O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NAS RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DO COTIDIANO

Mateus Rocha de Sousa

Graduando do curso de Licenciatura da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) campus Cajazeiras, mtrochasousa@gmail.com

RESUMO

O cálculo diferencial e integral tem aplicações das derivadas tanto para esboçar gráficos quanto para calcular valores, e no decorrer dos problemas facilitam a resolução dos mesmos. Através das derivadas surge uma grande ferramenta que proporciona a resolução de situações práticas do cotidiano, chamado pelos matemáticos de otimização que se relaciona aos problemas de maximização e minimização na economia, administração e em outras ciências. Esta pesquisa tem como objetivo mostrar a grande importância do cálculo diferencial e integral, em situações vivenciadas por todos e de mostrar que o cálculo também facilita a resolução desses tipos de problemas. É através deste que se é introduzido o cálculo na economia e administração por meio de problemas de otimização, que se aplica de forma continua e diretamente e onde os formandos tem-se maior dificuldades em resolver. Dessa forma é onde as derivadas tem suas aplicações no cotidiano e que resolvem problemas de maximização e minimização aplicando para resolução de problemas na economia e administração.

Palavras-chave: cálculo, aplicações, derivadas e otimização.

INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral é um conteúdo da matemática que é visto somente em cursos superiores das áreas de exatas como por exemplo na matemática, química, física, ciências biológicas e nas engenharias. É comentado pelos educandos como a componente curricular mais difícil do curso e que muitas vezes não é conceituado a importância do mesmo na rotina das pessoas, que é de suma importância suas aplicações para a economia e administração entre outras através das aplicações das derivadas uma parte especifica do cálculo diferencial e integral mais conhecido como cálculo 1 de forma que se é apresentado aos graduandos as possíveis aplicações desses cálculos no cotidiano.

As aplicações do cálculo diferencial e integral que são mais usuais no cotidiano são as derivadas tanto para esboçar gráficos quanto para calcular valores, facilitando as resoluções dos mesmos em situações como otimizações, taxas relacionadas e análise marginal.

No decorrer deste pretende-se mostrar a magnitude abrangente das aplicações das derivadas como facilitador e mais praticidade nas resoluções casuais envolvidas no cotidiano dos educandos.

Este trabalho tem por objetivo mostrar a amplitude em que a derivada se aplica como na economia e administração com otimizações, taxas relacionadas e analise marginal.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O cálculo surgiu através de problemas com a tangente de como solucionar daí veio a derivada e depois disto com o passar do tempo foram surgindo outros problemas até que se foi criado os limites, mas foi por meio de Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) em trabalhos independentes que surgiu o cálculo diferencial. Para Newton um físico-matemático, o problema da tangente foi solucionado a partir de análise de gráficos. Mas Leibniz também foi muito importante para o cálculo diferencial trazendo o que hoje se chama de regra do produto, quociente e da potência mais conhecida como a regra do tombo, e que hoje o símbolo da derivada (dy/dx) mais usual foi criado pelo mesmo. E que também foi o primeiro a publicar um trabalho sobre cálculo.

A derivada é uma noção aprofundada de limite. Segundo Guidorizzi afirma que "Quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de *f* em *p* e indica-se por *f'*(*p*) (leia: *f* linha de *p*).", portanto a f linha de p é: $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

O cálculo diferencial surgiu como uma imprescindível ferramenta de minimizar as contas e fazendo com que o resultado seja mais preciso. Segundo James Stewart os problemas aplicados em nosso cotidiano estão inseridos na otimização. Este afirma que:

> [...] aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos. (STEWART, 2013, p.294)

As aplicações na administração e economia veio como um facilitador de problemas e também porque houve alguns problemas nos quais não tinham soluções na antiguidade na qual pudesse ser solucionado através do que se podia utilizar daí veio as aplicações das derivadas que para James são por meio de uma função onde o mesmo conjectura que:

> [...] se *C*(*x*), a função custo, for o custo da produção de *x* unidades de certo produto, então o custo marginal é a taxa de variação de *C* em relação a *x*. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, da função custo. Vamos considerar agora o marketing. Seja *p*(*x*) o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender *x* unidades. Então, *p* é chamada função demanda (ou função preço) e

> esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de *x*. (STEWART, 2013, p.298).

Além disto o cálculo possui outros aspectos que podem ser usados usualmente, mas que muitas das vezes em âmbito escolar os alunos não se dediquem e procurem saber a importância do mesmo.

Fez-se este trabalho para mostrar aos educandos a importância deste para o cotidiano e a vida profissional de como o mesmo pode ser usado e aplicado em praticamente tudo. Foi feito uma pesquisa bibliográfica em livros de cálculo tentando apresentar maneiras distintas de ver este conteúdo que é apresentado de forma brusca e praticamente não é destacado de maneira correta a importância do mesmo tanto para a matemática quanto na rotina vivenciada diariamente por todos.

