FRACTAIS E FORMAÇÃO DE CONCEITOS

Sídney Moreira da Costa (1); Juscelino de Araújo Silva (2);

Universidade Estadual da Paraíba – UEPB sidney.mc@hotmail.com (1);
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB juscelinoaspf@hotmail.com (2);

RESUMO

Inserido no campo da investigação no Ensino da Matemática, o presente trabalho traz uma reflexão sobre a formação de conceitos a partir da representações múltiplas e da metodologia de resolução de problemas. O artigo é fruto da disciplina Fundamentos da Álgebra cursada no período 2017.2 do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Optamos por trabalhar dentro da perspectiva das representações múltiplas e da formação de conceitos, esta tendo em vista as ideias de Vigotski (2009) e aquela segundo Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001), pois achamos que são dois referenciais que muito contribuem para a aprendizagem da álgebra. Escolhemos tratar de álgebra unida à geometria fractal, pois vemos nela uma geometria diferente da que estamos habituados pelo livro didático a tratar na sala de aula, mas que tem toda sua contribuição e valor também no aprendizado matemático, além do que queríamos trabalhar com algo novo e assim nos propormos a investigar quais as potencialidades do uso da geometria fractal para o ensino de expressões algébricas com o uso das diversas representações e a formação de conceitos via resolução de problemas? Partindo disto, apresentamos a seguir um pouco sobre a geometria fractal e sobre os referenciais que adotamos para então expor e discutir as atividades que foram realizadas. Ao término da experiência, constatou-se que a geometria fractal aliada as representações múltiplas contribuíram de forma significativa na formação de conceitos algébricos.

Palavras-chave: Fractais, Conceitos, Representações múltiplas, Resolução de problemas, Álgebra.

INTRODUÇÃO

Não há dúvidas que ensinar álgebra tem sido um dos grandes desafios para o ensino de Matemática: ajudar os alunos a perceber padrões, regularidades, estabelecer relações entre números e variáveis, obter equações, compreender funções e ações desse tipo, tem sido uma tarefa difícil, sobretudo na formulação de ideias para os nossos alunos.

Embora, diante dessas dificuldades, algumas alternativas surgem como caminhos para a melhoria do ensino de álgebra. O NCTM (2000); tradução APM, 2008, recomenda, por exemplo, o uso de representações múltiplas e reconhece a necessidade de que os alunos as utilizem desde o início da aprendizagem de álgebra, bem como selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas.

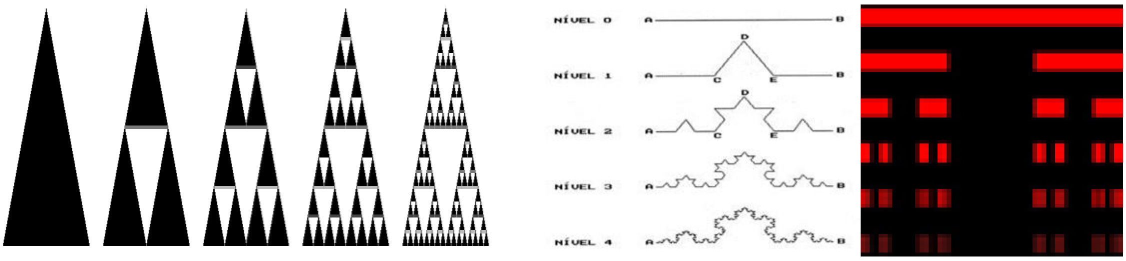
Partindo desses pressupostos, selecionamos a metodologia de resolução de problemas, aliada a representações múltiplas e a geometria fractal, não tão conhecida, a fim de despertar a curiosidade, ao qual descreveremos abaixo.

Geometria fractal é uma nova geometria que estuda formas chamadas de fractais. O iniciador do estudo dessas formas foi Benoit Mandelbrot que nasceu em Varsóvia, de família judaica da Lituânia, em 1924. Mandelbrot denominou de fractais, formas geométricas que possuem uma propriedade especial, que pode ser considerada característica delas. Elas constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes, o que torna suas partes semelhantes, essa propriedade é conhecida como autossimilaridade; além disso, possuem outra característica que é a de ser possível prolongá-las infinitamente.

A Geometria euclidiana se mostra insuficiente para com suas formas tentar representar elementos da natureza, como nuvens, raios, os vasos sanguíneos do corpo, os galhos de uma árvore, por exemplo. Para tentar conseguir representar essas e outras formas, exatamente ou aproximadamente iguais surgiu a geometria fractal.

