica o aluno deixa de ser um resolvedor para ser um propositos de problemas vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.

Nesse sentido, o aluno está diante de uma atividade que estimula sua capacidade de pensar, que tem um caráter motivador e desafiador em busca da interpretação da realidade que está sendo descrita.

Assim, o aluno propõe um problema matemático, com o objetivo de sanar sua inquietação, sua curiosidade, diante de um problema que está sempre presente em seu cotidiano.

Com isso, ao formular problemas, os alunos mostram-se capazes de identificar os conceitos matemáticos que estão à sua volta. Sendo assim, eles agirão como sujeitos em ação, no qual vão trabalhar com conteúdos matemáticos, como também o contexto social em que a situação-problema está inserida.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental indicam objetivos dos quais se espera que os alunos sejam capazes de atingir em relação à sua formação nesse nível de ensino. Confirmando a relevância da proposição de problema em sala de aula, os PCN (1998) afirmam que o aluno deve questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.



O professor tem papel relevante no trabalho com a proposição de problemas. Para Chica (2001), as primeiras propostas de formulação de problemas devem ser planejadas com muito cuidado, uma vez que os alunos demonstram dificuldades em realizar tal tarefa por estarem acostumadas a somente resolver problemas.

O papel do professor na resolução e proposição de problemas é diferente, já que, na resolução de problemas, o professor propõe problemas aos alunos, cabendo a eles resolverem, enquanto na proposição de problemas o professor deixa de ser o ponto de partida e o aluno é encorajado a problematizar situações vivenciadas, descrevendo o seu próprio roteiro, advindo dos seus conhecimentos cotidianos.

O professor vai orientar, durante todo o processo, partindo das ideias que os alunos têm, de tal forma que ele possa contribuir, com a sua criatividade, levantando hipótese, questionando, fazendo relações entre conceitos matemáticos e problemas que foram já discutidos.

É claro que deve ser feito um trabalho que possa ajudar o aluno na formulação de um problema, assim, deve-se apresentar alguns problemas que irão auxiliar na familiarização e construção de modelos que promovam experiências significativas. Nesse sentido, Chica (2001, p. 153) diz: “Os alunos devem ter contato com diferentes tipos de problemas para resolver antes de propormos que criem seus próprios problemas”.

Para Chica (2001), quando o professor faz a intervenção, os alunos conseguem se apropriar de características de um problema matemático, desde que haja espaço para questionamentos que levem à reflexão.

Portanto, quando o aluno formula um problema matemático e depois o resolve, a matemática ganha sentido e se torna uma grande aliada no entendimento de diversos fenômenos da vida real.

## **Metodologia**

Esta seção tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos utilizados no presente estudo. A pesquisa situa-se numa abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Para D’Ambrosio (2006, p. 10), a pesquisa qualitativa, também chamada pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes.



A modalidade de pesquisa pode ser caracterizada como pedagógica, segundo a qual o professor é o pesquisador de sua própria sala de aula (LANKSHEAR E KNOBEL, 2008).

Para alcançar os objetivos da pesquisa, elegemos como sujeitos do estudo, uma turma do 2ª ano do Ensino Médio da Escola Estadual do Município de Alagoinha-PB.

A nossa metodologia de ação foi estruturada em duas etapas: aplicação de uma abordagem investigativa em sala de aula da Análise Combinatória via Resolução e Proposição de Problemas, coleta e interpretação dos dados obtidos, através das observações em sala de aula e registros dos materiais utilizados pelos alunos.

## Resultados e discussão

Para facilitar o processo de proposição de problemas, iniciamos a aula sorteando uma palavra entre os grupos, e eles tiveram que propor um problema de Combinatória a partir dela. Vamos destacar o trabalho realizado pelos grupos G2, G3, G4 e G9, respectivamente formularam problemas com as seguintes palavras: **baralho; fila; senhas e meninas ou meninos.**

A palavra sorteada para o grupo G2 foi BARALHO. Os alunos solicitaram a presença do professor-pesquisador, explanando que estava com dificuldades em propor o problema, fato esse sanado com a nossa mediação, observe o diálogo:

G2: Como vamos elaborar um problema com a palavra baralho?

