INVESTIGANDO A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Wélisson Martins Mota
Universidade Estadual da Paraíba, modusponens1@hotmail.com

1. Introdução

Dos versos da Eneida de Virgílio[1] à fala de Alessio Figalli (ETH Zürich)[2], um dos ganhadores da Medalha Fields entregue durante o International Congress of Mathematicians (ICM) 2018 [Congresso Internacional de Matemáticos], realizado na cidade do Rio de Janeiro entre 1º e 9 de agosto deste ano: o problema de Dido é um dos mais antigos e importantes problemas da Matemática. Segundo uma versão da lenda, a princesa Dido, no século IX a.C., teve de fugir da cidade de Tiro, com a vida ameaçada numa disputa de poder que já havia ceifado a vida de seu marido. Após uma longa viagem, ela chegou ao norte da África, onde pediu à população local para comprar uma área de terra a fim de construir uma vila para ela e seu séquito. A resposta que ouviu teria sido a seguinte: Você pode ter tanta terra quanto cercar com couro de boi. Dido, inteligentemente, cortou o couro em tiras que juntou com a intenção de delimitar uma região ao longo da costa onde surgiu, em seguida, a cidade de Cartago. O problema de Dido foi achar a forma do contorno de tal maneira que a área limitada fosse a maior possível. Ela dispôs a corda em semicírculo, perpendicular à orla marinha. Ela havia lançado as bases, por assim dizer, daquilo que hoje conhecemos como *problemas isoperimétricos*; veja BLÅSJÖ (2005).

Como seu nome sugere, o problema isoperimétrico no plano consiste em investigar figuras geométricas planas de igual perímetro. Mais precisamente, esse problema pode ser formulado da seguinte maneira: Dentre todas as curvas planas fechadas e sem auto-interseções, com um dado perímetro, qual engloba a maior área? Para contentamento dos analistas, esse problema também pode ser expresso através de uma desigualdade, conhecida como desigualdade isoperimétrica. A solução deste problema era conhecida desde a Antiguidade. Aristóteles, no século III a.C., já a conhecia, e Zenodoro teria oferecido uma

1 No Livro I, versos 365-368, da Eneida, lemos: "Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis // moenia surgentemque novae Karthaginis arcem, // mercatique solum, facti de nomine Byrsam, // taurino quantum possent circumdare tergo." Em tradução livre: "Eles vieram para o lugar onde hoje você verá as enormes muralhas e a crescente fortaleza de Cartago, e compraram o solo – Birsa chamaram-no então – tanto quanto puderam abranger pelo couro de um touro." Veja: <http://www.thelatinlibrary.com/vergil/aen1.shtml>. Acesso em: 15 ago. 2018.

2 Veja: <https://www.facebook.com/ICM2018/videos/1115048611986442/>. Acesso em: 15 ago. 2018.

demonstração no caso em que a classe de figuras geométricas consideradas é a dos polígonos; veja BLÅSJÖ (2005), Cooke (2013) e Heath (1921).

O teorema isoperimétrico estabelece uma relação insuspeita entre a área da região limitada por uma curva plana fechada e sem auto-interseções e seu comprimento: o quadrado do comprimento é maior do que ou igual ao produto da área por 4π – a isto chamamos desigualdade isoperimétrica. A igualdade ocorre somente quando a curva é um círculo. Da Antiguidade ao ICM 2018, muitos séculos se passaram, e, no decorrer destes, várias abordagens foram desenvolvidas para lidar com o problema isoperimétrico no plano.

O projeto de iniciação científica intitulado “O problema isoperimétrico no plano”, executado na Cota 2017-2018 do Programa de Iniciação Científica – UEPB/CNPq pelo autor sob orientação do Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira, teve por finalidade o estudo do problema isoperimétrico no plano e de algumas demonstrações do teorema isoperimétrico no plano, segundo, principalmente, as perspectivas delineadas em Lax (1995) e Moreira e Saldanha (1993). Ele se justificou como meio de um formalizar alguns conceitos geométricos, elucidando os elos existentes entre Geometria e Análise, adentrando as questões estudadas pela Geometria Diferencial e investigando as possibilidades de inserção dos conceitos relacionados ao problema isoperimétrico no plano na sala de aula do ensino básico.

2. Metodologia, Resultados e Discussão

A metodologia do trabalho que desenvolvemos no projeto “O problema isoperimétrico no plano” consistiu, sobretudo, numa pesquisa bibliográfica. Empreendemos levantamentos e revisões sistemáticas da literatura relacionada ao problema isoperimétrico e, com base nas fontes obtidas, realizamos seminários periódicos para exposição dos pré-requisitos e das demonstrações do teorema isoperimétrico.