O nome fractal se baseia no latim, do adjetivo fractus, cujo verbo frangere correspondente significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. Existem fractais bem conhecidos que possuem as características citadas e encontradas por Benoit Mandelbrot: o triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e o Conjunto de Cantor (também conhecido como Poeira ou Polvo de Cantor), retratados abaixo:

Imagens de fractais: Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch e Conjunto de Cantor



Fonte: google.imagens

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Entendemos como representações os registros que os alunos podem usar para mostrar o que foi assimilado de certo conteúdo, mas não somente o seu “produto final”, o processo que os levou até chegar a este produto também é uma forma de representação, conforme o *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000; tradução APM, 2008, p.75): “O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma à forma em si mesma.”.

Também já é apontado pelo NCTM que os alunos devem aprender a trabalhar com representações para comunicar ideias matemáticas, como saber selecioná-las para resolver problemas e até modelar situações sociais e matemáticas (NCTM, 2000; tradução APM, 2008, p.75).

Dentro disto, Friedlander e Tabach (2001) são alguns autores que apresentam alguns tipos de representações como a verbal, numérica, gráfica e algébrica.

A representação verbal é muito utilizada quando se propõe problemas para serem resolvidos e que muitas vezes podem ser resolvidos também verbalmente. Esta representação permite fazer ligações com temas do cotidiano ou da vida acadêmica e assim pode tornar sua compreensão mais fácil, entretanto pelas diferenças presentes nas línguas maternas, pode causar ambiguidades e levar a associações incorretas, além de não ser uma linguagem universal e que varia muito do estilo pessoal de cada indivíduo.

A representação numérica é sem dúvida uma das mais utilizadas no estágio inicial do estudo da álgebra. Além do uso desta representação ser uma excelente ponte para a aquisição da álgebra, ela precede também outros tipos de representação. Para o início da compreensão e resolução de problemas é uma representação muito importante e de muita ajuda, porém possui limitações no que toca a necessidade de provar casos gerais.

A representação gráfica é muito útil devido o apelo visual que leva aos alunos, além de proporcionar uma imagem clara de uma função de variáveis reais, mas estas representações podem não ser bem exatas devido a fatores externos – como as escalas – e também por apresentarem apenas uma parte do alcance de certo problema. Sua utilidade varia de acordo com a tarefa matemática em questão.

A representação algébrica é concisa, geral e efetiva na representação de modelos e padrões matemáticos, aliás, às vezes, é a única forma de justificar ou provar declarações gerais, contudo o significado de objetos matemáticos ou a natureza dos objetos representados pode ser obstruído ou bloqueado quando há um uso exclusivo de símbolos algébricos em qualquer nível de aprendizagem.

É bom deixar claro também que como cada representação possui suas vantagens e desvantagens, é recomendado que se trabalhe com mais de uma delas, pois o que falta em uma pode ser sanado com o uso da outra e vice-versa.

Goldin e Shteingold (2001) explicam ainda que existem dois tipos de representação: as externas e as internas. Em resumo podemos dizer que as externas são as que podem ser expressas por meio de papel, de desenhos, os esboços geométricos e as equações (que são os 4 tipos citados anteriormente); já as internas são as que são produzidas na mente dos indivíduos para objetos e processos matemáticos.

Como as internas variam de pessoa para pessoa e também não podem ser expressas de forma fácil, apenas as externas podem ser avaliadas e a partir delas que podemos afirmar algo a respeito das representações internas feitas pelos indivíduos, mas também podemos trabalhar nas representações internas deles a fim de aprimorá-las, realizando um bom trabalho no uso das externas.

É neste ponto que a teoria das representações se une a teoria da formação dos conceitos de Vigotski que trabalhamos aqui, pois entendemos que a efetiva formação de conceitos passa também pela forma de como conseguir representá-los.

> Um conceito matemático é aprendido e pode ser aplicado pela extensão de uma variedade de representações internas apropriadas que tenham sido desenvolvidas, junto com o funcionamento de relações entre elas. Inferimos sobre a natureza das representações desenvolvidas, e sua adequação, em parte das interações individuais com a externa, convencionalmente desenvolveram sistemas de representações matemáticas e em parte de suas interações com situações não matemáticas (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001, p.6).