PP: Seria importante vocês saberem quantas cartas tem um baralho?

G2 (Aluno 1): É são de 1 a 10.

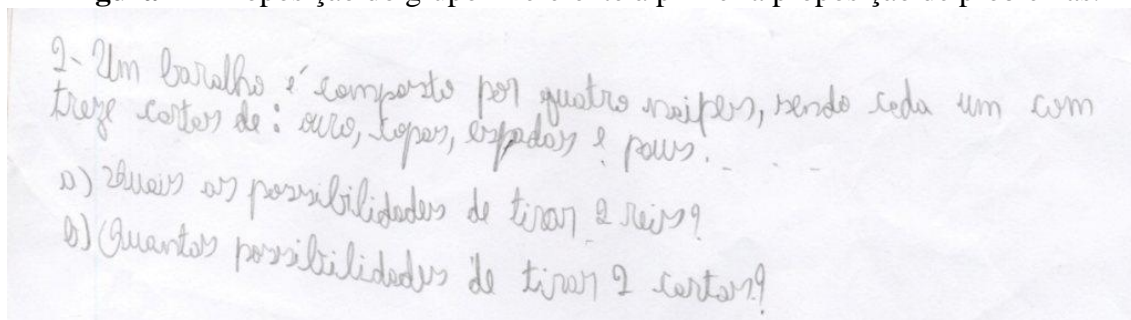
G2 (Aluno 2): Não é de 1 a 9 mais o rei, a dama, o ás e o valete, no caso 13 cartas.

PP: E quantos naipes?

G2 (Aluno 3): 4 naipes. No caso quatro vezes treze, cinquenta e duas cartas.

É claro, para nós, que o sucesso na proposição dos problemas depende também do conhecimento dos alunos em relação as palavras sorteadas, ou seja, características peculiares a elas inerentes cujos conhecimentos tornam-se imprescindíveis durante a construção das ideias que vão conduzir a formulação do problema. Deste modo, em nossa mediação, tentamos questionar os alunos de tal forma que eles pudessem construir e organizar informações que possam ajudar nesse processo. O grupo G2 formulou o seguinte problema:

**Figura 1** – Proposição do grupo 2 referente à primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que o grupo G2 também incorporou o nosso trabalho em sala de aula (Exploração de problemas), propondo um problema e uma variação dele. O item (a) trabalha com a ideia de Combinação simples. No entanto, o questionamento final para o problema foi “Quais as possibilidades” e não “Quantas possibilidades” ou até mesmo “Quais e quantas possibilidades”. Nesse sentido, para resolver o problema será necessário listar todas as possibilidades. É possível fazer isso, já que temos uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos. Para o item (b), também temos um problema de combinação simples, já que a ordem em que as cartas são retiradas não gera um novo agrupamento. No entanto, neste item, o uso da fórmula se faz importante, já que a lista de todas as possibilidades não é um caminho muito trabalhoso.

O grupo G3 ficou encarregado de propor um problema com a palavra FILA. Inicialmente, o grupo nos solicitou e apresentou um problema que ainda necessitava de algumas informações para ser caracterizada como uma atividade que precisava de solução. No entanto, a redação proposta pelo grupo não caracterizava uma construção semântica típica de um problema de Combinatória.

Na verdade, estava mais perto de um problema de Progressão Aritmética, que expressava a posição de uma pessoa em um banco. Com isso, foi necessário intervimos:

PP: A ideia está interessante, mas como vocês querem propor o questionamento final para o problema.

G3 (Aluno 1): É isso que não estamos conseguindo.

PP: Por exemplo, você pode estar em uma determinada posição na fila?

G3 (Aluno 1): Pode ser o primeiro, o segundo... No caso seria como o problema da foto?