O breve artigo publicado por Peter Lax em 1995 faz uso de uma poderosa ferramenta para estudar a relação entre comprimento e área de uma curva plana: parametrizações. Mas por que parametrizar uma curva? A primeira razão que pudemos identificar é, se assim podemos dizer, da ordem da economia: de posse de uma parametrização, para verificar se um ponto do plano está contido numa dada curva, nossas preocupações recaem não mais nas duas coordenadas deste ponto, mas sobre uma única variável, o parâmetro de que dependem as equações paramétricas que descrevem a curva.

As parametrizações, no entanto, fazem mais do que simplificar nossas contas. Elas são ferramentas bastante eficientes para a obtenção de informações geométricas sobre as curvas por meio do emprego de técnicas analíticas. Assim, por exemplo, usando uma parametrização, podemos definir funções para o cálculo do comprimento e da área de uma curva que nos livram de certa esterilidade euclidiana, uma vez que a atribuição destas quantidades a uma curva passam a prescindir do caráter axiomático da geometria que herdamos da Antiguidade. Para uma apresentação moderna da geometria euclidiana, com notas históricas e discussão dos principais conceitos geométricos de que aqui tratamos (comprimento e área), remetemos o/a leitor/a a Lima (1991). Se dispusermos de uma parametrização regular, podemos passar a uma parametrização pelo comprimento de arco (que significa, grosso modo, pensando uma curva como a posição, num dado instante de tempo, de uma partícula em movimento contínuo, que a partícula percorre o traço da curva com a mesma velocidade com que o parâmetro de tempo se move sobre a reta). Tudo isto pertence à Geometria Diferencial. A prova fornecida por Lax (1995) repousa basicamente sobre a escolha de um sistema apropriado de coordenadas, de uma parametrização pelo comprimento de arco, da expressão para a área englobada pela curva em termos das funções paramétricas e de uma desigualdade muito simples (consequência do fato de o quadrado de qualquer número real ser não-negativo).

Seguimos também, num segundo momento, os passos sugeridos por Carlos Gustavo T. de A. Moreira e Nicolau C. Saldanha (1993) para chegar à desejada desigualdade isoperimétrica. Estes passos são um conjunto de cinco afirmações de caráter geométrico. As duas primeiras e a última destas afirmações remontam ao trabalho do matemático e astrônomo grego Zenodoro, que viveu provavelmente no século II a.E.C e cuja obra foi perdida. As proposições atribuídas a Zenodoro aparecem na obra de um outro comentador da matemática grega, Pappus de Alexandria (290-350 d.E.C.), que contribuiu significativamente com o trabalho de Zenodoro; veja BLÅSJÖ (2005), Cooke (2013) e Heath (1921). Dentre as proposições mais importantes demonstradas por Zenodoro e Pappus, encontram-se as seguintes:

i. De todos os polígonos regulares de mesmo perímetro, aquele que tem maior área é o que tem mais ângulos.
ii. O círculo é maior do que qualquer polígono regular de mesmo perímetro.
iii. De todos os polígonos com mesmo número de lados e mesmo perímetro, o que é equilátero e equiângulo possui maior área.

A prova das Afirmações 0 e 1 em Moreira e Saldanha (1993) são consequências das fórmulas de Heron e de Bretschneider, respectivamente. A Afirmação 2 introduz um processo para obter o fecho convexo de um polígono. Na demonstração da Afirmação 3, é descrito um processo para, a partir de um polígono qualquer, obter inicialmente um equilátero e, depois, um regular com o mesmo número de lados que o polígono incial, aumentando a área em cada etapa. A desigualdade isoperimétrica é, então, obtida em três passos:

Passo 1. Tomamos uma quantidade finita de pontos igualmente espaçados sobre a curva, em termos de comprimento do arco de curva entre eles, e consideramos o polígono formado por eles, que tem perímetro menor do que o da curva original.

Passo 2. Tomamos o fecho convexo deste polígono. Seu perímetro também é menor do que o da curva original e, pelas afirmações anteriores provadas por Moreira e Saldanha (1993), sua área é menor do que ou igual ao quadrado do comprimento da curva original dividido por 4π.

Passo 3. Como a área da curva original é menor do que ou igual à soma da área do fecho convexo e da área de círculos centrados nos pontos escolhidos no Passo 1 (e com um razio apropriado), fazendo o número de pontos escolhidos tender ao infinito, concluímos a desigualdade isoperimétrica.

A igualdade é caracterizada observando-se, primeiramente, que uma curva que a realiza deve ser convexa e, a seguir, por um processo de deformação desta curva que, caso ela não fosse círculo, produziria uma curva de maior área, sem alterar o perímetro, gerando uma contradição.