Sobre a formação dos conceitos, Vigotski (2009) concebe que o conceito não é apenas a junção de ideias que se interligam para explicar algo, mas é um ato real e complexo do pensamento que só pode ser realizado quando a criança já tiver atingido o seu nível mais alto de desenvolvimento mental e não aprendido por mera memorização. Para ele há dois tipos de conceitos: os espontâneos ou cotidianos e os científicos. Os espontâneos ou cotidianos (que ele prefere chamar de cotidianos, para que não pareça que surgem do nada, isto é, de forma espontânea) são aqueles que a criança o vai formando durante o convívio social, sem necessariamente ter passado por uma formalização a respeito dele, por exemplo, mãe e carro. Já os conceitos científicos são os que se formam dentro de uma educação formal, isto é, os aprendidos na escola em cada uma das disciplinas cursadas, por exemplo, no caso das atividades que iremos expor a seguir foi o trabalho ora expressões algébricas, ora com funções.

Os conceitos cotidianos desenvolvidos através das experiências pessoais dos alunos são trazidos para a escola pelos mesmos e podem servir de base para auxiliar na formação dos conceitos científicos. Ambos os conceitos se complementam e enquanto o aluno vai aprendendo os científicos isto os ajuda a organizar também os cotidianos, da mesma forma que os científicos se tornarão cotidianos para eles.

Tomemos, por exemplo, uma criança que está aprendendo de maneira formalizada a estrutura da operação de adição. Ao se desenvolver as ideias relacionadas à adição e seu algoritmo a criança após um tempo terá internalizado todo aquele conteúdo e o que antes tinha "o peso" de ser formal⁄científico, torna-se natural⁄habitual⁄cotidiano.

Trabalhar com metodologias alternativas em sala de aula com os alunos podem interferir de forma positiva no processo de ensino-aprendizagem, na formação dos conceitos. Segundo Vigotski (2009, p. 249): "Métodos de ensino indiretos mais sutis e mais complexos acabam sendo uma interferência no processo de formação de conceitos infantis, que faz avançar e elevar-se esse processo de desenvolvimento.".

Ensinar através de metodologias como aulas expositivas, onde o professor apenas transmite informações para os alunos, algumas vezes não é a melhor alternativa:

> A experiência pedagógica nos ensina que o ensino direto de conceitos sempre se mostra impossível e pedagogicamente estéril. O professor que envereda por esse caminho costuma não conseguir senão uma assimilação vazia de palavras, um verbalismo puro e simples que estimula e imita a existência dos respectivos conceitos na criança mas, na prática, esconde o vazio. Em tais casos, a criança não assimila o conceito mas a palavra, capta mais de memória que de pensamento e sente-se impotente diante de qualquer tentativa de emprego consciente do conhecimento assimilado. (VIGOTSKI, 2009, p. 247)

Nesse sentido optamos, pela metodologia de resolução de problemas por acreditar que ela contribui para a formação de significados. Segundo Serrazina (2002), a resolução de problemas faz com que o aluno sinta-se livre a questionar, explorar, explicar e é necessário atividades que fujam da rotina e da prática de procedimentos.

METODOLOGIA

A pesquisa utilizou-se a abordagem qualitativa, ao buscar compreender o objeto de estudo a partir da análise dos dados de maneira descritiva e interpretativa conforme as características de Bogdan e Biklen (1994).

Esta investigação buscou evindeciar compreensão de conceitos algébricos a partir de representações múltiplas com uma turma de dezesseis alunos mestrados do Curso de Pós Graduação da Universidade Estadual da Paraíba da disciplina Fundamentos de Álgebra, por meio de uma aplicação de atividades em situações-problemas através da metodologia de resolução de problemas.

Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados a análise documental e as anotações feitas pelos aplicadores dos problemas.

RESULTADOS E/ OU DISCUSSÕES

Inicialmente falamos um pouco com a turma se conheciam algo sobre a geometria fractal e após alguns afirmarem que sim, fizemos um breve comentário a respeito da mesma para então podermos entregar as atividades aos presentes que se dividiram em duplas para realização delas. As atividades propostas foram:

Observe a sequência de figuras abaixo que é do triângulo de Sierpinski um conhecido exemplo de fractal:

Sabemos que fractais guardam entre si característica de serem figuras que poderiam ser reproduzidas indefinidamente, além de guardarem a autossimilaridade entre suas imagens, assim sendo responda o que se pede:

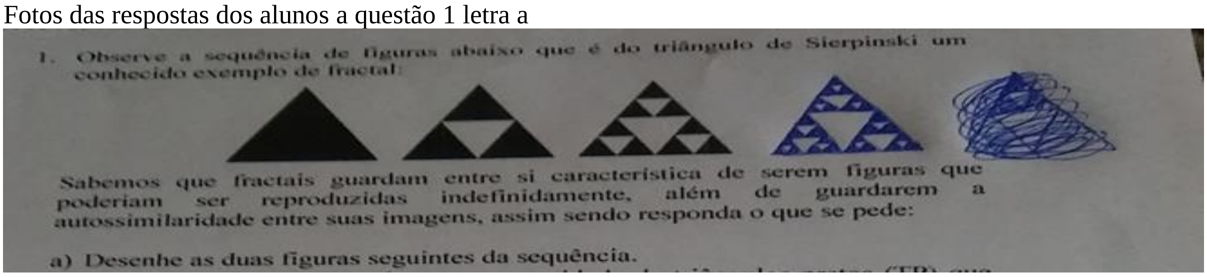
a) Desenhe as duas figuras seguintes da sequência.
b) Complete a tabela a seguir com a quantidade de triângulos pretos (TP) que aparece em cada uma das 5 primeiras figuras.

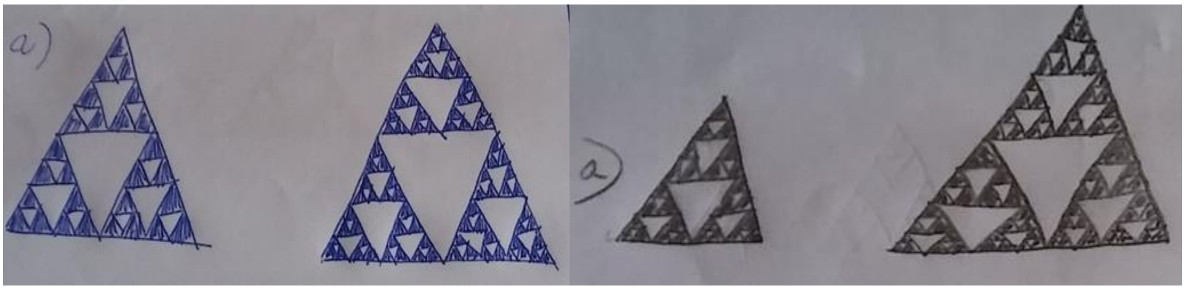
Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
TP					

c) Quantos triângulos pretos irão existir na figura 6 e na 7?
d) Em que figura aparecerá 2781 triângulos pretos?
e) Quais são as grandezas envolvidas neste problema?
f) Estabeleça uma relação entre estas duas grandezas tanto na forma escrita, como na forma algébrica.

Demos um tempo para que pudessem resolver estas primeiras alternativas enquanto acompanhávamos o que respondiam e fazíamos anotações pertinentes ao que observávamos e também tirávamos algumas dúvidas segundo elas podiam vir surgindo. Observamos que algumas duplas se detiveram muito em desenhar as figuras que a alternativa **a** solicitava, mas no final de forma satisfatória todas as duplas conseguiram desenhar as figuras apesar de terem enfrentado algumas dificuldades devido a quantidade dos triângulos brancos que iam surgindo a cada figura.

