



“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA.

Igor Raphael Silva de Melo (1); Célia Maria Rufino Franco (1);

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, igor.rapha6@gmail.com
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, celiafranco_m@hotmail.com

Resumo: O presente trabalho apresenta relatos de uma atividade desenvolvida entre discente e docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande-UFCG, campus Cuité –PB. No qual, durante aulas de uma disciplina optativa, Modelagem Matemática, tratamos do cálculo do volume da maçã e da sua área superficial, de uma forma investigativa e de caráter exploratório- reflexivo, para isso usamos modelagem matemática e suas etapas realizadas em estudos apresentados por Bassanezi(2013). Apresentaremos como estratégias para realização de tais cálculos o princípio de Cavalieri, o Teorema de Pappus, o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, sendo que estas obedecem a uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual de modo a dar capacidade ao aluno na resolução de problemas e a desmistificar e compreender a relação entre teoria e prática em aulas de Modelagem Matemática e experimentações.

Palavras-chave: Relato de Experiência, Modelagem, Experimentação.

1. INTRODUÇÃO

Cotidianamente as pessoas se questionam e buscam entender determinados fenômenos da natureza, que em alguns casos não podem ser explicados ou demonstrados de acordo com o ponto de vista do senso comum. Surge então uma linguagem apropriada para uma melhor compreensão desses fatos. A Modelagem Matemática, a qual busca transformar situações da nossa realidade em problemas matemáticos e cujas soluções devem ter suas interpretações na linguagem usual.

A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. Salientamos mais uma vez que a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido – um modelo pode ser “bom” para o biólogo e não para o matemático e vice-versa. (BASSANEZI, 2006, p. 31)

Dessa forma, ao trabalharmos com modelagem matemática devemos ter cuidado com o objeto que estamos querendo modelar e o método o qual estamos utilizando para a sua modelagem. De acordo com Caldeira (2009) “Problematizar, elaborar suas próprias perguntas, desenvolver por meio da pesquisa, refletir e tirar suas próprias conclusões – pressupostos básicos dessa perspectiva de Modelagem Matemática”.



Sim, ao trabalharmos com modelagem devemos refletir como conduzir o seu processo e quais os seus métodos para modelar tal situação. Sabemos que a modelagem trabalha com aproximações, pois quando tentamos modelar uma situação do mundo real colocamos hipóteses para que o modelo possa ser validado e muitas vezes acabamos por colocar muitas hipóteses que o modelo adotado fica impossível de ser resolvido analiticamente. Para isso é necessário que o modelo se aproxime o mais próximo da realidade e que seja possível obter a solução de tal modelo.

Nesse sentido, este trabalho apresenta relatos de aulas de Modelagem Matemática, na qual busca tornar realidade perspectivas dos autores já citados. Neste estudo, temos como objeto de estudo Malus domestica Bork, popularmente conhecida como Maça.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma sequência de atividades ou exemplos para promover reflexões sobre o estudo de volume de formas de revolução, um estudo da modelagem matemática que defende as aplicações em situações cotidianas. Toma-se, então, como problema motivador a determinação do volume de uma maça, utilizando vários métodos, de forma gradativa de acordo com sua complexidade.

2. METODOLOGIA

O trabalho referido foi desenvolvido entre discente e docente do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, campus Cuité – PB, ao decorrer das aulas da disciplina Modelagem Matemática, componente curricular optativa do curso, onde foi proposto pela professora o desenvolvimento de uma atividade experimental, cujo objetivo é por em prática o processo de modelagem matemática através das aplicações de situações cotidianas. Nesta literatura, a aplicação trabalhada será o cálculo de volumes de uma maça.

No primeiro momento foi realizado um levantamento teórico sobre Modelagem Matemática e o processo de modelagem que deu base para a construção dessa atividade.