Segundo Marcolino a derivada tem um papel fundamental em todos os ramos da ciência e que também se proporciona a resolver problemas de taxas de variação o mesmo afirma.

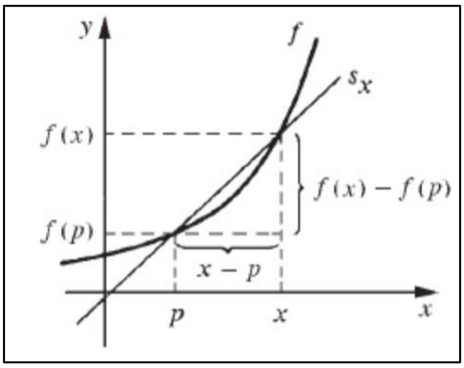
> [...] o cálculo de derivadas que tem importância especial em virtude das inúmeras aplicações em vários campos das ciências, tais como: problemas da física, biologia, química, modelagem matemática, arquitetura, geologia, engenharia e economia.
>
> O estudo da derivada apresenta diversas aplicações práticas, ela é constantemente aplicada em muitos problemas que envolvem o dia-a-dia do ser humano, possibilitando até mesmo resolver situações que envolvam taxas de variação. (Disponível em: <http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf>. Acesso em: 22 de março de 2018).

É através deste que se é introduzido o cálculo na economia e administração por meio de problemas de otimização, onde se aplica de forma continua e diretamente e os formandos tem-se maior dificuldades em resolver, sendo que este proporciona como pode ser algo em que se pode ver com mais facilidade e possa entender as aplicações de forma diferenciadas, já que para cada problema a ser resolvido se tem um novo raciocínio e também uma nova maneira de solucionar, se obtém este estilo de resolução por meio de experiencias e de várias resoluções com este tipo de problemas que o cálculo nos proporciona.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O problema de determinar a reta tangente e a velocidade de um objeto envolvem um tipo de limite onde este é chamado de derivada. Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. Queremos determinar uma reta tangente no ponto (p, f(p)). Fica fácil de determinar a reta se soubermos o seu coeficiente angular, mas se não souber. Seja Sx uma reta que passa por (p, f(p)) e (x, f(x)), como mostra a figura 1.

Figura 1: Representação geométrica da reta tangente em p

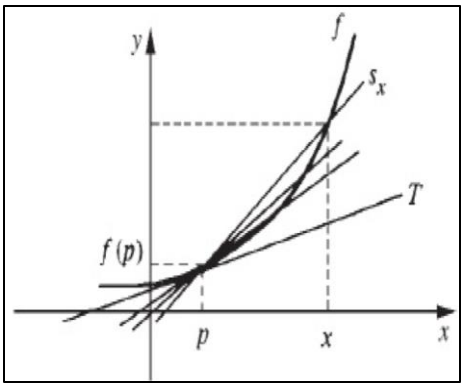


Fonte: Guidorizzi, 2013, p.245

O coeficiente angular da reta S_x é dado por $S_x = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Quando o x tende a p o coeficiente angular de S_x tende f´(p). Que é chamado de derivada da função no ponto p, é dado em forma de limite, f´(p)= $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

Observe que f´(p):{leia f linha de p} é apenas uma notação e a medida que x vai tendendo a p, o coeficiente angular da reta Sx se aproxima da reta tangente no ponto (p, f(p)) que possui o coeficiente angular igual a sua derivada f´(p) de equação do tipo: y – f(p) = f´(p)(x-p), sendo T a reta de coeficiente angular igual a f´(p). Como mostra a figura 2.

Figura 2: Representação geometrica da Derivada



Fonte: Guidorizzi, 2013, p.246

Então a derivada é definida como o coeficiente angular da reta tangente naquele ponto. Diz-se que uma função é diferenciável se a função for derivável em todo o seu domínio.

Para facilitar, mas nos cálculos das derivadas existem regras de derivação como por exemplo a regra do produto, do quociente, do tombo que é a regra da potência que foram descobertas pelo grande matemático Leibniz. Também existem algumas regras de derivação para funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas. Um caso especial de funções derivadas é a função exponencial com o número de euller e o logaritmo natural para essas as derivadas são respectivamente $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, (exponencial com número de Euller, $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$. Abaixo mostra-se um quadro com algumas derivadas, onde:

- k e a são constantes
- u, v e w são funções deriváveis num mesmo ponto x.

Conforme o quadro 1.

