Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

doi 10.46943/X.CONEDU.2024.GT13.003

# USO DE MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DE QUÁDRICAS

Eliane Bihuna de Azevedo[1]
Elisandra Bar de Figueiredo[2]

## RESUMO

Entender e visualizar gráficos de funções tridimensionais pode ser uma tarefa difícil para alunos ingressantes no Ensino Superior. O uso de material concreto e softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra 3D, têm se mostrado grandes aliados nessa tarefa. Com esse embasamento desenvolvemos um trabalho, que apresentaremos neste texto, na disciplina de Geometria Analítica (GAN) de uma universidade pública para o estudo de superfícies quádricas com o uso de material concreto. Num primeiro momento foi elaborada uma sequência de atividades para abordar o conteúdo, partindo da forma clássica, apresentando as equações e encontrando as interseções com os planos coordenados, usando o material concreto apenas para facilitar a visualização. Em seguida, foi feita a associação entre as representações analíticas e gráficas. Por fim, propôs-se para os estudantes encontrarem a representação analítica de uma superfície tendo recebido a sua representação física em impressão 3D. Após a implementação dessa sequência em três turmas de GAN, por meio do trabalho colaborativo entre os docentes envolvidos, foram avaliadas as atividades e discutidas possíveis alterações, com o intuito de que fosse melhor explorado o material concreto disponível. Como resultado a sequência didática foi reelaborada com a proposta de ser implementada em sala de aula por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A nova sequência partiu do uso dos artefatos para auxiliar na identificação dos traços, posterior relação com as representações analíticas e culminando com a determinação da equação que descreve o sólido. A nova abor-

1 Professora do Departamento de Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Santa Catarina, eliane.azevedo@udesc.br;

2 Professora do Departamento de Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Santa Catarina, elisanda.figueiredo@udesc.br.

ISBN: 978-65-5222-019-6

dagem metodológica foi mais assertiva para o envolvimento dos estudantes, que conseguiram entender como os traços vão formando a superfície, mas ainda há pontos que podem ser aprimorados, dentre eles, o tempo destinado a realização das atividades e redução do número de problemas propostos.
**Palavras-chave:** Geometria Analítica, Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Ensino Superior, Trabalho colaborativo, Seções cônicas.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

## INTRODUÇÃO

A matemática, frequentemente percebida como uma disciplina abstrata e desafiadora, apresenta um conjunto de dificuldades que pode se manifestar de diversas maneiras, especialmente em estudantes com diferentes estilos de aprendizagem. Segundo Duval (2003), a capacidade de transitar entre as diferentes formas de representação (natural, gráfica, numérica e analítica) é essencial para a construção do conhecimento matemático. No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades significativas em visualizar e formalizar conceitos matemáticos. Tall (1991) ressalta a importância de uma relação mais estreita entre a intuição e o rigor matemático, destacando que o que pode parecer intuitivo para um matemático experiente nem sempre é claro para o aluno.

Nesse contexto, a tecnologia pode desempenhar um papel crucial na superação dessas barreiras. A incorporação de atividades que utilizam recursos tecnológicos, como o GeoGebra, software de geometria dinâmica, e materiais produzidos por impressão 3D, podem facilitar a aprendizagem, oferecendo representações que ajudam os estudantes a desenvolverem uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos. Além disso, uma abordagem metodológica em que o estudante participa da aula de forma mais ativa e comprometida com sua aprendizagem também pode propiciar ao estudante uma melhor compreensão dos novos conceitos matemáticos e suas diferentes formas de representação. Uma dessas abordagens é a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas (MEAAMaRP).

Com essas perspectivas e com acesso ao Laboratório Fábrica Matemática – FAB3D, da Universidade do Estado de Santa Catarina, no qual são produzidos materiais concretos usando impressão 3D e corte a laser e aplicativos dinâmicos no GeoGebra para o ensino de matemática para todos os níveis de ensino, propomos uma sequência didática para ensinar o conteúdo de superfícies quádricas por meio MEAAMaRP com o uso de materiais concretos e do software GeoGebra.

Nesse texto relatamos a evolução da sequência e os resultados da segunda aplicação, os detalhes estão descritos na seção metodologia. Na sequência do texto apresentamos o referencial teórico, a metodologia, os resultados e discussões e as considerações finais da atividade.

ISBN: 978-65-5222-019-6

## REFERENCIAL TEÓRICO

A matemática utiliza diferentes sistemas de signos, como gráficos e expressões algébricas, que podem ser convertidos entre si, mas cuja interpretação pode variar de acordo com o contexto do aprendiz (Duval, 2003). Ao trabalhar com superfícies quádricas, por exemplo, o estudante pode identificar a representação algébrica de uma superfície, mas pode sentir dificuldades para representar graficamente ou vice-versa. Para que se possa falar em aquisição de conhecimento ou conceitualização, o estudante deve ser capaz de transitar naturalmente por diferentes registros. Para Duval (2003, p. 15), "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas".

A utilização de materiais manipuláveis produzidos por impressão 3D pode facilitar essa transição, permitindo que os estudantes interajam fisicamente com as superfícies quádricas, promovendo uma exploração mais rica e significativa dos conceitos matemáticos e uma melhor integração dos diferentes registros semióticos.

A impressão 3D, desenvolvida na década de 1980 para prototipagem rápida, tem se mostrado uma ferramenta valiosa na educação, especialmente no ensino de Matemática. Essa tecnologia possibilita a criação de artefatos que representam as superfícies quádricas, tornando conceitos abstratos mais tangíveis.

Embora a impressão 3D seja uma inovação recente, a utilização de modelos tridimensionais na educação não é nova. Slawkovsky (2012) aponta que educadores têm empregado representações tridimensionais feitas de diversos materiais por séculos, como evidenciado nos "Elementos de Euclides", que incluíam objetos dobrados de papel para facilitar a demonstração de conceitos espaciais.

Conforme argumenta Oliveira (2014), a visualização física associada às tecnologias digitais abre novos cenários para a exploração e investigação matemática, criando um importante elo entre o estudante e o objeto de estudo. Dessa forma, a impressão 3D aliada a representação dinâmica dos gráficos em softwares como o GeoGebra não apenas enriquece os processos de ensino e de aprendizagem, mas também pode potencializar a compreensão de conceitos matemáticos, tornando-os mais tangíveis e concretos. Lemke, Siple e Figueiredo (2016), enfatizam que a interação com objetos físicos oferece uma compreen-

ISBN: 978-65-5222-019-6

são diferenciada em relação ao objeto virtual, cuja complexidade pode tornar a abstração quase impossível.

