MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE ATITUDE E POSIÇÃO DO QUADROTOR.

Tayara Crystina Pereira Benigno[1]; Milena Carolina dos Santos Mangueira[2]; Nallyson Tiago Pereira da Costa[3]; Francisca Joedna Oliveira Souza[4]

[1] Mestre do Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação da Universidade Federal Rural do Semi-Arido-UFERSA (tayara0703@gmail.com). [2] Graduanda de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte- UERN (milenacarolina24@gmail.com). [3]Graduando de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte- UERN (nallyson1304@gmail.com). [4]Graduanda de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte- UERN, (joedna-souza13@gmail.com).

Quebra de seção contínua

Resumo. Com o avanço tecnológico e a popularização do uso dos Veículos Aéreos Não Tripulados (VANT's) cresce também a necessidade do uso de técnicas de controle mais robustas e mais eficazes. Dentre os mais diversos tipos de veículos aéreos não tripulados, este trabalho irá focar no modelo do *quadrotor*. O *quadrotor* é um veículo aéreo não tripulado, composto por uma estrutura mecânica em forma de x, onde suas extremidades possuem um conjunto motor e hélice, a rotação desse conjunto é responsável pela força de sustentação e pelos movimentos desenvolvidos pelo quadrotor em virtude da conservação de movimento angular. O presente trabalho tem como objetivo realizar a modelagem matemática deste sistema usando as equações de Euler-Lagrange. Inúmeros trabalhos já foram publicados sobre o controle destes VANT's, mas boa parte desses trabalhos é dedicada apenas ao sistema de controle da aeronave, não dando ênfase a modelagem matemática da sua estrutura. É importante obter uma modelagem matemática precisa e detalhada, para serem usadas na construção de um sistema de controle no simulador, utilizando o Matlab/Simulink. A modelagem matemática visa melhores resultados em relação à dinâmica da aeronave e consequentemente melhorando seu desempenho. A metodologia adotada foi pesquisa bibliográfica sobre as técnicas de derivação das equações de movimento do quadrotor tipo *Xquad* e sua modelagem. O modelo obtido será comparado com outros modelos matemáticos encontrados na literatura e os resultados serão comparados, para confirmar a validação do método de modelagem e técnica estudada e apresentada no decorrer deste trabalho.

Palavras-chave. Quadrotor; Lagrange-Euler; Modelagem matemática.

Quebra de seção contínua

1 Introdução

Um VANT (veículo aéreo não tripulado) constitui se em uma aeronave que não necessita de um piloto embarcado para pilotá-la [5]. Os VANT's têm o seu surgimento na Primeira Guerra Mundial (1917), e devido às dificuldades técnicas da época, eram pouco confiáveis e imprecisos. Nas últimas décadas, as pesquisas científicas envolvendo veículos aéreos não tripulados (VANT) têm crescido significativamente ao redor do mundo, visando diversas aplicações como, recolha de informação (imagens, busca, pesquisa e reconhecimento), de segurança, vigilância, aplicações agrícolas, gestão de tráfego.

A análise dos projetos desses veículos aéreos pode ser realizada através da dinâmica de sistemas multicorpos. A modelagem de tal sistema pode ser realizada pelo formalismo das equações de Euler-Lagrange [7]. Esse formalismo é uma forma de obtenção das equações do movimento e com isso possibilita a análise dinâmica do movimento.

2 Modelagem dinâmica

2.1 Ângulos Euler

Os ângulos de Euler são aplicados em diferentes aplicações de dinâmica de corpos rígidos, entre estes, o quadrotor. Considerando o sistema de coordenadas inercial X_e, Y_e, Z_e, como referencia, e outro sistema de coordenadas locais X_b, Y_b, Z_b que se relaciona com esse sistema fixo, o qual é livre para se movimentar de acordo com o corpo rígido.

Os ângulos de Euler serão obtidos por meio de uma relação entre tais sistemas, o inercial e o local. Sendo o ângulo θ aquele formado entre os eixos z_e e z_b. Já os ângulos ϕ e Ψ são determinados a partir de um eixo ON resultado da interseção do plano (x_b, y_b), com o plano (x_e, y_e), ilustrado na figura 1. Assim, o ângulo formado entre $\boldsymbol{x_e}$ e eixo ON é chamado $\boldsymbol{\phi}$, já aquele formado entre $\boldsymbol{y_e}$ e o eixo será determinado por $\boldsymbol{\psi}$. Dessa forma seriam obtidos os ângulos de Euler [2].