Logo após, temos a realização do experimento que se dá pela aproximação do volume de uma maça, utilizando-se conceitos de cálculo diferencial e integral, conhecimentos de geometria espacial e um teorema, conhecido como teorema de Pappus. É importante também ressaltar que a maioria dos problemas levantados neste processo de modelagem diz respeito à geometria do objeto em estudo, no caso a maçã. Este

destaque para a parte visual é importante, visto que assim se consegue uma melhor compreensão do que está acontecendo além de aguçar a imaginação geométrica.

Os modelos matemáticos utilizados para o cálculo do volume de uma maçã estão colocados em uma sequência que obedece a um nível gradativo de dificuldade e complexidade conceitual. No entanto, isto não significa necessariamente que o resultado obtido para a aproximação do volume da maçã seja tão mais preciso quanto maior for a complexidade do modelo.

Materiais utilizados na Atividade:

- Barbante
- Régua
- Maça
- Recipiente milimetrado/ Béquer

Etapas da Atividade

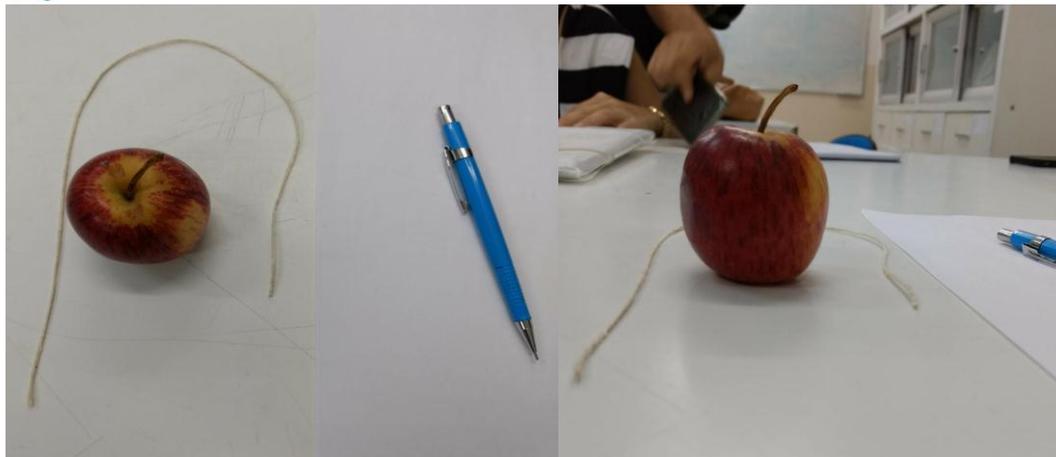
- i. Medições da circunferência da maçã;
- ii. Calcular volume através do método de Arquimedes, mergulhando a maçã num recipiente de água, onde o volume do líquido deslocado é igual ao volume da maçã;
- iii. Calcular o volume usando os 4 métodos já citados;
- iv. Comparar e analisar resultados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Existem vários métodos matemáticos para calcular o volume de uma maçã. Logo, escolhemos alguns métodos para este cálculo, como: Teorema de Pappus, Fórmula do Volume da Esfera, fatiando uma maçã e usando Integração. Este estudo foi realizado baseado em um modelo apresentado em Bassanezi (2013).

Para o desenvolvimento dessa atividade é necessário materiais bem simples e de fácil obtenção, como vemos na figura a seguir (régua, barbante, lápis).

Figura 01: Objeto de estudo e materiais de pesquisa.



Fonte: Própria.