A integração da visualização física por meio de tecnologias digitais, como a impressão 3D e softwares interativos como o GeoGebra, não apenas pode facilitar a exploração matemática, como também pode auxiliar o estudante na resolução de problemas.

A resolução de problemas é um termo muito utilizado nos variados aspectos de nossa vida e refere-se a um processo sistemático em que um indivíduo ou grupo identifica, analisa e busca soluções para questões ou desafios específicos. Na matemática, é uma habilidade que pode estimular o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de tomar decisões. No entanto, a resolução de problemas tanto pode ser vista como o ato de solucionar um problema como uma forma de ensinar matemática.

Desde a publicação da primeira edição do livro "How to Solve It" de Polya, em 1945, a resolução de problemas em sala de aula tem sido bastante discutida. De acordo com Schroeder e Lester[3] (1989) há três concepções acerca de resolução de problemas que são ensinar *para/sobre/através* da resolução de problemas. O ensinar para resolver problemas ocorre quando os chamados problemas são propostos ao final de um conteúdo como uma aplicação; ensinar sobre ocorre quando se está ensinando estratégias para solucionar problemas, nesta concepção, se situam os trabalhos de Polya (2006); e, ensinar através da resolução de problemas pode ser entendida como uma metodologia de ensino, pois é uma forma de ensinar novos conteúdos matemáticos partindo do conhecimento prévio dos estudantes. Esta é a concepção de resolução de problemas que tratamos neste artigo.

Allevato e Onuchic (2021) afirmam que não há formas rígidas de implementar em sala de aula a MEAAMaRP, mas a partir de experiências de seu grupo de pesquisa, sugerem um roteiro com dez etapas: proposição do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo; e, proposição e resolução de novos problemas. Embora este roteiro possa ser adaptado conforme as necessidades da turma, é fundamental que não se perca a essência da metodologia, que se concentra na discussão coletiva

3 Esses autores dizem que essa classificação das concepções de resolução de problemas foi divulgada a primeira vez por Hatfield (1978).

ISBN: 978-65-5222-019-6

(momento da plenária) e na formalização do conteúdo (Azevedo, Figueiredo, Palhares, 2020, p. 7).

Um docente que deseja utilizar a MEAAMaRP inicialmente deve escolher/propor o problema, chamado de problema gerador, cuja solução permitirá abordar o novo conteúdo almejado. Em sala de aula, os estudantes desenvolverão rabalhos em grupos de pelo menos dois estudantes[4]. A função do docente será mediar o trabalho. Os estudantes costumam questionar se o que fizeram está certo ou errado, o professor deverá responder com observações e/ou questionamentos que levem os estudantes a refletirem se a estratégia adotada está adequada ou se precisam pensar de outra forma. Além disso, o docente, como mediador, pode sugerir algum problema auxiliar para ajudar o grupo ou a turma a entender uma dificuldade que estão tendo na resolução. Depois de resolvido o problema, deve ser organizado o compartilhamento das resoluções, seja por registros na lousa, em cartazes, de forma oral, dentre outras tantas estratégias possíveis. A melhor forma de realizar a plenária que propícia a discussão coletiva em busca do consenso depende do tipo de problema gerador proposto, além da quantidade de grupos, pois se for um grande número, pode ficar inviável todos registrarem as resoluções no quadro, como recomendado pelo roteiro supracitado. Após essa etapa, faz-se o fechamento com a formalização do conteúdo, que é o momento em que o docente insere definições, nomenclaturas e formalismo matemático. Por fim, o docente propõe novos problemas para dar continuidade ao desenvolvimento do conteúdo e/ou pode desafiar os estudantes a usarem sua criatividade para criarem novos problemas que envolvem o conteúdo de trabalhado. Para a formulação de problemas o professor pode deixar o tema livre, fornecer condições que devem ser satisfeitas ou os problemas devem ser reformulações de problemas já resolvidos, ou seja, tratam-se, respectivamente, de problema livre, problema semiestruturado ou problema fechado. Essa é a tipologia de acordo com Stoyanova (1997).

Nesse trabalho usamos a MEAAMaRP como metodologia de ensino e integramos o uso de materiais concretos e o software GeoGebra no ensino de quádricas, na sequência descrevemos a metodologia do trabalho.

4 Recomenda-se que não seja um número grande de integrantes em cada grupo para que todos possam interagir.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

## METODOLOGIA

O trabalho apresentado neste texto se trata de uma pesquisa qualitativa intepretativa, pois de acordo com Moreira (2002, p.1-2) na pesquisa qualitativa (intepretativa), o interesse central está

> em uma *interpretação dos significados* atribuídos pelos sujeitos a suas *ações* em uma *realidade socialmente construída*, através de *observação participativa*, isto é, o pesquisador fica imerso no fenômeno de interesse. Os *dados* obtidos por meio dessa participação ativa são de *natureza qualitativa* e analisados correspondentemente. As *hipóteses* são *geradas* durante o processo investigativo. O pesquisador busca *universais concretos* alcançados através do estudo profundo de casos particulares e da comparação desse caso com outros estudados também com grande profundidade. Através de uma narrativa detalhada, o pesquisador busca credibilidade para seus modelos interpretativos. (Moreira, 2002, p.3-4; grifo do autor).

A primeira sequência de atividades, desenvolvida com a colaboração de uma mestranda, foi implementada em três[5] turmas de Geometria Analítica (GAN) da UDESC/Joinville, no segundo semestre de 2019 e era composta por três questões que visavam abordar o conteúdo de superfícies quadráticas partindo do analítico e finalizando com o uso de material concreto para fazer a transição entre diferentes registro de representação. A sequência foi organizada em três momentos. No primeiro momento, foram apresentadas as definições de superfícies quádricas e de traço (interseção da superfície com planos coordenados ou paralelos a planos coordenados) e um exemplo de como construir, passo a passo, a representação gráfica de um superfície conhecendo-se a sua equação. Após esta explicação detalhada era proposto aos estudantes a primeira questão, na qual deveriam contruir o gráfico de seis superfícies (paraboloide elíptico; hiperboloide de uma folha; elipsoide; cone; hiperboloide de duas folhas; e, paraboloide hiperbólico) seguindo o passo a passo do exemplo. Convém salientar que, para a sala de aula, foram levados artefatos feitos usando impressão 3D que representam as superífices quadráticas abordadas na questão 1, os quais foram utilizados apenas para auxiliar na visualização. Por esta descrição, é possível identificar que, apesar de ter sido levado o material concreto para a sala de aula,

5 A professora de uma dessas turmas foi a primeira autora desse trabalho.

ISBN: 978-65-5222-019-6

ele foi pouco explorado e a estratégia metodológica adotada pelos professores foi a tradicional. Pode-se dizer que os docentes trabalharam com a resolução de problemas sob a concepção de ensinar sobre resolver problemas.