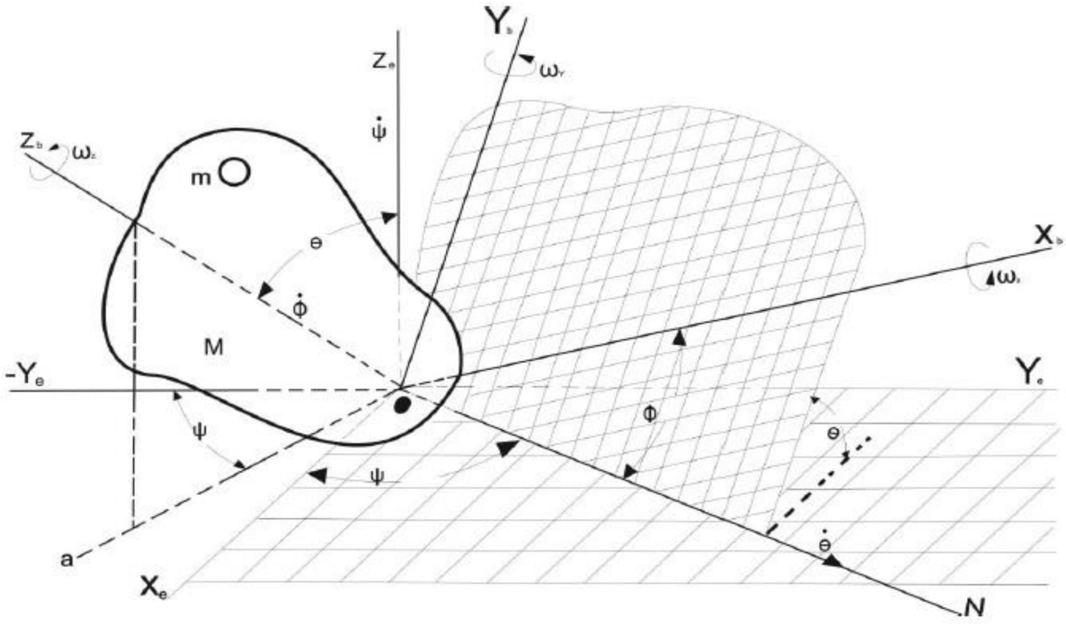

Figura 1- Ângulos de Euler (Fonte: Wells (1967)

A descrição de orientação de um corpo rígido no espaço deve ser fornecida a partir de três coordenadas independentes, a obtenção dessas coordenadas não são únicas [6]. Neste trabalho foi usada uma relação obtida a partir dos ângulos de Euler.

2.2 Equações de Euler-Lagrange

A equação de Euler- Lagrange descreve o comportamento de um sistema dinâmico em termos de suas coordenadas generalizadas, sejam $\boldsymbol{q_i, \ldots, q_n}$, as coordenadas generalizadas que traduzem o sistema dinâmico [1], onde T e U são as energias cinética e potencial, respectivamente, a equação Lagrangeana é definida por

$$\boldsymbol{L = (q, \dot{q}) = T - U} \qquad (2.1)$$

Como energia cinética e potencial são funções das coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, a equação Lagrangeana é a função dessas variáveis, logo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (2.2)$$

O quadrotor possui seis graus de liberdade, os quais são representados em coordenadas generalizadas

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\xi}] = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}] \in \mathbb{R}^6 \qquad (2.3)$$

Onde,

$\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}] \in \mathbb{R}^3$, corresponde ao deslocamento longitudinal, lateral e normal segundo o referencial inercial.

$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}] \in \mathbb{R}^3$, referencial em função dos três ângulos de Euler, $\boldsymbol{\phi}$ é o ângulo roll (rolagem), $\boldsymbol{\theta}$ é o ângulo pitch (arfagem) e $\boldsymbol{\psi}$ é o ângulo yaw (guinada).

$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}] \in \mathbb{R}^3$, velocidade angular.

O quadrotor apresenta um movimento de rotação com relação aos seus eixos, e um movimento de translação em relação a sua posição, assim baseado na equação (2.1) a equação Lagrangeana para o sistema do quadrotor é a equação a seguir

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{T}_{trans} + \boldsymbol{T}_{rot} - \boldsymbol{U} \qquad (2.4)$$

Onde vamos considerar

$$\boldsymbol{T}_{trans} = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{\Omega}}^t.\dot{\boldsymbol{\Omega}}$$

$$= \frac{m}{2}\,[\dot{\boldsymbol{x}}\ \dot{\boldsymbol{y}}\ \dot{\boldsymbol{z}}].\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{y}}\\ \dot{\boldsymbol{z}}\end{bmatrix}$$

$= \frac{m}{2}\,(\dot{\boldsymbol{x}}^2\ \dot{\boldsymbol{y}}^2\ \dot{\boldsymbol{z}}^2)$, energia cinética translacional.