Fotos das respostas dos alunos a questão 1 letra a

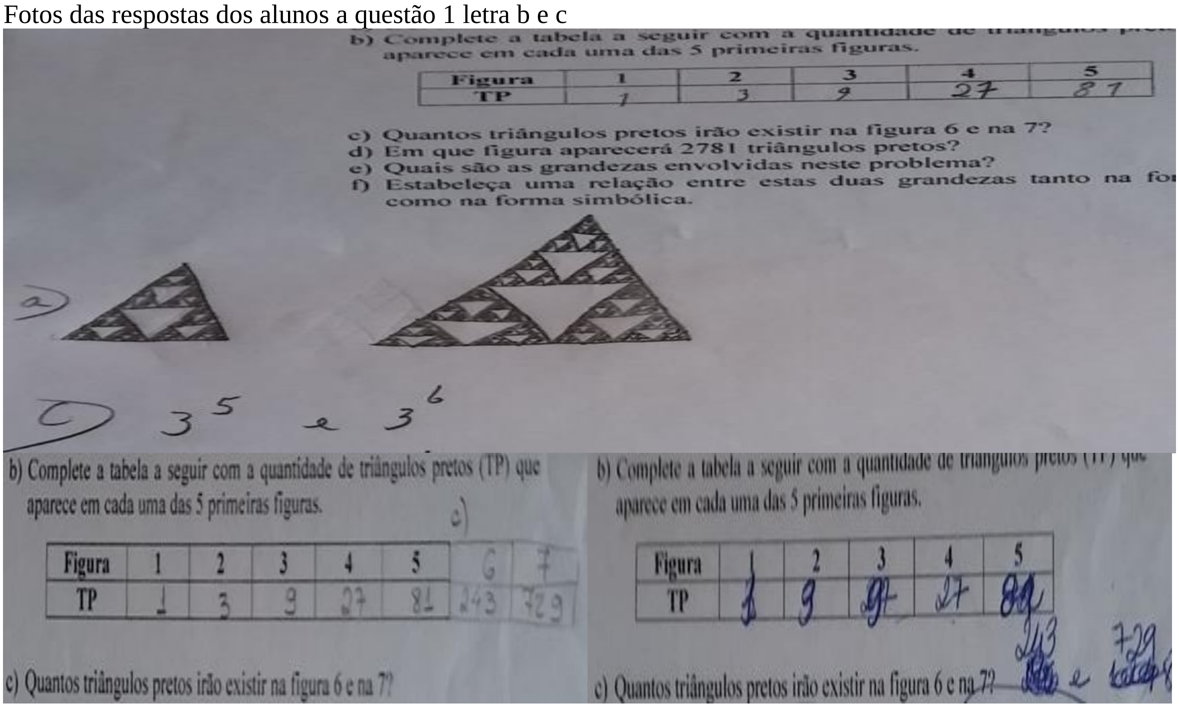




Fonte: arquivo pessoal

A alternativa **b** também não foi apresentada dificuldades, pois os participantes puderem observar os desenhos e completar a tabela de forma adequada. Nesta alternativa alguns aproveitaram e responderam a alternativa **c** junto, pois apenas completaram a tabela da letra b – estratégia também feita no quadro quando solicitamos que viessem ao quadro registrar a resposta da alternativa c. Um dos registros da alternativa c foi interessante, pois a dupla não registrou o número, mas sim as potências respectivas das respostas, a saber, 3^5 e 3^6.