Quadro 1 - Algumas derivadas básicas

Algumas fórmulas de Derivadas			
f(x)	f´(x)	f(x)	f´(x)
k	0	$\log_a x$	$\frac{1}{x.lna}$
x^n	n.x^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$k.u$	$k.u´$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$u \pm v$	$u´ \pm v´$	$\sin x$	$\cos x$
$u.v$	$u´.v + u.v´$	$\cos x$	$-\sin x$
$u.v.w$	$u´.v.w + u.v´.w + u.v.w´$	$\tan x$	$(\sec x)^2$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u´.v - u.v´}{v^2}$	$\cot x$	$-(\csc x)^2$
a^x	$a^x.lna$	$\sec x$	$\sec x\ .\tan x$
e^x	e^x	$\csc x$	$-\csc x\ .\cot x$

Fonte: Aref Antar, José Luiz. Nilton Lapa. Sidney Luiz (1985, p. 214)

Apesar de ter todas essas regras para as derivadas ainda tem a questão da derivada de funções compostas onde lhe é apresentado a regra da cadeia, derivação implícita e as derivadas trigonométricas inversas. A regra da cadeia é importante para as derivações de funções compostas, considerando uma função G dada por $u = G(x)$ e uma função F dada por $y = F(u)$.

Supondo que exista a composta de $F \ e \ G$, indicada por f, isto é, $f(x) = (f°G)(x)$, derivável em x e $f´$ é dado pelo produto como na equação I.

$$f´(x) = F´(u).G´(u). \ (I).$$

Até o exato momento foi apresentado apenas funções explicitadas, mas caso se tenha funções na qual não é explicita como no caso[$y.x^2 + y = x - 1$ (II)]. Como se obter a derivada? Uma das coisas que pode ser feito é tentar encontrar a forma explicita e depois aplicar as regras de derivações já conhecidas, mas pode ocorrer ao fazer isso seja muito trabalhoso, ao invés de passar da forma implícita para explicita, é melhor fazer o processo de derivação implícita, que pode ser resolvido derivando os dois membros em relação a uma variável de destaque. Para o caso da equação (II), derivamos em relação a x, sendo assim temos:

$$\frac{d}{dx}(y.x^2 + y) = \frac{d}{dx}(x - 1) \ \rightarrow y´.x^2 + y.2x + y´ = 1 \rightarrow y´ = \frac{1-2xy}{1+x^2} \ .$$

Agora apresenta-se um quadro com as derivadas das funções inversas trigonométricas

Quadro 2: Derivadas das funções inversas

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas			
$f(x)$	$f´(x)$	$f(x)$	$f´(x)$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\csc^{-1} x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Fonte: Próprio autor (2018) adaptado de (Aref Antar, José Luiz. Nilton Lapa. Sidney Luiz)

Então a derivada pode ser interpretada como a taxa de variação da variável dependente em relação a variável independente. Algumas das aplicações da mais importantes do cálculo são dos problemas de otimização e para isto precisa saber primeiramente as regras de derivações e aplicações de máximos e mínimos. E alguns teoremas que vai ser apresentados a seguir.

Os teoremas existem vários sendo alguns dele no quadro 3:

Quadro 3: Alguns teoremas do cálculo

Teoremas

Weirstrass	Se f é uma função contínua num intervalo fechado [a, b], então f tem ponto de máximo e ponto de mínimo nesse intervalo.
Fermat	Seja f uma função derivável no ponto x_0 e definida em uma vizinhança de x_0 . Se x_0 é ponto máximo (ou mínimo) relativo, então $f'(x_0) = 0$.
Rolle	Consideremos uma função f, contínua em [a, b] e derivável em (a; b). Se $f(a) = f(b)$, existe pelo menos um ponto x_0 em (a; b) tal que $f'(x_0) = 0$.
Valor Médio (TVM)	Se a função é continua em [a; b] e derivável em (a; b), existe pelo menos um número $x_0 \in$ (a; b), tal que $$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Fonte: Próprio autor (2018) adaptado de (Aref Antar, José Luiz. Nilton Lapa. Sidney Luiz)

Para os pontos de máximos e mínimos decorrem da seguinte maneira, considere que a função $f(x)$ está definida no intervalo [a, b], e que é diferenciável no intervalo (a, b), logo tem-se:

Se $f'(x) > 0$ para todo x ∈ (a; b), então f é crescente em (a; b);

Se $f'(x) < 0$ para todo x ∈ (a; b), então f é decrescente em (a; b).

Os métodos de problemas de otimização, tem aplicações práticas em muitas situações do dia-a-dia. Otimizar significa maximizar ou minimizar alguns de seus aspectos. O cálculo diferencial é uma ferramenta na qual se dispõe em resolver estes tipos de problemas.

A maior dificuldade encontrado nas resoluções deste tipo de problema não é saber o conteúdo mais de entender o que se quer detalhar do problema a ser solucionado. Segundo James Stewart (2013, p.294) tem-se um roteiro de como solucionar o mesmo afirma que:

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?

2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.