Em um segundo momento, foi proposta a questão 2 que, no enunciado, fornecia um quadro com o nome das superfícies quádricas e sua respectiva equação padrão e, em seguida, apresentava três colunas (A, B e C). Na coluna A encontram-se seis equações de superfícies quádricas (de a até f). Na coluna B estavam seis imagens de artefatos feito com impressão 3D para que os estudantes fizessem a associação entre as equações apresentadas na coluna A com as representações concretas da coluna B. E, na coluna C, o estudante deveria fornecer o nome da quádrica. Essa atividade explorava a conversão entre diferentes registros de representação: algébrico (nas equações), gráfico/figural (nas imagens) e linguagem natural (no nome das equações).

No terceiro momento, foi proposta a questão 3 que consistia em obter a representação analítica de uma superfície quádrica a partir das medidas que deveriam ser aferidas a partir de um artefato físico recebido na visita ao Laboratório Fábrica Matemática (FAB3D) que tinha no seu acervo os materiais concretos que representavam quádricas, além de diversos outros materiais para o ensino de matemática. Essa atividade foi realizada em horário extraclasse. Para que os estudantes pudessem realizá-la, foi exemplificado, passo a passo, como obter-se-ia a equação de um elipsóide e de um hiperbolóide de duas folhas a partir das medidas aferidas diretamente no artefato.

Por fim, após a implementação desta sequência, cada docente envolvido relatou suas percepções sobre a atividade, apresentando pontos positivos que julgavam estar adequados e pontos que precisariam ser reformulados. Os professores participantes desta experimentação propuseram alterações com o intuito de que as potencialidades do uso material concreto pudessem ser melhor exploradas e que facilitassem a aprendizagem em vez de servir apenas como um objeto ilustrativo. Como resultado deste trabalho colaborativo, a sequência de atividades foi reelaborada com o intuito de que a implementação em sala de aula seja por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas (MEAAMaRP).

A nova sequência desenvolvida, com auxílio de uma bolsista de IC, é constituída de sete problemas os quais exploram o material concreto e gradualmente vão passando para a representação geométrica e algébrica fazendo como o aluno transite entre diferentes registros de representação.

ISBN: 978-65-5222-019-6

Essa nova sequência foi implementada em uma turma de Geometria Analítica da UDESC/Joinville, no primeiro semestre letivo de 2023, cuja professora é a segunda autora. Ao todo foram utilizadas quatro horas aulas para o desenvolvimento da sequência. Ou seja, ela foi desenvolvida em dois dias de aula da disciplina. Ao todo 13 alunos, que foram divididos em quatro grupos, sendo três trios e um quarteto (G1, G2, G3 e G4), participaram no primeiro dia, e 19 no segundo. Dois dos seis alunos que vieram somente no segundo encontro passaram a integrar dois trios que vieram na primeira aula e, os outros quatro formaram um novo quarteto (G5). No primeiro dia estavam mediando a atividade a professora regente (segunda autora) e a bolsista de IC. No segundo dia apenas a professora regente conduziu as atividades.

No primeiro dia os quatro grupos conseguiram finalizar a resolução dos problemas 1 e 3 e três grupos conseguiram finalizar a questão 4. O segundo problema no momento da aula a professora considerou muito parecido com o primeiro e disse para os alunos usarem apenas a denominação das quádricas nele apresentado. O quarto e quinto problema os alunos deveriam terminar extraclasse e postar a resolução na plataforma online da disciplina. Com relação ao roteiro de atividades de Allevato e Onuchic (2021), foram desenvolvidas as cinco primeiras etapas nesta aula e extraclasse. No segundo dia de aula foi realizada a plenária e busca do consenso dos problemas 1, 3, 4 e 5 propostos e a formalização do conteúdo de quádricas. Ao final da discussão coletiva e formalização foram propostos os dois últimos problemas desta sequência de atividades que se referiam a modelagem de uma equação de quádrica através dos dados coletados no modelo físico e a proposição/formulação de novos problemas. O detalhamento das atividades propostas nesta segunda versão da sequência, um resumo de como foi conduzidada a aula e a análise dos resultados, a partir das resoluções escritas dos estudantes, serão apresentados na próxima seção. Convém salientar ainda que a coleta dos dados dessa pesquisa qualitativa se deu pelos registros escritos dos alunos e observações e relatos dos docentes envolvidos.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

O problema 1 (Quadro 1) almejava que os estudantes identificassem as seções cônicas resultantes da interseção de um plano com uma superfície quádrica.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

**Quadro 1:** Problema 1

Vocês receberam um material concreto que é a representação de uma superfície (ou parte dela). Observem essa superfície e imaginem-na em um referencial cartesiano em que o centro ou vértice esteja na origem do sistema de coordenadas $XYZ$, como, por exemplo, na Figura 1.

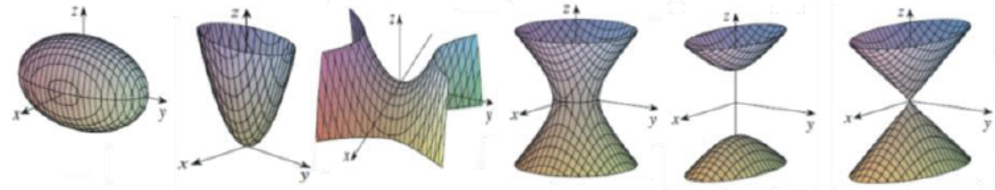


Figura 1: posição das superfícies

Use as imagens da Figura 1 para indicar o posicionamento do artefato recebido com relação ao plano cartesiano. Se você utilizar outro posicionamento para os eixos coordenados, favor indicar o referencial cartesiano utilizado. Considerando o posicionamento escolhido:

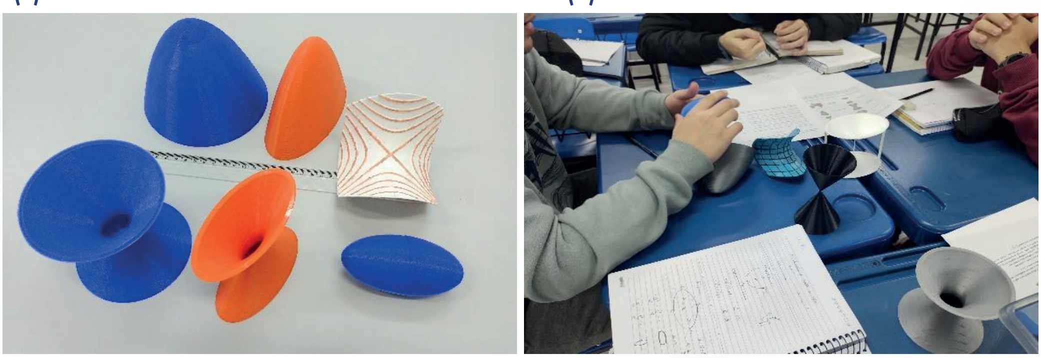
a) quais são as interseções dessa superfície com os planos coordenados?
b) quais são as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados?
c) apoiando-se no conhecimento de cônicas, identifique as equações cartesianas das curvas resultantes da interseção do artefato com os planos coordenados, apresentando as equações de forma genérica. Por exemplo, se a interseção no plano $x0z$ for uma hipérbole com eixo real em $x$ você colocará $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$.

**Fonte:** elaborado pelas autoras (2023).

Para realização da atividade foram utilizados materiais concretos produzidos por impressão 3D pelo FAB3D. Na Figura 1(a) pode-se observar os materiais usados e na Figura 1(b) uma das equipes manipulando-os.

**Figura 1:** Resolução do p o material concreto.

**(a)** **(b)**



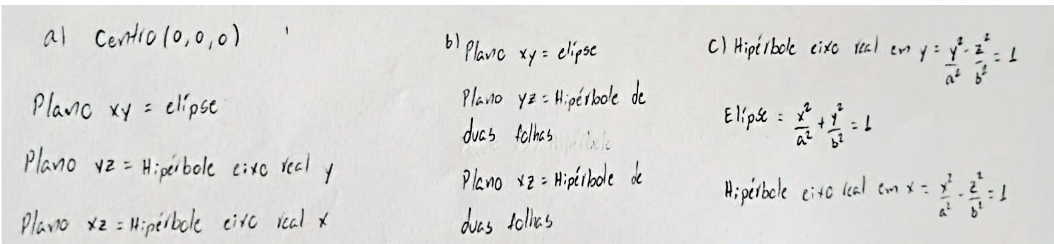
**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

As superfícies que os grupos G1, G2, G3 e G4 receberam foram, respectivamente, paraboloide, hiperboloide de duas folhas, hiperboloide de uma folha e hiperboloide de duas folhas. Todas as equipes apresentaram solução correta

ISBN: 978-65-5222-019-6

para os três itens propostos. Dois grupos responderam os itens (a) e (b) da questão fazendo um esboço de cada traço e outros dois grupos apenas identificaram por escrito qual seria a curva resultante da interseção da superfície com o respectivo plano requerido em cada item. No item (c) todos apresentaram as respectivas equações cartesianas das curvas resultantes da interseção da superfície com os planos coordenados, identificando-as. Observamos que os alunos tiveram que posicionar/imaginar a superfície recebida em material concreto em um referencial cartesiano, ou seja, eles fazem um tratamento no registro concreto. Posteriormente eles precisam identificar as curvas de interseção do material com planos do referencial e escrever as equações dessas cônicas, fazendo uma conversão do registro no material concreto para o registro algébrico. A Figura 2 ilustra a solução de G3.

**Figura 2:** Solução do problema 1 por G3.

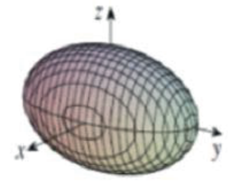
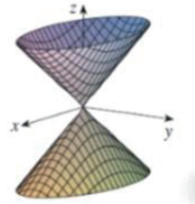
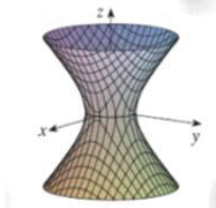
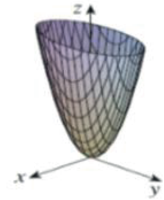
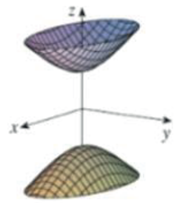
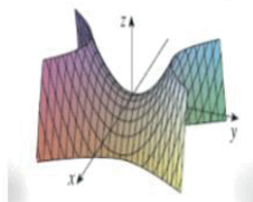



**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

O Problema 2 apresentava um quadro com o nome de cada superfície quádrica associada a sua representação geométrica (Quadro 2) e previa que cada equipe recebesse um kit com pelo menos um artefato concreto como representação de cada modelo de quádrica. A partir disso, os alunos deveriam escolher um dos artefatos que representa uma quádrica, imaginar esse artefato num referencial cartesiano XYZ como as figuras ilustradas no quadro (que receberam) e descrever as interseções dessas superfícies com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados. Como esse problema repetia todos os passos do Problema 1, a professora regente disse para os alunos usarem os nomes das quádricas dados nesse enunciado para classificarem a quádrica do Problema 1. Essa escolha foi feita para otimizar o tempo de aplicação e também pelo fato que as equipes iriam apresentar os resultados para os colegas, então consequentemente eles teriam a discussão de outras superfícies diferente da que receberam no Problema 1.

ISBN: 978-65-5222-019-6

**Quadro 2:** Nomes e representações gráficas das superfícies quádricas do Problema 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| Elipsoide |  | Cone elíptico |  |
| Hiperboloide de uma folha |  | Paraboloide elíptico |  |
| Hiperboloide de duas folhas |  | Paraboloide hiperbólico |  |

**Fonte:** Elaborado pelas Autoras (2023).

No início da atividade foi observado que os estudantes estavam apreensivos, pois precisavam do conhecimento de conteúdos abordados ao longo do semestre (cônicas, plano cartesiano tridimensional, equações de planos). Com auxílio da professora e da bolsista de IC, respeitando o ritmo de cada grupo, todos finalizaram os três primeiros problemas. Como nem todos os estudantes estiveram presentes a professora da turma entrou em contato por e-mail com os que faltaram para que pudessem fazer a atividade antes da aula seguinte e assim também participar ativamente das discussões. Porém, apenas um aluno atendeu à solicitação, esse aluno integrou o G5.

Os problemas 3 e 4 (Quadro 3) forneciam a equação de uma superfície quádrica, sem atribuir-lhe nome, e induzia o estudante a encontrar a equação da seção cônica que resultava da interseção desta superfície com os planos coordenados e a identificá-la. Por fim, os alunos usariam essas seções cônicas para representar a superfície.