Fotos das respostas dos alunos a questão 1 letra b e c

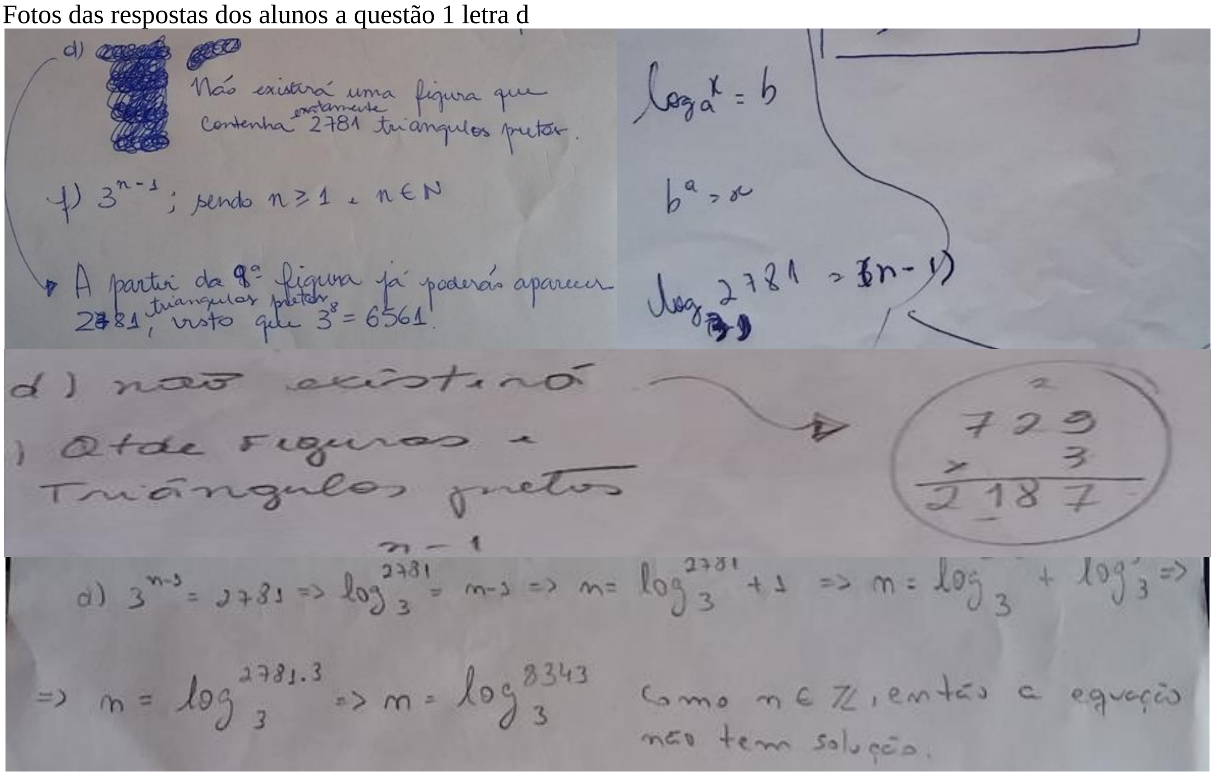


Fonte: arquivo pessoal

A alternativa **d** terminou sendo a mais curiosa de todas, pois quando a elaboramos não tínhamos percebido que a digitação saiu com um erro e no lugar de ser 2187, ficou 2781. Nossa intenção inicial era o 2187 que levaria os participantes a irem por um caminho inverso e observassem que a resposta seria a figura 8. De tal forma que quando as duplas chegaram a esta questão muitos nos interrogaram dizendo que era impossível que existisse esta resposta. O desenrolar da questão na sala chegou a tal ponto que uma dupla usou até do celular para relembrar propriedades de função exponencial e logarítmica a fim de saber se poderiam estar esquecendo-se de algo que poderia ajudar a resolver a alternativa em questão. Houve registros em que algumas duplas usaram de logaritmos para provar que não tinha a resposta exata o que mostrou que foi percebido que nossa atividade foi útil não apenas para ensinar expressão algébrica, mas que seria muito útil para o ensino da função exponencial e logarítmica a ponto de auxiliar os participantes a perceberem a relação de inversa que estas funções têm entre si. Algumas duplas apenas escreveram a resposta de que "não existe" e outras usaram da representação numérica para mostrar que não era possível chegar à resposta da alternativa que era os 2781 triângulos pretos. Uma dupla, todavia, e também o professor que estava presente, observaram e também além de deixarem escrito, na hora da exposição no quadro verbalizaram sua justificativa de que na figura 9 apareceria os 2781, pois ela teria 6561, logicamente teria os 2781. Interessante que até o momento que fomos corrigir no quadro não tínhamos percebido o erro de digitação e enquanto realizávamos a operação, que para nós seria apenas 729 x 3, que daria a solução esperada, foi então que pudemos observar que o erro foi a digitação. Por outro lado, foi graças a este erro de digitação que tivemos a melhor das discussões em sala dentro de toda esta atividade e conseguimos observar sua amplitude de uso, chegando a relacionar as funções exponencial e logarítmica.

Aliás, apesar de o nosso público-alvo ter sido mestrandos que a esta altura já possuem conceitos bem sólidos a respeito dos conteúdos que quisemos trabalhar nesta atividade, podemos constatar, conforme Goldin e Shteingold (2001) falam, as representações internas e externas dos mesmos, especialmente se observarmos o caso dos alunos que tentaram resolver umas das alternativas usando logaritmo: eles estavam bem "seguros" daquilo que estavam representando externamente no papel e observaram como poderiam "ir além" para obter a resposta a partir da lembrança do logaritmo como função inversa, isto é, sua tentativa externa do logaritmo demonstrou claramente seu pensamento a respeito da busca de um caminho para resolver o problema então proposto.