Para além das questões históricas levantadas e do exercício de imaginação geométrica engendrado pelo estudo de Moreira e Saldanha (1993), este artigo foi importante nos ter feito atinar no fato de que, quando nos restringimos a uma classe de polígonos, explorar a desigualdade isoperimétrica pode ser uma tarefa mais simples e possível de ser inserida na sala de aula do ensino básico.

Consideramos o seguinte “problema dual”: Dentre todas as curvas planas fechadas e sem auto-interseções, com uma dada área, qual possui o menor perímetro? Este problema e a formulação que originalmente demos para o problema isoperimétrico são, essencialmente, equivalentes; veja Pólya (1954).

A versão dual do problema isoperimétrico, combinado à ideia de investir na procura por uma solução restrita a uma classe de polígonos, nos levou à procura de maneiras de inserir a desigualdade isoperimétrica na prática docente dos professores de Matemática do ensinobásico. Nossa leitura perpassou Bottema (2008), Nahin (2007) e Tikhomirov (1990), mas sentíamos que ainda faltava algo que privilegiasse a intuição geométrica em vez do estrito rigor matemático ou do uso, não raro desprovido de sentido, de expressões algébricas. Foi então que, intensificando a pesquisa por fontes na internet, encontramos no maravilhoso sítio *Cut The Knot*, de Alexander Bogomolny (2014), um roteiro com o qual desenvolvemos, como produto didático, um plano de aula com o intuito de verificar casos particulares da desigualdade isoperimétrica.

Este plano de aula foi executado no dia 30 de julho do ano em curso pelo autor na turma de design (1º do ensino médio) da Escola Cidadã Integral Técnica Patos – ECIT PATOS, situada no Bairro Salgadinho no município de Patos-PB. A aula dividiu-se em três momentos. Inicialmente, apresentamos a lenda de Dido, buscando despertar curiosidade nos alunos sobre o tema abordado. Logo após, revisamos o conteúdo de área e perímetro de figuras planas, que foi estudado pelos/as alunos/as da turma no mês de maio deste ano. Por fim, utilizando uma caixa de fósforo e pincéis de quadro, averiguamos com os/as alunos/as os seguintes questionamentos: Dentre todos os triângulos de mesmo perímetro qual o de maior área? Dentre todos os paralelogramos de mesmo perímetro qual o de maior área? Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro qual o de maior área?

3. Considerações finais

Na aula em que executamos o plano concebido como produto didático com base nos estudos que fizemos no decorrer do projeto “O problema isoperimétrico no plano”, constatamos que os/as alunos/as demonstraram grande interesse e participaram ativamente. Devido à curiosidade que externaram sobre o tema, continuamos a ser discuti-lo fora da sala de aula. Os recursos didáticos utilizados fizeram com que os alunos compreendessem de forma eficaz os conteúdos trabalhados e as demonstrações que esboçamos. A discussão dos resultados obtidos, bem como o desenvolvimento de novas ações no mesmo sentido e de novos estudos no tocante à desigualdade isoperimétrica, ainda é um trabalho em progresso.

Referências

BLÅSJÖ, V. The Isoperimetric Problem. **The American Mathematical Monthly**, v. 112, n. 6, p. 526-566, jun./jul. 2005.

BOGOMOLNY, A. **Isoperimetric Theorem for Quadrilaterals** (2014). Disponível em: <https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/IsoperimetricForQuads.shtml>. Acesso em: 23 jul. 2018.

BOTTEMA, O. **Topics in Elementary Geometry.** Traduzido do holandês ao inglês por Reinie Erné. 2 ed. Nova Iorque: Springer: 2008.

COOKE, R.L. **The History of Mathematics: A Brief Course.** 3 ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 2013.

HEATH, T.L. **A History of Greek Mathematics.** Oxford: Clarendon, 1921.

LAX, P. D. A Short Path to the Shortest Path. **The American Mathematical Monthly**, v. 102, n. 2, p. 158-159, fev. 1995.

LIMA, E.L. **Medida e Forma em Geometria.** Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

MOREIRA, C. G. T. de A.; SALDANHA, N. C. A desigualdade isoperimétrica. **Revista Matemática Universitária**, v. 15, p. 13-19, 1993.

NAHIN, P. J. **When Least is Best.** How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small (or as Large) as Possible. Princeton: Princeton University Press, 2007.

PÓLYA, G. **Mathematics and Plausible Reasoning.** Volume1: Induction and Analogy in Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 1954.

TIKHOMIROV, V. M. **Stories about Maxima and Minima.** Traduzido do russo para o inglês por Abe Shenitzer. Mathematical World, Volume 1. Providence: American Mathematical Society, 1990.