ISBN: 978-65-5222-019-6

**Quadro 3:** Problemas 3 e 4

**Problema 3.** Os traços de uma superfície são obtidos através da interseção dessas com os planos coordenados, ou, planos paralelos aos coordenados. Dada a superfície de equação

$$y = \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4}$$

responda os itens a seguir:

a) fazendo $y = 0$ na equação da superfície tem-se, no plano $y0z$, a equação ________________________________________

Logo, o traço é uma ________________________________ (nome da cônica).

b) fazendo $y = 4$ na equação da superfície tem-se, no plano $y = 4$, a equação ________________________________________

Logo, o traço é uma ________________________________ (nome da cônica).

c) fazendo $x = 0$ na equação da superfície tem-se, no plano $y0z$, a equação ________________________________________

Logo, o traço é uma ________________________________ (nome da cônica).

d) fazendo $z = 0$ na equação da superfície tem-se, no plano $x0y$, a equação ________________________________________

Logo, o traço é uma ________________________________ (nome da cônica).

Após terem sido feitas a identificações dos traços, represente todos no mesmo referencial. Se for necessário faça mais traços para conseguir ter uma representação da superfície quádrica.

**Problema 4**. Em cada um dos itens abaixo é dada uma equação referente a uma superfície quádrica. Considere a equação dada e determine seus traços nos planos coordenados e em alguns planos paralelos aos planos coordenados. Represente geometricamente esses traços, identifique a superfície e faça um esboço da superfície.

a) Considere a equação $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ e responda:
   i) Qual a interseção com o plano $xy$?
   ii) Qual a interseção com o plano $xz$?
   iii) Qual a interseção com o plano yz?
   iv) Qual a interseção com o plano $z = 2$?

b) Considere a equação $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ e responda:
   i) Qual a interseção com o plano $xy$?
   ii) Qual a interseção com o plano $xz$?
   iii) Qual a interseção com o plano yz?
   iv) Qual a interseção com o plano $z = 2$?

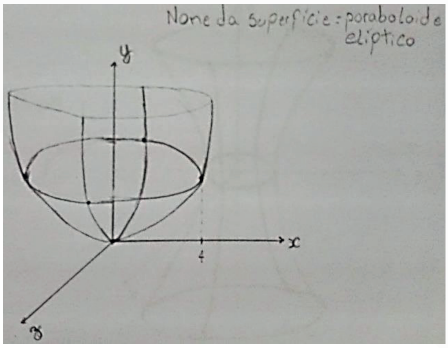
**Fonte:** elaborado pelas autoras (2023).

Com relação ao Problema 3, todos os grupos identificaram corretamente os cônicas oriundas da inteseção das superfícies com os planos coordenados. A segunda parte do problema que era para fazer a representação da superfície a partir dos traços foi feita corretamente por quatro grupos. Um grupo não fez esta segunda parte. Nesse problema os alunos começaram no registro algébrico e fazendo tratamentos na equação quádrica, obtiam as equações das cônicas que eram representadas bidimensionalmente nos planos de interseção, fazendo uma conversão para o registro gráfico e por fim, um tratamento nesse registro para interpretar a superfície tridimensional. Nos problemas 4 e 5 identificamos

ISBN: 978-65-5222-019-6

as mesmas conversões e tratamentos. Na Figura 3, apresenta-se o paraboloide elíptico apresentado pelo G4.

**Figura 3:** Superfície quádrica do Problema 3 por G4.




**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

O item a do Problema 4 foi resolvido corretamente por três grupos. O quarto grupo identificou os traços assertivamente, mas não representou a superfície quádrica. Com relação ao item b, dois grupos resolveram corretamente, na Figura 4a temos a resolução de G1; um grupo fez a identificação dos traços (nos planos coordenados) corretamente, mas representou o elipsoide com centro fora da origem; e, um grupo ilustrou meia elipse dois planos coordenados e não fez a representação da superfície, como ilustra a Figura 4b.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

**Figura 4:** Resoluções do item (b) do Problema 4.

**Figura 4a:** Resolução G1

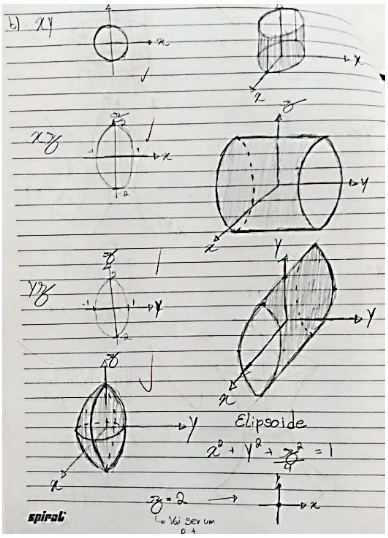
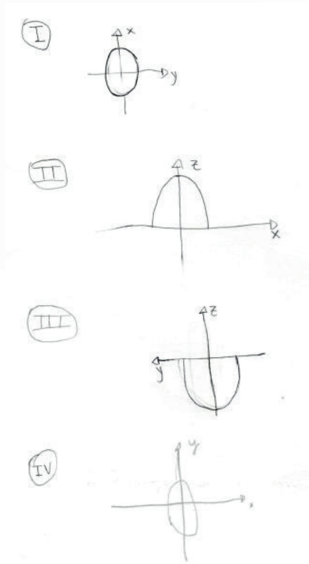



**Figura 4b:** Resolução G2




**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

O problema 5 fornecia equações de superfícies e solicitava que usando o conhecimento anterior fossem encontrados os traços e identificadas as superfícies (Quadro 4).

**Quadro 4:** Problema 5

Usando as ideias desenvolvidas nos problemas anteriores identifique a quádrica que representa cada equação a seguir. Justifique sua resposta. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}_+$.

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

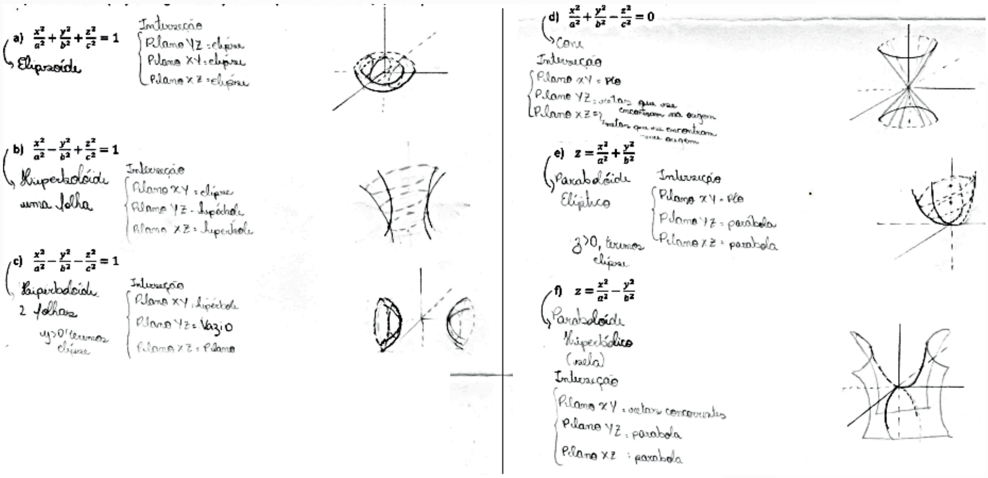
e) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ f) $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2023).