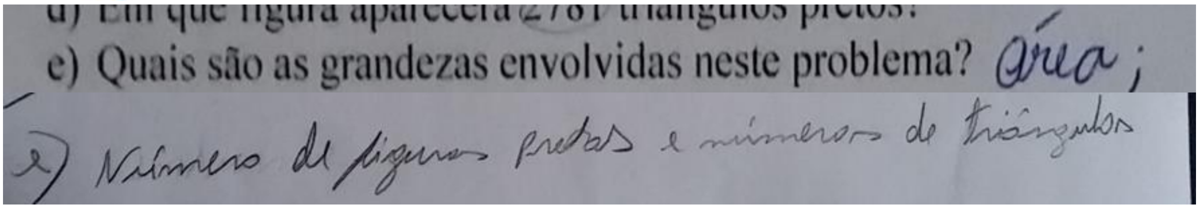
Fotos das respostas dos alunos a questão 1 letra d



Fonte: arquivo pessoal

Na alternativa **e** alguns participantes responderam de forma correta as grandezas envolvidas, porém durante a realização da atividade uma dupla expôs que não tinham entendido quais eram as grandezas envolvidas. Daí outra dupla deu a resposta, por outro lado, podemos ver nos registros que uma dupla respondeu "área" e ainda tiveram aqueles que nada responderam e uma dupla que "trocou" uma parte dos nomes das grandezas.

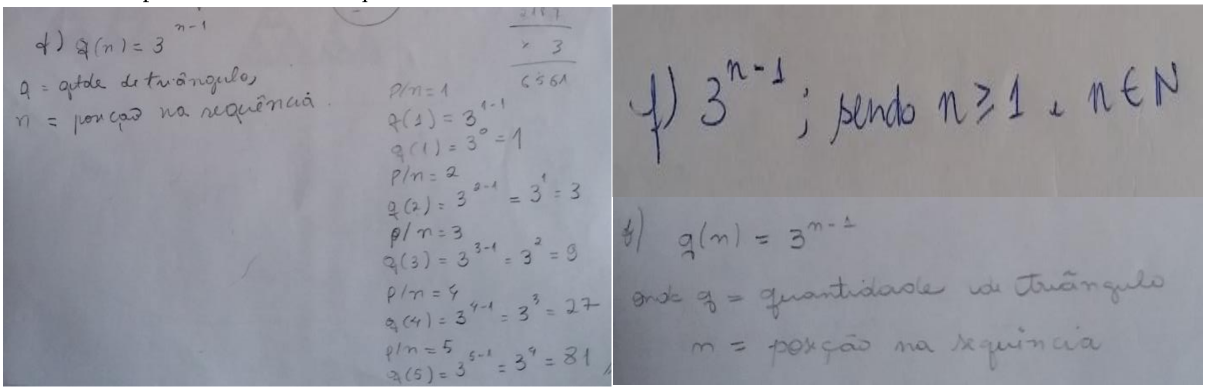
Fotos das respostas dos alunos a questão 1 letra e



Fotos das respostas dos alunos a questão 1 letra e

Por fim, na alternativa **f** as respostas foram obtidas com sucesso. Alguns participantes escreveram a expressão simbólica, isto é, a representação algébrica, na forma da função exponencial, já outras duplas escreveram apenas a expressão algébrica. Aqui nos chamou a atenção o fato de que aqueles que escreveram a função também designaram o que as variáveis dependentes e independentes significavam, mas mesmo quem escreveu apenas a expressão algébrica também explicitou de alguma forma o "domínio de existência da expressão", como podemos conferir nas imagens abaixo. Ainda em um dos registros na forma de função a dupla escreveu os cálculos das figuras de 1 a 5.

Fotos das respostas dos alunos a questão 1 letra f



Fonte: arquivo pessoal

Como pedimos que também expressassem a relação na forma escrita apenas duas duplas o fizeram. Um participante observou que seria melhor que escrevêssemos esta alternativa de outra forma, pois a forma simbólica não deixa de ser uma forma escrita. Acolhemos e agradecemos esta sugestão.

Não há dúvida do uso das diversas representações nesta atividade, aliás, conseguimos na hora do fechamento desta primeira parte da atividade mostrar aos presentes como elas foram importantes para se obter a ideia final da expressão desejada a começar de ver que, por exemplo, a pictórica seria muito trabalhosa se pedíssemos as figuras seguintes, embora de início como falamos de uma imagem de um fractal se tornou indispensável; já a numérica embora resolvesse este problema, pois consistiria apenas em multiplicações por três, não se mostraria efetiva para se obter a relação geral que queríamos, apesar de ser ela que mostraria o "segredo" por trás da sequência, a saber, a multiplicação por três, isto é, a potência de base três. Além de tudo isto a representação verbal tanto na escrita solicitada na alternativa f, como na justificativa oral que uma dupla deu a respeito de não existir inicialmente uma figura exata com os 2781 triângulos revelam como todas as representações muito além de se fazerem presentes na sequência de atividades propostas, mas foram formando degraus que unidos ajudaram a se obter a expressão que desejávamos, aliás, foi além já que conseguiu chegar até as funções exponenciais e logarítmicas, mostrando então uma sequência útil para a formação do conceito de expressão algébrica, mas também da função exponencial e por consequência um trabalho com logarítmica, o que revela como esta situação, realizada através da metodologia da resolução de problemas, atendeu o método sutil que Vigotski (2009) aponta para se obter uma melhor forma do ensino de determinado conteúdo, se comparado com o ensino direto de conceitos.