Primeiramente, utilizando a fórmula do Volume da Esfera:

- Perímetro: $P = 2\pi r$ (Equação I)
- Volume da Esfera: $V = 4\pi r^3/3$ (Equação II)

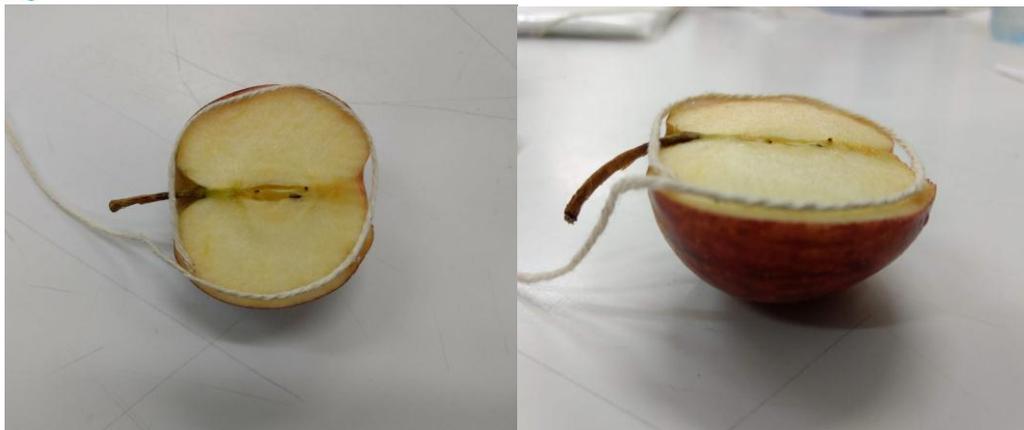
Foi calculado o volume da maçã utilizando a fórmula do volume da esfera, ou seja, para calcular o volume de uma maçã devemos fazer uma aproximação com o volume de uma esfera (Equação II). Para isso, fizemos a medição do perímetro da maçã e obtivemos como resultado o valor de 21,5 cm (valor que foi encontrado com o auxílio de um barbante e da régua), para encontrarmos o raio maior da maçã utilizamos a fórmula do perímetro (Equação I).

Substituindo o valor do perímetro na equação (I), obtemos o seguinte valor para o raio maior da maçã $R = 3,42 \text{ cm}$. Após isso, utilizando a fórmula do volume de uma esfera e substituindo o valor do raio maior por $R = 3,42 \text{ cm}$, obtemos:

$$V_{\text{maçã}} = 167,56 \text{ cm}^3$$

Envolvendo a maçã com um barbante (Figura 02) obtemos o comprimento de uma circunferência (aproximação).

Figura 02: Medição da Circunferência da Maçã.



Fonte: Própria.

No segundo momento, cortando-se a maçã ao meio (no sentido longitudinal) e medindo o raio na face plana da maçã, obtemos que o que chamamos por raio menor.

$$R(\text{menor}) = 2,63 \text{ cm.}$$

Figura 03: Corte da maçã



Fonte: Própria

Logo, calculamos novamente o volume utilizando a fórmula do volume de uma esfera, mas agora com o raio menor. Então, segue:

$$V_{\text{maçã}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{maçã}} = \frac{4}{3} \pi (2,63)^3$$