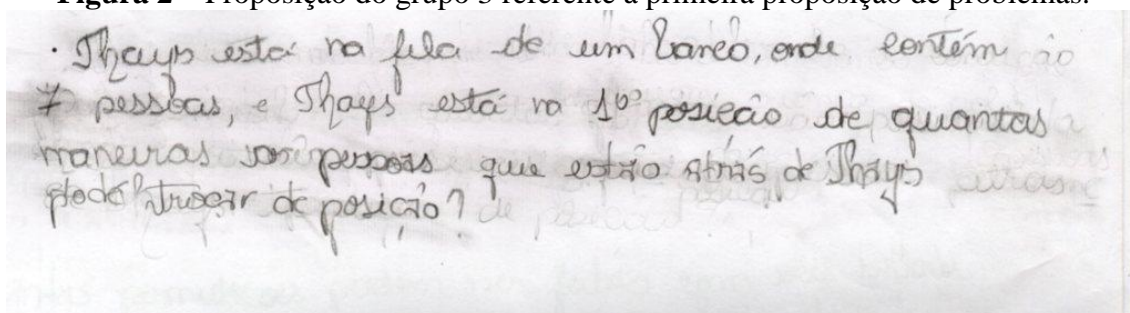
PP: Pode ser, tente fazer.



É evidente, para nós, que, para propor um problema de um determinado tópico matemático, é necessário conhecer alguns problemas e como as ideias matemáticas vão tomando forma com a exploração desses problemas.

O grupo G3 solicitou a presença do professor-pesquisador algumas vezes evidenciando o que estava fazendo, e, ao término da sua formulação, fez a leitura do problema.

**Figura 2** – Proposição do grupo 3 referente à primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

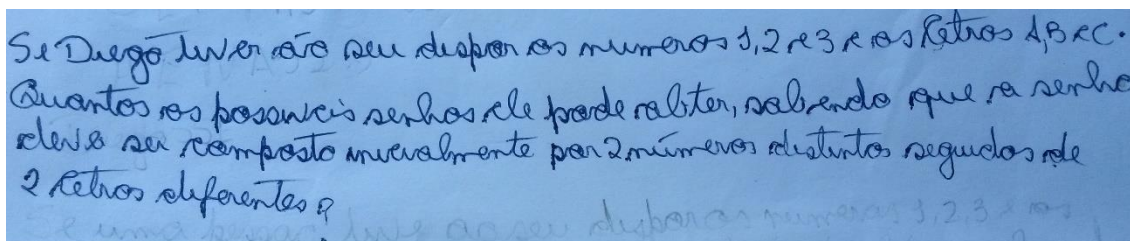
Quando pensamos na utilização dessa palavra para propor um problema, já imaginávamos que os alunos poderiam propor uma situação como esta. Deste modo, quando vimos a sua primeira proposição do problema, tentamos não negá-la, utilizando as ideias já construídas, de tal forma que conduzissem à formulação do problema. A proposta apresentada pelo grupo não é muito diferente de alguns problemas de permutação simples que encontramos em livros didáticos, no entanto, a originalidade está na imaginação e na criatividade dos alunos na proposição da atividade.

A palavra sorteada para o grupo G4 foi SENHAS. O grupo nos solicitou e conduzimos um diálogo que pudesse auxiliar na proposição do problema:

- G4: Professor pode ser quantos anagramas tem a palavra SENHAS?  
PP: Pode. Mas a palavra senha dá que ideia? Onde você utiliza senhas?  
G4 (Aluno 2): No banco.  
PP: Certo. E como essas senhas são compostas?  
G4 (Aluno 1): De número  
G4 (Aluno 3): E também de letras.  
PP: Isso. Veja no que isso pode ajudar vocês na proposição do problema  
G4: Certo, professor.

No decorrer da aula, fomos atender os outros grupos; depois, passamos para ver o trabalho realizado por G4 e constatamos que a interação professor-grupo foi de suma importância para a formulação do problema.