$T_{rot} = \frac{1}{2} w^t . I . w$

$$= \frac{1}{2} [p\ q\ r] . \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$, energia cinética rotacional.

$U = mgz$, energia potencial do sistema.

Então a equação de Lagrange esta definida por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} [\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}] . \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta \quad \dot{\theta} c\phi + \dot{\psi} s\phi c\theta \quad -\dot{\theta} s\phi + \dot{\psi} c\phi c\theta] .$$

$$. \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta \\ \dot{\theta} c\phi + \dot{\psi} s\phi c\theta \\ -\dot{\theta} s\phi + \dot{\psi} c\phi c\theta \end{bmatrix} - mgz$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{x}^2\ \dot{y}^2\ \dot{z}^2) + \frac{1}{2} [(\dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta) I_{xx} \quad (\dot{\theta} c\phi + \dot{\psi} s\phi c\theta) I_{yy} \quad \dot{\psi} c\phi c\theta - \dot{\theta} s\phi] .$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta \\ \dot{\theta} c\phi + \dot{\psi} s\phi c\theta \\ \dot{\psi} c\phi c\theta - \dot{\theta} s\phi \end{bmatrix} - mgz$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta\right)^2 I_{xx} + \left(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}s\phi c\theta\right)^2 I_{yy} + \left(\dot{\psi}c\phi c\theta - \dot{\theta}s\phi\right)^2 I_{zz}\right]$$

$$-mgz \qquad (2.5)$$

Nota: estamos usando s= seno, c= cosseno.

Usando a equação de Lagrangeana, teremos as equações do movimento do sistema dinâmico

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (2.6)$$

Onde $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{F}$, é a forma de translação aplicada para cada uma das componentes (X, Y, Z), F é a força aplicada ao veículo, R é a matriz de rotação, τ são os momentos correspondentes aos ângulos de Euler, portanto a orientação do helicóptero será definida pela matriz de orientação, a qual relaciona o movimento nos eixos com os três ângulos de *Euler* [1].

2.3 Dinâmica do quadrotor

A orientação de um corpo rígido pode-se obter utilizando diversos métodos. A orientação relativa ao sistema de coordenadas mais utilizado para aplicações de engenharia aéreas espaciais é chamada como ângulos de Tait-Brijan [4]. Assim, esses ângulos são formados por três ângulos (neste caso ângulos de Euler) para descrever a rotação geral do espaço, através de três rotações sucessivas em torno dos eixos do sistema no qual ficam definidos [4].

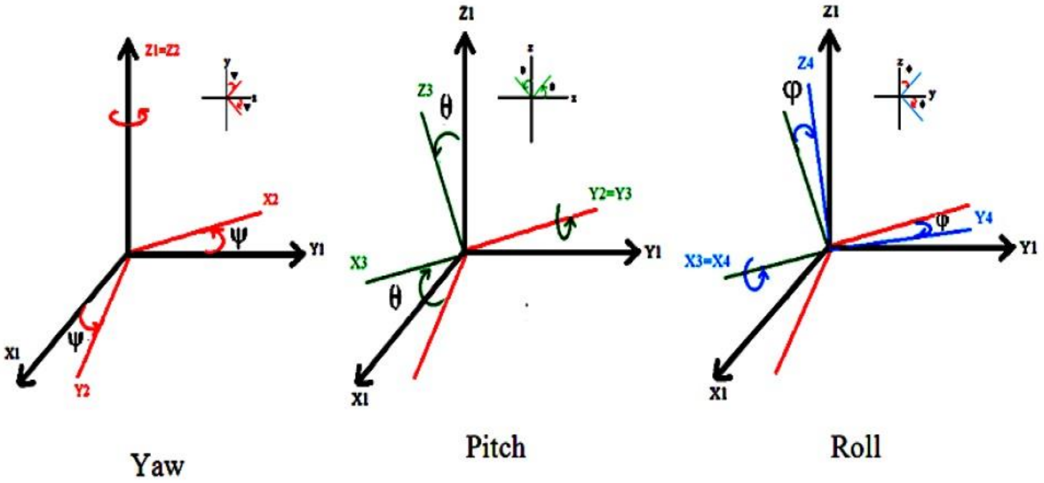

Figura 2- Rotação dos eixos (Fonte: Vianna (2007))

Temos,

$\boldsymbol{R_x(\phi)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{c\phi} & \boldsymbol{s\phi} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{-s\phi} & \boldsymbol{c\phi} \end{bmatrix}$, matriz de rotação de um ângulo $\boldsymbol{\phi}$ em torno do eixo *x*, no sentido horário.