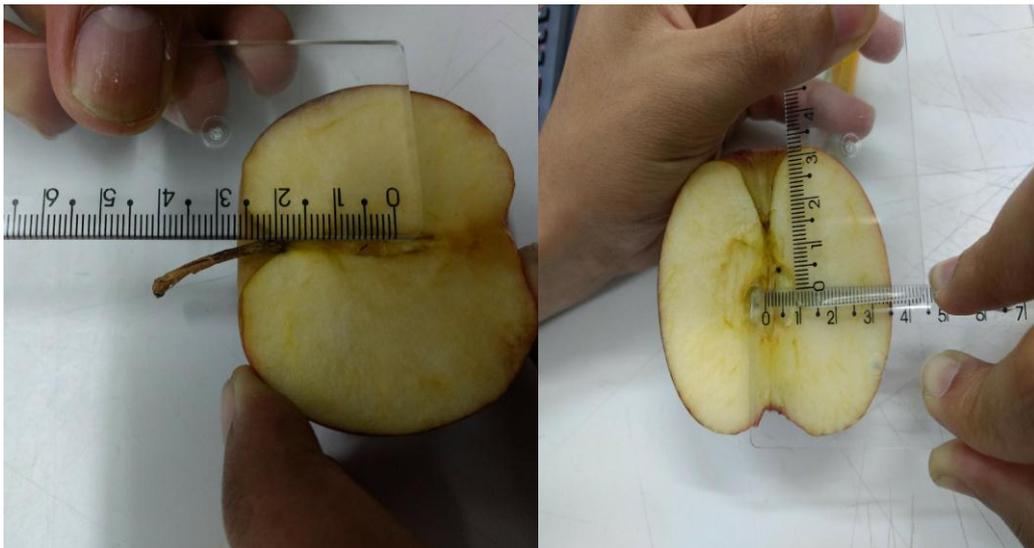
$$V_{\text{maçã}} = 76,2 \text{ cm}^3$$

Agora, fazendo uma média entre os dois volumes obtidos, com o raio maior e o menor encontrou o seguinte valor para o volume da maçã:

$$V_{\text{maçã}}: 86,88 \text{ cm}^3$$

O próximo passo é após cortarmos a maçã ao meio medir (Figura 04) por meio da aproximação de uma elipse os valores de a e b , para isso utilizamos de um barbante e de uma régua e obtivemos os seguintes valores de 3,1 cm e 2,8 cm os valores de a e b respectivamente.

Figura 04: Medindo o diâmetro da maçã e a distância percorrida pelo centroide.



Fonte: Própria

E então para calcularmos o volume, dessa vez iremos utilizar integração por aproximação de uma circunferência, onde o raio da circunferência é o valor obtido para o eixo maior da elipse e utilizando o método das cascas cilíndricas chegaremos ao seguinte volume para a maçã:

$$V_{\text{maçã}} = 2 \pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx \quad (I)$$

Na qual, desenvolvendo a Integral Definida (I) obtemos:

$$V_{\text{maçã}} = 124,78 \text{ cm}^3$$

Portanto, ao utilizarmos integração por aproximação de uma circunferência e como suporte para o cálculo do volume usamos o método de cascas cilíndricas obtivemos como resultado para o volume da maçã $V_{\text{maçã}} = 124,78 \text{ cm}^3$.

Em seguida realizamos a comparação entre o volume da esfera e o de uma elipse, igualando as duas fórmulas de calcular volume como são expostas a seguir:



$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

Com isso encontramos um novo raio:

$$R = 2,99 \text{ cm}$$

Logo, ao compararmos as duas fórmulas para calcular o volume da esfera e da elipse, encontramos um novo raio e este novo raio será útil para calcularmos o volume da maçã de maneira análoga ao feito anteriormente. Para isso, utilizaremos novamente de um processo de integração pelo método das cascas cilíndricas e raio 2,99 cm.

$$V_{\text{maçã}} = 2 \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx \quad (\text{II})$$

De forma análoga a anterior, resolvendo a Integral Definida (II) obtemos o seguinte resultado:

$$V_{\text{maçã}} = 112,03 \text{ cm}^3$$

Observe que utilizamos o mesmo método, pois fizemos o cálculo do volume da maçã por meio do processo de integração e utilizamos o método das cascas cilíndricas. Entretanto, como anteriormente calculamos o volume da maçã utilizando como raio o valor encontrado na medição da maçã por aproximação de uma elipse foi diferente do valor encontrado fazendo uma comparação entre o cálculo do volume da esfera com o de uma elipse e ao compararmos obtivemos um novo raio que agora passa a servir como limite de integração para calcular o novo volume da maçã.

Todos os valores obtidos foram distintos, entretanto uns se aproximam mais de uns do que de outros. Bassanezi (2006, p.241) afirma que no caso de calcular o volume de uma maçã “um processo mecânico seria o mais indicado para a avaliação, tanto em termos de simplicidade como de precisão”. Este processo que ele fala é o fato de mergulharmos a maçã em um recipiente com água e após ela ser mergulhada o volume mais preciso seria o deslocamento da água para cima.