Na solução do Problema 5, três grupos identificaram as superfícies e todos os traços e, um grupo, apenas atribuiu o nome das superfícies, sem justificativas. Esse grupo classificou erroneamente o item e) como sendo uma sela. G2 foi o único que além de analisar os traços e identificar as superfícies, ilustrou a quádrica. Apesar desse grupo ter identificado corretamente todas as superfícies, se equivocaram na determinação do traço no plano do item c), disseram que era um plano em vez de uma hipérbole (Figura 5).

ISBN: 978-65-5222-019-6

**Figura 5:** Solução do Problema 5 por G2



**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

O segundo dia de aula iniciou com a plenária. Os quatro grupos do primeiro dia apresentaram oralmente suas conclusões sobre o Problema 1. Simultaneamente foi feita a discussão e chegada ao consenso. Também foram feitas comparações com as quatro superfícies diferentes que foram apresentadas: hiperboloide de uma folha, hiperboloide de duas folhas, elipsoide e paraboloide. Depois dessa discussão a professora fez uma formalização usando as superfícies em material concreto e as suas representações geométricas no software GeoGebra, destacando as características de cada uma em relação às interseções com os planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados. Após isso, o Problema 3 e os dois itens do Problema 4 foram apresentados, cada um por uma equipe. Dizendo como procederam com as equações dadas para encontrar as interseções e assim identificar a superfície. Todos pensaram de forma correta e com as interseções conseguiram concluir a superfície. Essas três equipes já tinham feito a questão 3 na aula anterior em sala. Depois foi feita uma plenária e discussão em conjunto sobre o Problema 5. Ao perguntar para as equipes como fizeram, um estudante respondeu que usou o GeoGebra atribuindo valores para as incógnitas , e para entender e identificar a superfície. Outros não falaram explicitamente, mas provavelmente usaram o livro de apoio. Durante a discussão foram sendo observadas as interseções com os planos, como tinha sido feito no exercício anterior, observando essas interseções no material concreto. Depois dessa discussão, a professora fez a formalização do conteúdo e indicou mais problemas para serem resolvidos, além de dar as orientações para realizarem de forma extraclasse, como trabalho, os Problemas 6 e 7.

ISBN: 978-65-5222-019-6

No Problema 6 os estudantes foram desafiados a encontrarem e equação da superfície quádrica que representa um dos sólidos do material manipulável. Para tanto foi fornecido o exemplo, apresentado no Quadro 5, de como poderiam proceder.

**Quadro 5:** Problema 6

Seu grupo recebeu um objeto concreto para esta questão. Após ler o exemplo 6.1, siga as orientações para chegar na equação da superfície do seu objeto.

**Exemplo 6.1.** O exemplo a seguir apresenta, de forma detalhada, como obter a representação analítica de um **hiperboloide de duas folhas**, a partir de um objeto concreto.
Seja um hiperboloide de duas folhas orientado no eixo z e centrado na origem, como na Figura 1.

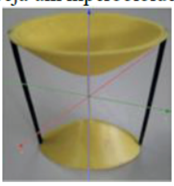


Figura 1

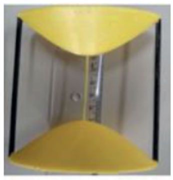


Figura 2

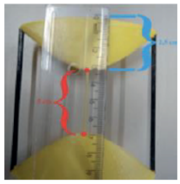


Figura 3


Figura 4

Visto que a equação característica de um hiperboloide de duas folhas orientado no eixo z é dada por $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, o objetivo é definir os valores de $a^2, b^2$ e $c^2$.

Como indicado na Figura 2, a distância entre as hipérboles é de $5\ cm$. Dessa forma, como o hiperboloide de duas folhas está centrado na origem, a distância do ponto (0, 0, 0) a cada hipérbole é 2,5 cm. Logo, a interseção do hiperboloide de duas folhas com o eixo z define dois pontos (0, 0, 2,5) e (0, 0, -2,5). Substituindo esses pontos na equação característica obtemos $c^2 = 6{,}25$.

Na Figura 3, mediu-se a distância entre duas elipses simétricas em relação ao eixo $z$. Note que, como a distância entre essas elipses é de $10\ cm$ e a distância entre as hipérboles é de $5\ cm$, conforme a Figura 2, temos que a distância entre o ponto inicial da hipérbole e a referida elipse é de $2{,}5\ cm$. Logo, a distância entre a origem e a elipse em questão é de $5\ cm$.

Assim, fica mais fácil determinar $a^2$ e $b^2$ utilizando a interseção com os planos $z = 5$ e $z = -5$. Quando $z = 5$ ou $z = -5$, temos uma elipse de raio menor medindo 2 cm e raio maior medindo 4 cm, como mostra a Figura 4.

Substituindo $z = 5$ e $c^2 = (2{,}5)^2$ na equação caraterística, temos que:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{5^2}{(2{,}5)^2}=1 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{5^2}{(2{,}5)^2}=3 \Rightarrow \frac{x^2}{3a^2}+\frac{y^2}{3b^2}=1$$