$\boldsymbol{R_y(\theta)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c\theta} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-s\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{s\theta} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c\theta} \end{bmatrix}$, matriz de rotação de um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ em torno do eixo *y*, no sentido anti-horário.

$\boldsymbol{R_z(\psi)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c\psi} & \boldsymbol{-s\psi} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{s\psi} & \boldsymbol{c\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, matriz de rotação de um ângulo $\boldsymbol{\psi}$ em torno do eixo *z*, no sentido anti-horário.

A matriz de rotação corresponde para cada eixo em função dos ângulos de Tait-Brijan, representado na equação a seguir

$$\boldsymbol{R = [R_x(\phi).R_y(\theta).R_z(\psi)]} \qquad (2.7)$$

Assim temos

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\psi + s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi - s\psi s\phi \\ -s\psi c\theta & -s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & -s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

A cinemática de rotação pode ser obtida a partir da relação entre a matriz de rotação e o seu derivado com uma matriz simétrica de inclinação

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi tan\theta & c\phi tan\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi sec\theta & c\phi sec\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange, nas equações do movimento (2.6) e a dinâmica de rotação teremos

$$J(\zeta)\ddot{\zeta} + C(\zeta,\dot{\zeta})\dot{\zeta} = \tau \qquad (2.9)$$

Onde,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$C(\zeta,\dot{\zeta}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Estas equações podem ser encontradas nos artigos propostos por [3] e [8], validando a análise exposta neste trabalho.

3 Conclusão

Um estudo bibliográfico sobre os conceitos de modelagem dinâmica foi realizado para obtenção das equações do movimento de um quadrotor do tipo Xquad. Considerando que tal movimento é gerado pela ação de quatro motores rotativos. Ocorrendo a realização de três movimentos possíveis, rolagem, arfagem e guinada. O principal objetivo deste trabalho foi realizar a modelagem matemática da dinâmica do quadrotor. O modelo dinâmico foi determinado satisfatoriamente mediante o formalismo de Euler-Lagrange, que permite a determinação do movimento do sistema físico de um corpo.

As equações a partir deste método apresentaram uma não linearidade, porém é possível linearizar o modelo ao redor de um ponto de equilíbrio. Isso tornará o problema mais simplificado. Percebe-se uma semelhança entre os resultados expostos nas literaturas estudadas e as equações obtidas, no entanto nosso trabalho enfatiza a modelagem matemática da sua estrutura. Trabalhos futuros poderia implementar as equações em um software de simulação, por exemplo Matlab/Simulink e estudar as técnicas de controle para esse tipo de veiculo aéreo, por exemplo testar com técnica de controle PID (Proporcional Integral Derivativo).

Referências

[1] A. J. Gomes, Controle de forças de manipuladores robóticos, Dissertação de Mestrado em engenharia de eletrotécnica e de computadores, Universidade do Porto, (1994).

[2] D. A. Wells, Lagrangian Dynamics, McGraw-Hill Book company, (1967).

[3] E. Balasubramanian and R. Vasantharaj, Dynamic Modeling and Control of Quad Rotor, International Journal of Engineering and Technology, vol.5, 63-69, (2013).

[4] G. Vianna, Modelado y control de un helicóptero Quadrotor, Masters dissertation in engineering, Universidad de Sevilla, (2007).

[5] J. C. Paula, Desenvolvimento de um VANT do tipo Quadrirrotor para obtenção de imagens aéreas em alta definição, Dissertação de Mestrado, UFPR, (2012).

[6] L. Meirovitch, Methods of Analitical Dynamics, INC, (1970).

[7] S. K. Kim and D. M. Tilbury, Mathematical modeling and experimental identification of a model helicopter, Proceedings of the AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit, Boston, MA, USA, p. 203–213, (1998).

[8] T. Bresciani, Modeling, Identification and control of a Quadrotor Helicopter, Masters dissertation in control, Lund University (2008).