Devido ao nosso tempo ter se esgotado não tivemos como trabalhar as questões seguintes da alternativa **g** a **k**, que entregamos aos participantes para eles resolverem em casa e apenas explanamos de forma brevíssima. Ao final, porém de toda experiência, um dos alunos nos procurou para conferir se a relação que ele tinha achado para a alternativa k estava correta e junto com ele mostramos que ele tinha sim encontrado a resposta correta, entretanto não recolhemos o registro dele no que se refere a como ter chegado à função que ele montou.

CONCLUSÕES

É inegável como a geometria fractal através do triângulo de Sierpinski foi de fundamental importância para iniciarmos o trabalho da sequência proposta, já que além de servir de uma forma para uso da representação pictórica, a geometria fractal também se mostra necessária de ser trabalhada em sala de aula, tendo em vista como faz sua relação com o mundo que nos cerca, tanto quanto a euclidiana. Além desta visão de "aplicabilidade" da geometria fractal na vida real do aluno, outra contribuição do uso desta geometria para a finalidade que nos propomos foi o fato de poder articular duas áreas da matemática – geometria e álgebra – num mesmo problema (embora graças as diversas representações conseguimos unir também até a aritmética).

Conseguimos observar, portanto como as várias representações unida a esta geometria contribuem para a formação das ideias a respeito das expressões algébricas na observação da regularidade presente na sequência dos triângulos e na realidade muito mais, já que com o decorrer da atividade vimos que ela pode ser trabalhada não apenas para expressões algébricas no ensino fundamental, mas como pode ser útil também para o ensino médio do conteúdo de função exponencial (e porque não dizer logarítmica também) e de certa forma até etapas de ensino como o 5º e 6º ano podem se valer desta atividade para, ao menos, o trabalho tanto com potências, como na observação das regularidades, no nosso caso: da multiplicação por três (não com a necessidade de expressar já alguma fórmula algébrica para estas etapas de ensino, é claro, a fim não adentrar no erro já citado no nosso referencial sobre a antecipação imprópria da representação algébrica para certos momentos).

Destaca-se aqui, a necessidade de atividades que estimulem os atos de experimentar, que façam os alunos questionar-se que se centrem na metodologia de resolução de problemas, propiciem as discussões necessárias para a formação de significados, assim como se verificou nesse trabalho.

Outro fator necessário de ser observado é a atenção que devemos ter ao preparar um trabalho: nesta sequência o erro de digitação conseguiu ser bem revertido para o aprendizado, mas pode ser que, às vezes, não dê certo, portanto é sempre necessário termos muita atenção com o planejamento das atividades que levaremos a nossos alunos.

Por fim, esta atividade também pode ser estendida ao trabalho com progressões geométricas (P.G.), já que a própria sequência (3,9,27,...) é uma P.G. tanto na descoberta de termos, como na soma dos termos, aliás, esta foi uma observação feita também no meio da exposição das respostas e discussão da atividade com as duplas e o professor e deixamos então como sugestão para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula**. – 3. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BOGDAM, R.; BIKLEN, S.. **Investigação Qualitativa em Educação.** Editora: Porto Editora. Porto – Portugal, 1994.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 2001 (Yearbook 2001). p. 173-185.

GOLDIN, G.; SHTEINGOLD, N. Systems of representations and the development of mathematical. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Eds.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 001.(Yearbook 2001). p. 1-23.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar.** Tradução: Magda Melo. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

SOUSA, M. do C. de; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos.** São Paulo: Mercado de Letras, 2014. – (Série Educação Matemática).

SERRAZINA, L; VALE, I.; FONSECA, H & PIMENTEL, T. **Investigações matemáticas na formação de professores.** In Encontro de Investigação em Educação Matemática, 11, 2002, Coimbra.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução Paulo Bezerra. 2ª edição. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2009.