Sabendo que a equação característica da elipse é dada por

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$$

como o raio menor está contido no eixo $x$, temos que:

$$3a^2 = 2^2 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3}$$

e, como o raio maior está contido no eixo $y$, temos que:

$$3b^2 = 4^2 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{3}$$

Portanto, os valores de $a^2, b$ e $c^2$ foram determinados e, assim, é possível escrever a equação desse hiperboloide de duas folhas como:

$$-\frac{3x^2}{4}-\frac{3y^2}{16}+\frac{z^2}{6{,}25}=1$$

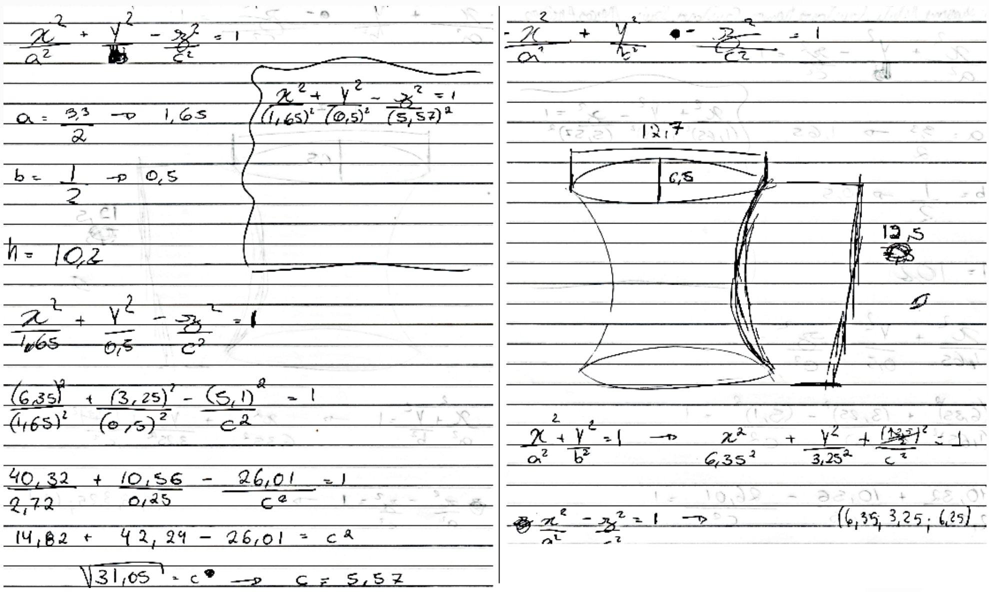
Agora é a sua vez! A partir do exemplo anterior, detalhadamente descrito, faça as medições necessárias para obter qual é a equação da superfície quádrica. Siga o passo a passo com sua própria peça e utilize o espaço abaixo para anotar as medições e desenvolvimento matemático necessário para se obter a equação da superfície.

**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2023).

ISBN: 978-65-5222-019-6

A partir da análise das resoluções apresentadas para o Problema 6, inferimos que foi um problema difícil para os estudantes, pois somente G1 apresentou a solução correta (Figura 6).

**Figura 6:** Solução do Problema 5 de G1

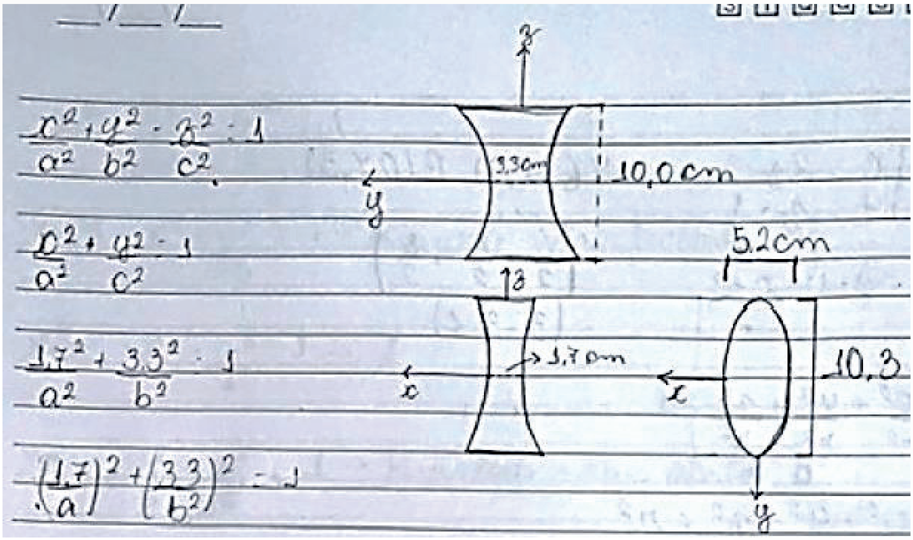


**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

Os demais grupos tomaram as medidas do artefato, mas utilizaram os dados de forma equivocada. Como exemplo disso, observe parte da resolução apresentada por G4, na Figura 7. Nesta imagem observa-se que em vez de utilizar as medidas 1,7 cm e 3,3 cm como sendo a medida do eixo menor e maior, respectivamente, da elipse no plano , o grupo substituiu esses valores nas variáveis e da equação da elipse no plano , otendo assim uma equação com incógnitas e .

ISBN: 978-65-5222-019-6

**Figura 7:** Solução do Problema 5 por G2




**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

O problema 7 (Quadro 6) era para o estudante elaborar um problema envolvendo das superfícies quádricas.

**Quadro 6:** Problema 7

| |
|---|
| Elabore um problema envolvendo os conceitos de superfícies quádricas. Se quiser você pode utilizar algum material do FAB3D no seu enunciado. Não pode ser um exercício da lista e nem pronto num livro. Além de criar a questão, você deve resolvê-la de forma detalhada. |

**Fonte:** elaborado pelas autoras (2023).

Com relação aos problemas que foram elaborados, três grupos criaram seus problemas e apresentaram a resolução. Destes, um elaborou dois problemas, um de caráter totalmente matemático e outro que aborda uma contextualização. Dos quatro problemas formulados, três deles eram parecidos. Eles forneciam a equação de uma superfície e solicitavam que fosse identificada a quádrica (Figura 8) ou os traços. E, nessa questão, um dos grupos solicitou que fosse feita a representação da superfície. O grupo utilizou o GeoGebra para apresentar a superfície.