Então, por fim, a professora pediu que mergulhasse a maçã em um recipiente cheio de água e que após o mergulho da maçã, o volume do líquido deslocado seria igual ao volume da maçã, ao fazermos isso, o volume de líquido do recipiente era de 600 ml e passou a ser 750 ml. Diante disso, constatamos que o volume da maçã é 150 cm^3 .

Este experimento foi baseado em um já realizado em curso de aperfeiçoamento para alunos de matemática em Guarapuava e Palmas nos anos de 1988 a 1989, onde este experimento encontra-se descrito no livro de

Bassanezi. A seguir construímos uma tabela com os dados obtidos para cada método utilizado para o cálculo do volume da maçã.

Quadro 1: Dados Obtidos

MÉTODOS PARA O CÁLCULO DE VOLUME	VALORES OBTIDOS
Cálculo do volume de uma esfera	167,56 cm ³
Cálculo com a maçã cortada ao meio	76,2 cm ³
Media dos volumes anteriores	86,88 cm ³
Aproximação de uma circunferência	124,78 cm ³
Aproximação por uma circunferência e raio obtido por meio de uma comparação	112,03 cm ³
Mergulho da maçã em um recipiente com água	150 cm ³

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observarmos o quadro acima, podemos constatar que os métodos os quais os volumes se aproximam mais daquele que é defendido como sendo o método mais preciso por Bassanezi, foi o método do cálculo do volume da maçã utilizando o cálculo para o volume de uma esfera e o de aproximação por meio de uma circunferência. É perceptível que eles muito próximos do valor obtido ao mergulharmos a maçã no recipiente com água, enquanto que os métodos do cálculo médio dos volumes iniciais e o de aproximação por uma circunferência com raio obtido a partir da comparação do cálculo do volume de uma esfera com uma elipse e o por meio de aproximação por uma parábola distam-se muito do valor obtido ao mergulharmos a maçã na água.

4. CONCLUSÃO

Diante do exposto, vemos que ao desenvolver atividades desse tipo tornamos o aluno o sujeito ativo do processo de aprendizagem. A interação entre docente e discente é essencial durante todo o desenvolver da mesma, para que assim o induza a pensar, questionar e que o mesmo tenha interesse em estar participando da experimentação.

A união da parte teórica e parte prática no ensino da total sentido ao estudante em entender a relação existe entre as duas, ainda mais



quando realizamos esse experimento em comparação com outro já realizado. Pois, quando conhecemos a parte teórica e vamos para a prática, torna-nos visível aquilo que muitas vezes não é perceptível na teoria. Ao trabalhar com modelagem matemática, a experimentação é de grande importância, vivenciar a situação problema e depois tentar modelar é muito mais significativo do que não conhecer o ambiente ao qual está modelando.

Durante o processo de desenvolvimento do trabalho verificamos a importância de entender conceitos matemáticos para aplicá-los de uma maneira adequada e correta nas situações problemas que foram encontradas durante o percurso de modelagem de tais situações. Além disso, é conveniente mencionar que foi necessário fazer um embasamento histórico para as questões abordadas aqui, com o objetivo de proporcionar ao leitor uma melhor compreensão dos fatos e da metodologia utilizada. Finalmente, cabe ressaltar que todo processo de modelagem teve como suporte um conteúdo matemático, para que assim os modelos pudessem ser executados.

5. REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3.ed.-São Paulo: Contexto, 2006.
- CALDEIRA, Ademir Donizeti. **Modelagem Matemática: um outro olhar**. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.33-54, jul.2009.
- SANT'ANA, Alvinio Alves; DE FRAGA SANT'ANA, Marilaine. **Modelagem Matemática em Disciplina Específica**. Educação Matemática em Revista, n. 32, p. 37-44, 2013.