**Figura 3** – Proposição do grupo 4 referente à primeira proposição de problemas.

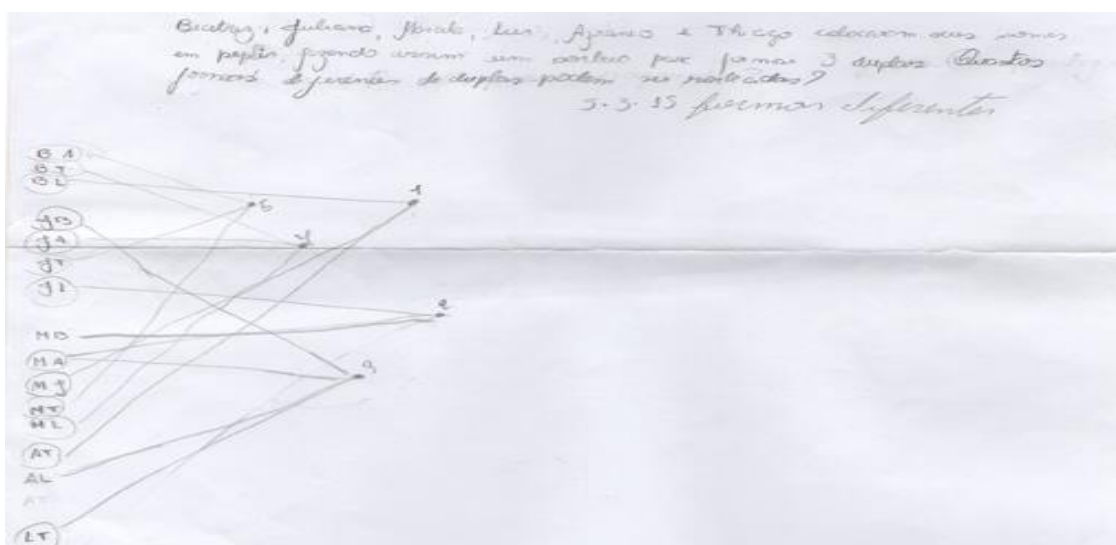


Fonte: Dados da pesquisa.

O G4 formulou um excelente problema que trabalha com o Princípio Fundamental da Contagem, como também pode ser resolvido aplicando a fórmula de arranjo simples, visto que a mudança na ordem dos números e das letras gera uma nova senha. No entanto, para resolver utilizando o conceito de arranjo, é necessário perceber que todas as possíveis senhas podem ser obtidas pelo produto dos arranjos, ou seja, escolher dois dos três números e duas das três letras para compor a senha:  $A_{3,2} \cdot A_{3,2}$ . Além disso, fazer uma lista de toda as possibilidades seria uma possível estratégia para a resolução desse problema.

O G9 foi desafiado a propor um problema com as palavras MENINAS e MENINOS. Foi, então, formulado um problema bem interessante de combinação simples, sem precisar da ajuda do Professor-pesquisador. Nota-se que as palavras MENINAS e MENINOS foi caracterizado pelo grupo por nome de pessoas. Além disso, o contexto descrito pelo G9 evidencia a criatividade do grupo na formulação do problema. É preciso ressaltar que a autonomia do grupo ficou evidenciado não só pela proposição do problema, mas também pela resolução dele.

**Figura 3**– Proposição do grupo 9 referente à primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.



Observa-se que o grupo notou que a mudança na ordem das duplas não gera uma nova dupla, tendo assim um problema de Combinação simples. Como temos um número relativamente pequeno de possibilidades, foi facilitada a descrição de todas as possíveis duplas.

## Conclusão

Percebemos que, ao dar a oportunidade de os alunos serem escritores em sala de aula, notamos que eles ficaram felizes por estarem participando do fazer matemática. Por sua vez percebemos que os alunos tiveram facilidade em interpretar suas proposições de problemas, sendo capazes de relacionar uma ideia matemática com a sua vivência cotidiana.

Com isso, de modo geral, não apresentaram dificuldades em resolver problemas que eles mesmos formularam, possibilitando assim um avanço nos diferentes tipos de agrupamentos.

Portanto, o ensino de Matemática centrado na resolução e proposição de problemas possibilitou aos alunos a oportunidade de participar efetivamente das discussões em sala de aula. A resolução e a proposição de problemas, promoveu um ambiente enriquecedor em que os alunos foram autores da Matemática em sala de aula.

## Referências

ANDRADE, Silvanio. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 1998.

\_\_\_\_\_. **Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e o uso do laboratório de ensino de matemática.** Universidade Estadual da Paraíba. Anais: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. Recife, [S.n.]:2011.

BRASIL. Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria do Ensino Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries)** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, DF: MEC, 2002.



D'AMBRÓSIO, U. Prefácio In: BORBA, M.; ARAÚJO, J.L. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001, p.151-173

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-218.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2005. p.212-231.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

SILVEIRA, A.A. **Análise Combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas**. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2016.