3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos (a, b, c, . . . , x, y) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo.

4. Expresse *Q* em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.

5. Se *Q* for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de *Q*. Assim, *Q* será expresso como uma função de *uma* variável *x*, digamos, *Q* _ *f* (*x*). Escreva o domínio dessa função.

Agora para resolver este tipo de problemas relembre-se que se *C*(*x*), a função custo, for o custo da produção de *x* unidades de certo produto, então o custo marginal é a taxa de variação de *C* em relação a *x*. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função custo. Considere agora o marketing. Seja *p*(*x*) o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender *x* unidades. Então, *p* é chamada função demanda (ou função preço) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de *x*. Se *x* unidades forem vendidas e o

preço por unidade for *p*(*x*), então a receita total será

$$R(x) = xp(x)$$

e é chamada função receita. A derivada da função receita é chamada função receita marginal e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se *x* unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e *P* é chamada função lucro. A função lucro marginal é *P*´, a derivada da função lucro.

Um exemplo desse tipo de problema é o seguinte:

I. Segundo o Thomas (2013, p. 308). Suponha que $r(x) = 9x$ e $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, onde x representa milhares de unidade. Há um nível de produção que maximize o lucro? Se houver qual é?

Resolução: Considere $r(x)\ e\ c(x)$, receita proveniente da venda de x itens e custo da produção de x itens respectivamente.

(83) 3322.3222
contato@epbem.com.br
www.epbem.com.br

Observe que $r'(x) = 9$ e $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

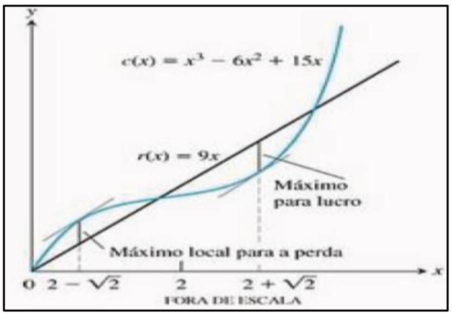
$3x^2 - 12x + 15 = 9$ FAZENDO $r'(x) = c'(x)$

$3x^2 - 12x + 6 = 0$ resolvendo a equação pelo método de bháskara obtemos

$x_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{2}$

Os níveis de produção possíveis para o lucro máximo é $x \approx 0{,}586$ *ou* $x \approx 3{,}414$ mil unidades. A segunda derivada $p(x) = r(x) - c(x) \rightarrow p''(x) = r''(x) - c''(x)$ logo conclui-se que $p''(x) = -c''(x)$. Assim $p''(x) = 6(2 - x)$, que é negativa em $x \approx 2 - \sqrt{2}$ e positiva em $x \approx 2 + \sqrt{2}$. Segundo o teste da segunda derivada, o lucro máximo ocorre quando $x \approx 3{,}414$ (onde a receita excede os custos) como mostra o gráfico abaixo, conforme a figura 3.

Figura 3: Esboço do gráfico da questão I



Fonte: Thomas, 2009, p. 309.

II. Segundo James Stewart (2013, p. 299). Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a $ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Resolução: Se *x* for o número de reprodutores de Blu-ray vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será *x* - 200. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em $ 10. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20}.10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$quando *x* = 450. Este valor de *x* dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de *R* é uma parábola que abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é 350 - 225 = 125. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de $ 125.

Dessa forma é que a derivadas tem suas aplicações no cotidiano e que resolvem problemas de maximização e minimização por meio das derivadas com relação a alguns teoremas de suma importância que os caracterizam os máximos e mínimos.

CONCLUSÕES

Através do exposto, a pesquisa fez um levantamento por meio de livros para os problemas de otimização que se entrelaçam com as derivadas e assim tem uma grande parcela de contribuição para situações praticas do cotidiano.

Mostrou-se a grande importância do cálculo diferencial e integral, em situações vivenciadas diariamente que o cálculo também facilita a resolução desse tipo de problema, onde a maioria dos estudantes se confundem por não entenderem bem o que a questão pede, mas com experiencias adquiridas pelas resoluções de vários problemas verifica-se que não é tão difícil quanto imagina-se inicialmente.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

AREF, Antar Neto. et al. **Introdução à análise matemática, noções de matemática** v.8: São Paulo: Moderna, 1985.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo** v.1: 5. ed.- [Reimpr.]. – Rio de Janeiro: LTC 2013.

SANTANA, Anderson Marcolino de, **Aplicação das Derivadas.** Trabalho de Conclusão de Curso. 48fls. Universidade Federal de Rondônia- UNIR, Campus de Ji-Paraná. 2010. Disponível em: <http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf>. Acesso em: 22 Mar. 2018

STEWART, James. **Cálculo** v. 1: 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

THOMAS, G. **Cálculo** v.1: 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.