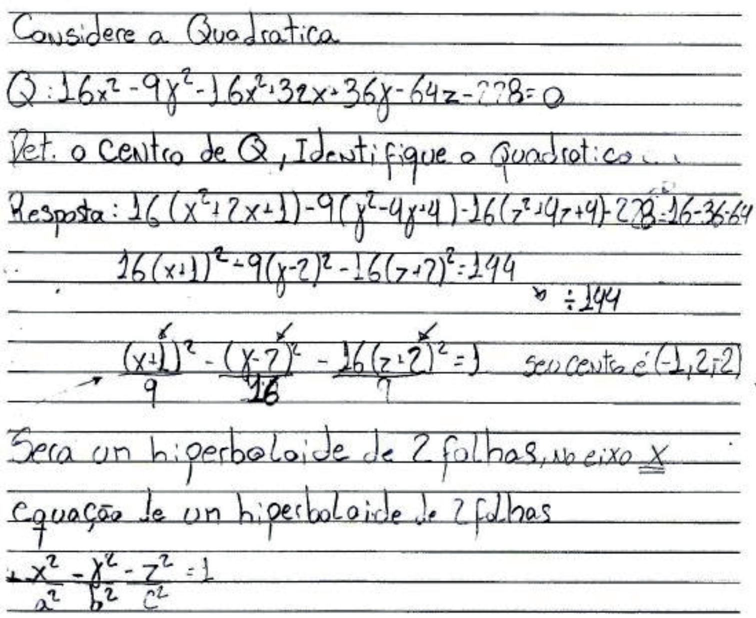
**Figura 8:** Problema formulado por G4

**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

ISBN: 978-65-5222-019-6

A questão mais matemática de G2 em que se dava a equação de uma superfície e, pela resolução, desejava-se que fosse encontrado os traços com os planos coordenados, mas no enunciado foi solicitado para encontrar as quádricas em vez de cônicas (Figura 9).

**Figura 9:** Problema formulado por G2



Considere a Quadratica

$Q: 16x^2 - 9y^2 - 16z^2 + 32x + 36y - 64z - 228 = 0$

Det. o Centro de Q, Identifique a Quadratica.

Resposta: $16(x^2+2x+1) - 9(y^2-4y+4) - 16(z^2+4z+4) = 228 + 16 - 36 - 64$

$16(x+1)^2 - 9(y-2)^2 - 16(z+2)^2 = 144$ $\div 144$

$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} - \frac{16(z+2)^2}{9} = 1$ seu centro é $(-1, 2, -2)$

Sera un hiperboloide de 2 folhas, no eixo x

equação de un hiperboloide de 2 folhas

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

O segundo problema criado por G2, apresentou uma situação contextualizada em que se utilizava uma superfície cônica e um cilindro circular. Solicitava-se para encontrar o raio do cone para que a altura fosse 5 metros (Figura 10). Na resolução apresentada o grupo utilizou equivocadamente a proporcionalidade, pois considerando um secção transversal passando pelo vértice do cone, as figuras envolvidas não são semelhantes. Esta interpretação de figuras semelhantes estamos inferindo que foi realizada no momento que fizeram o quociente entre raio e altura do cone igual ao quociente entre raio e altura do cilindro. Observe que o problema formulado teria solução imediata, pois pela forma como foi apresentado, o cone está justaposto ao cilindro. Logo, o raio do cone seria ser igual ao raio do cilindro.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

**Figura 10:** Problema formulado por G2

Encontre as quádricas da equação: $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

$2x^2 / 16 + 4y^2 / 16 + z^2 / 16 = 16$

$X^2/8 + y^2/4 + z^2/16$

Trocando $x = 0$

$Y^2/4 + z^2/16 = 1$

Temos a elipse $a = +-4$ e $b= +-2$

Trocando $y = 0$

$X^2/8 + z^2/16 = 1$

Temos a elipse $a= +-4$ e $b = 2\sqrt{2}$

Trocando $z = 0$

$X^2/8 + y^2/4 = 1$

Temos a elipse $a = +- 2\sqrt{2}$ e $b = +-2$

**Fonte:** Dados da Pesquisa (2023).

Por fim, dos quatro problemas elaborados temos que dois deles tanto enunciado como resolução apresentada estão corretos, que correspondem as soluções G3 e G4. E, de G2, ambos problemas estão parcialmente corretos, pois o primeiro problema (Figura solicita algo que não é possível, que seria encontrar as quádricas associadas com a equação dada, mas pela resolução inferimos que confundiram a palavra quádrica com cônica ou traço. E, no problema contextualizado (Figura 10), a formulação está adequada, porém identificou-se erro na resolução.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nova sequência começou com o uso de artefatos para ajudar na identificação dos traços, seguido pela relação com as representações analíticas e culminando na formulação da equação que descreve o sólido. Essa abordagem metodológica se mostrou mais eficaz para envolver os estudantes, pois partia do concreto para apenas num segundo momento chegar no abstrato, assim os alunos que conseguiram compreender como os traços moldam a superfície. A MEAAMaRP também foi importante, pois permitiu que os alunos usassem o conhecimento que tinham para transitar entre o registro no material concreto para o registro algébrico, sem a condução do professor. Eles precisavam observar a forma física e identificar as curvas para encaixar na equação e vice-versa. Assim, faziam tratamentos dentro do mesmo registro e conversões entre diferentes registros.

Apesar de ser uma turma pouco participativa e que, por ser final de semestre, a maioria só estava frequentando às aulas pela presença, julgamos que a prática trouxe resultados interessantes visto que foi a primeira vez que a professora da turma observou alguns acadêmicos tentaram fazer o que lhes foi proposto e entenderem um conteúdo. No entanto, ainda há aspectos a serem aprimorados, como o tempo dedicado à realização das atividades e a redução do número de problemas apresentados.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos pelo apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) por meio do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA) e à Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) pela bolsa de Iniciação Científica.

## REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

AZEVEDO, E. B.; FIGUEIREDO, E. B.; PALHARES, P. B. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 17, p. e020012, 2020. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/187. Acesso em: 30 set. 2024.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. et al. **Aprendizagem em**

**matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, p.11-33, 2003.

LEMKE, R.; SIPLE, I. Z.; FIGUEIREDO, E.B. OAs para o ensino de cálculo: potencias lidades de tecnologias 3D. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 14, p. 1-10, 2016.

MOREIRA, M. A. Investigación en educación en ciencias: métodos cualitativos. **Actas del PIDEC**, v. 4, n. 14, p. 25-45, 2002. Disponível em: http://if.ufrgs.br/~-moreira/metodoscualitativos.pdf Acesso: 08/10/2024

OLIVEIRA, F. L. **A Produção de Conhecimento Matemático acerca de Funções de Duas Variáveis em um Coletivo de Seres-humanos-com-mídias**. 2014. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Mestrado Profissional em Educação Matemática, Ouro Preto, 2014.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanging in Mathematics via Problem Solving. In: **P. R. Trafton (Ed.) New Directions for Elementar School Mathematics.** National Conuncil of Teachers os Mathematics, Reston, VA: NCTM, 31 – 42, 1989.

SLAVKOVSKY, E. A. **Feasibility Study For Teaching Geometry and Other Topics Using Three-Dimensional Printers**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Harvard, Cambridge, USA, 2012.

STOYANOVA, E. N.. **Extending and exploring students' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in Mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for Young australians.** (Thesis of Doctor of Philosophy in Education). Edith Cowan University, Faculty of Education, 1997.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991.